2^{o} Μέρος
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις για τον επιμελή μαθητή

Μπάμπης Στεργίου Μάρτιος 2015

Λυμένες Ασκήσεις

1.16 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x)+f(x)=x\,,\ \text{για κάθε }x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρεθεί το f(0).
β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f(x).
δ) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ε) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{4}\left[3xf(x)-f^2(x)\right]$.
στ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση

α) Για $x=0$: $f^3(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.
Είναι $f'(0)=1$, οπότε (ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$.

γ) Είναι $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0)=0$ θα ισχύει:

- $x<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$.
- $x>0 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$-$ ↗	0	↗ $+$

Άρα:

- για $x \in (0,+\infty)$ είναι $f(x)>0$.
- για $x \in (-\infty,0)$ είναι $f(x)<0$.

δ) Είναι $3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με f(x) παίρνουμε:

$$3f^3(x)f'(x)+f'(x)f(x)=f(x)$$

Επειδή $f^3(x)=x-f(x)$, αυτή γίνεται:

$$\left(3x-3f(x)\right)f'(x)+f(x)f'(x)=f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x) \qquad (1)$$

ε) Ολοκληρώνουμε την (1):

$$I=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 3tf'(t)dt-2\int_0^x f(t)f'(t)dt=$$

$$=\left[3tf(t)\right]_0^x-\int_0^x 3f(t)dt-2\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x=3xf(x)-3I-f^2(x)$$

διότι $f(0)=0$ και μια αρχική της $g(t)=f(t)f'(t)$ είναι η $G(t)=\dfrac{f^2(t)}{2}$. Άρα:

$$I+3I=3xf(x)-f^2(x) \Leftrightarrow I=\frac{1}{4}\left[3xf(x)-f^2(x)\right]$$

Σχόλιο

Τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ *την πολλαπλασιάζουμε με* $f'(x)\neq 0$ *και παίρνουμε:*

$$f^3(x)f'(x)+f(x)f'(x)=xf'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f^4(x)}{4}\right)'+\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'+f(x)=\left[xf(x)\right]'$$

Άρα:

$$\int_0^x\left(\frac{f^4(t)}{4}\right)'dt+\int_0^x\left(\frac{f^2(t)}{2}\right)'dt+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left[tf(t)\right]'dt$$

Επομένως:

$$\int_0^x f(t)dt=-\left[\frac{f^4(t)}{4}\right]_0^x-\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x+\left[tf(t)\right]_0^x=-\frac{f^4(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$=-\frac{f^3(x)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=-\frac{\left(x-f(x)\right)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$=\frac{4xf(x)-xf(x)+f^2(x)-2f^2(x)}{4}=\frac{3xf(x)-f^2(x)}{4}$$

στ) Έστω $\beta\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=\beta$.
Θέτουμε $\alpha=\beta^3+\beta$. Τότε: $f^3(\alpha)+f(\alpha)=\alpha$ και $\alpha=\beta^3+\beta$. Άρα:

$$f^3(\alpha)+f(\alpha)=\beta^3+\beta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f(\alpha)-\beta\right]\left[f^2(\alpha)+f(\alpha)\cdot\beta+\beta^2+1\right]=0\Leftrightarrow f(\alpha)=\beta$$

διότι $f^2(\alpha)+f(\alpha)\cdot\beta+\beta^2+1>0$. Η σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ με x το $f^{-1}(x)$, όπου $x\in\mathbb{R}$ δίνει:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3+f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x^3+x$$

Γενικά σχόλια

i) Από τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ *, και χωρίς άλλο δεδομένο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν δεν ήταν γνησίως αύξουσα, θα υπήρχαν* $x_1,\ x_2$ *με* $x_1<x_2$ *και* $f(x_1)\geq f(x_2)$. *Έτσι* $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$, *οπότε:*

$$f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1\geq x_2,\ \textit{άτοπο.}$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφαιρώντας τις σχέσεις $f^3(x)+f(x)=x$ *και* $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0$.

ii) Το σύνολο τιμών σε παρόμοιες ασκήσεις βρίσκεται και ως εξής:

- *Η πιθανή αντίστροφη της f είναι η* $g(x)=x^3+x$.
- *Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.*
- *Η δοσμένη δίνει* $g\left(f(x)\right)=x,\ x\in\mathbb{R}$. *Έτσι* $f(x)=g^{-1}(x)$. *Αλλά η* g^{-1} *έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το ℝ. Άρα και η f έχει σύνολο τιμών το ℝ. (Ας τονίσουμε ότι:*

  $g(f(x))=x=g(g^{-1}(x))\overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x)=g^{-1}(x)$.*)*

1.17 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,\ g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με τις ιδιότητες:

$$2+\int_0^x f(x-t)dt=\frac{2}{g(x)},\quad 2+\int_0^x g(x-t)dt=\frac{2}{f(x)}$$

για κάθε $x>-1$.
α) Να αποδειχθεί ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
β) Να αποδειχθεί ότι $f=g$.
γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.
δ) Αν $h(x)=\int_1^x f(t^2)dt$, με $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες x'x, y'y.

Λύση

t	0	x
u	x	0

α) Αν θέσουμε $x-t=u$, τότε $dt=-du$. Έτσι:

- $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(t)dt$.
- $\int_0^x g(x-t)dt=\int_x^0 g(u)(-du)=\int_0^x g(t)dt$.

Η πρώτη σχέση γίνεται:

$$2+\int_0^x f(t)dt=\frac{2}{g(x)}\Leftrightarrow g(x)=\frac{2}{2+\int_0^x f(t)dt}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και έτσι η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι και η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Αφού $2+\int_0^x f(t)dt=\frac{2}{g(x)}$, παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f(x)=-\frac{2g'(x)}{g^2(x)} \text{ και όμοια } g(x)=-\frac{2f'(x)}{f^2(x)}$$

Άρα $2f'(x)=-f^2(x)g(x)$, $2g'(x)=-g^2(x)f(x)$. Αυτές δίνουν:

$$\frac{2f'(x)}{f(x)}=-f(x)g(x)\,,\quad \frac{2g'(x)}{g(x)}=-f(x)g(x)$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)},\quad x>-1 \qquad (1)$$

Οι δοσμένες για $x=0$ δίνουν $f(0)=g(0)=1$, οπότε $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x>-1$, διότι είναι συνεχείς συναρτήσεις και δεν μηδενίζονται. Η (1) επομένως δίνει:

$$\left(\ln(f(x))\right)'=\left(\ln(g(x))\right)'\Leftrightarrow \ln f(x)=\ln g(x)+c\,,\ x>-1$$

Για $x=0$ παίρνουμε $\ln f(0)=\ln g(0)+c \Leftrightarrow \ln 1=\ln 1+c \Leftrightarrow c=0$. Άρα:

$$\ln f(x)=\ln g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

για κάθε $x>-1$, δηλαδή $f=g$.

δ) Αφού $g=f$ η σχέση $2f'(x)=-f^2(x)g(x)$ δίνει:

$$\frac{2f'(x)}{f^2(x)}=-1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f^2(x)}\right)'=(-x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)}=-x+c$$

Για $x=0$ παίρνουμε $\dfrac{1}{f^2(0)}=0+c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $\dfrac{1}{f^2(x)}=x+1$ και επειδή η f είναι θετική, προκύπτει ότι:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x>-1$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει την $2+\int_0^x f(t)dt=\dfrac{2}{g(x)}$, που είναι ισοδύναμη με την αρχική. Πραγματικά:

$$2+\int_0^x f(t)dt=2+\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=2+\left[2\sqrt{t+1}\right]_0^x=$$

$$=2+2\sqrt{t+1}-2=2\sqrt{t+1}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}=\frac{2}{g(x)}$$

δ) Είναι $h'(x)=f(t^2)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα. Για $x<1$ είναι $h(x)<h(1)=0$, οπότε $h(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Άρα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$		$-$	0	$+$	

$$E=-\int_0^1 h(x)dx=-\int_0^1 x'h(x)dx=$$

$$=-\left[xh(x)\right]_0^1+\int_0^1 xh'(x)dx=0+\int_0^1 xf(x^2)dx=$$

$$= \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$$

1.18 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=\beta^3$, όπου $0<\alpha<\beta<\gamma$ και $\beta^2=\alpha\gamma$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\gamma]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\beta$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο [α,β].

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Αν υποθέσουμε ότι $f(x)<0$, τότε $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$ και $f(\gamma)<0$, οπότε $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$, άτοπο.

β) Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi\in[\alpha,\gamma]$, ώστε $f(\xi)=\beta$. Τότε $f(x)\neq\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\beta$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο [α,γ] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο [α,γ]. Ας υποθέσουμε ότι $g(x)>0$, δηλαδή $f(x)>\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$. Τότε:

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)>\beta\cdot\beta\cdot\beta=\beta^3, \text{ άτοπο}$$

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν θεωρήσουμε ότι $g(x)<0$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=x$ είναι αδύνατη. Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

- Η h είναι συνεχής στο [α,γ] ως διαφορά συνεχών.
- $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$.

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο [α,γ]. Αν είναι $h(x)<0$, δηλαδή $f(x)<x$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$, τότε

- $f(\alpha)<\alpha$, $f(\beta)<\beta$, $f(\gamma)<\gamma$.
- $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma\beta=\beta^2\beta=\beta^3$, άτοπο.

Όμοια απορρίπτουμε και την περίπτωση να είναι $h(x)>0$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

1.19 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(0)=1$ και:
α) Να αποδειχθεί ότι $f=g$.
β) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).
γ) Να αποδειχθεί ότι $f(3)+f(7)>2f(5)$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f'(x)g(x)=e^{2x} \quad \text{και} \quad f(x)g'(x)=e^{2x} \qquad (1)$$

Επειδή $e^{2x}\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από την (1) παίρνουμε επίσης ότι:

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

Για $x=0$ παίρνουμε $c=\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{1}{1}=1$. Έτσι:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Επειδή $f=g$, η (1) δίνει:

$$f'(x)g(x)=e^{2x}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c$$

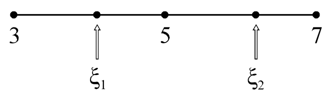
Για $x = 0$ αυτή δίνει $f^2(0) = 1 + c$, δηλαδή $c = 0$. Έτσι:

$$f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)| = e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (λόγω της (1)). Άρα η f διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0) = 1$, είναι $f(x) > 0$. Άρα:

$$|f(x)| = e^x \overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow} f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\dfrac{3+7}{2} = 5$, οπότε η άσκηση μας οδηγεί σε εφαρμογή για την f του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [3,5] και [5,7].
Η f είναι λοιπόν συνεχής στα [3,5] και [5,7] ως παραγωγίσιμη και προφανώς παραγωγίσιμη στα (3,5) και (5,7). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (3, 5)$ και $\xi_2 \in (5, 7)$ τέτοιοι, ώστε:



- $f'(\xi_1) = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{f(5) - f(3)}{2}$.
- $f'(\xi_2) = \dfrac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \dfrac{f(7) - f(5)}{2}$.

Είναι δε $f'(x) = e^x$ και επειδή $\xi_1 < \xi_2$ είναι $e^{\xi_1} < e^{\xi_2}$. Έτσι:

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(5) - f(3)}{2} < \frac{f(7) - f(5)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(5) - f(3) < f(7) - f(5) \Leftrightarrow f(3) + f(7) > 2f(5)$$

Άλλος τρόπος
Είναι $f(3) + f(7) \geq 2\sqrt{f(3)f(7)} = 2\sqrt{e^{3+7}} = 2e^5 = 2f(5)$.

1.20 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και:

$$\mathbf{xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\,,\ x \in (0,+\infty)}$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) Η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = e^x + x}$ είναι 1-1.

β) $\mathbf{f(x) = \ln x\,,\ x > 0}$.

γ) $\mathbf{1 - \frac{1}{x} \le f(x) \le x - 1}$, για κάθε $\mathbf{x > 0}$.

δ) $\mathbf{\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1}$.

Λύση

α) Έστω $x_1,\ x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$. Επομένως $g(x_1) < g(x_2)$, που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g είναι και 1-1.

Η μονοτονία της g προκύπτει πιο εύκολα από το γεγονός ότι $g'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κάτι όμως που διαπραγματευόμαστε σε άλλη ενότητα.

β) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x) + xf'(x) = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' + f'(x) = (x + \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c$$

Για $x = 1$ και επειδή $f(1) = 0$, αυτή δίνει:

$$e^{f(1)} + f(1) = 1 + \ln 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Είναι λοιπόν $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, οπότε με βάση το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = g(\ln x) \Leftrightarrow$$

$$\overset{g:\,1-1}{\Longleftrightarrow} f(x) = \ln x\,,\ x > 0$$

γ) Παρατηρούμε ότι για $x=1$ η δοσμένη σχέση ισχύει ως ισότητα.

- Έστω $x>1$. Για την $f(t)=\ln t$ πληρούνται στο $[1,x]$ οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $\xi \in (1, x)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln x}{x-1} \qquad (1)$$

Όμως $1<\xi<x \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{\xi}<1$, οπότε η (1) δίνει:

$$\frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x-1}<1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} 1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

- Όμοια, με $0<x<1$, το Θ.Μ.Τ. δίνει ότι υπάρχει $\xi \in (x, 1)$, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{-\ln x}{1-x}$$

Είναι όμως $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ και $0<x<\xi<1$, οπότε:

$$1<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow 1<\frac{-\ln x}{1-x}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{x} \overset{x<1}{\Leftrightarrow} x>\ln x>1-\frac{1}{x}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση είναι $1-\frac{1}{x} \le f(x) \le x-1$.

Να σημειώσουμε ότι η ανισότητα μπορεί επίσης να αποδειχθεί με τη μέθοδο της μονοτονίας, που είναι επίσης πολύ βασική.

δ) Έχουμε $1-\frac{1}{x} \le \ln x \le x-1$, οπότε:

- Για $x>1$ παίρνουμε:

$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \frac{\ln x}{x-1} \le 1$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}=1$.

- Για $0<x<1$, όμοια παίρνουμε ότι $\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{\ln x}{x-1} \ge 1$, οπότε το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Άρα $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

Σημειώνουμε ότι για την εύρεση της παραγώγου της $f(x)=\ln x$ χρησιμοποιούμε το παραπάνω όριο. Ωστόσο, για την εύρεση του παραπάνω ορίου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Υπό αυτή την έννοια έχει γίνει κάποιος "κύκλος", αυτό όμως δεν μειώνει σε τίποτα το διδακτικό χαρακτήρα της άσκησης.

1.21 Μια συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, υπάρχει αρχική F της f με $F(0)=F(1)=0$ και ισχύει ότι $xf(x^2)=F(x)f'(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

α) Να αποδειχθεί ότι αν $\int_0^1 f^2(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$, $x\in[0,1]$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 xf^2(x)dx=0$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση

α) Επειδή $f^2(x)\ge 0$ και η f είναι συνεχής, αν υπάρχει $x_0\in[0,1]$ με $f(x_0)\ne 0$, τότε θα ήταν $\int_0^1 f^2(x)dx>0$, άτοπο. Άρα $f^2(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, $x\in[0,1]$.

β) Θέτουμε $x^2=u$. Τότε $2xdx=du$, οπότε:

x	0	1
u	0	1

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2}\big(F(1)-F(0)\big)=0$$

γ) Στη σχέση $xf(x^2)=F(x)f'(x)$ παίρνουμε ολοκλήρωμα στα δύο μέλη, οπότε:

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \int_0^1 F(x)f'(x)dx$$
(1)

Είναι όμως:

- $\int_0^1 F(x)f'(x)dx = [F(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 F'(x)f(x)dx = F(1)f(1) - F(0)f(0) -$
$-\int_0^1 f^2(x)dx = -\int_0^1 f^2(x)dx$.
- $\int_0^1 xf^2(x)dx \overset{(\beta)}{=} 0$.

Η σχέση (1) δίνει επομένως:

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x) = 0$$

Άρα η f είναι σταθερή και μάλιστα $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

1.22 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$\mathbf{f(x) = \frac{F(x+\nu) - F(x)}{\nu}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
α) Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη.
β) Να αποδειχθεί ότι $f(x+1) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $G(x) = F(x+1) - F(x)$ είναι σταθερή.
δ) Αν $f(0) = 2014$, να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{F(x+\nu) - F(x)}{\nu} \quad (1)$$

Η σχέση (1), σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επειδή η F είναι αρχική της f, η F παραγωγίζεται. Άρα και η f, λόγω της (1), παραγωγίζεται και μάλιστα είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{F(x+\nu)-F(x)}{\nu}\right)'=\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu},\ x\in\mathbb{R}$$

β) Για $\nu=2$ παίρνουμε:

$$f(x)=\frac{F(x+2)-F(x)}{2}\Leftrightarrow 2f(x)=F(x+2)-F(x) \qquad (2)$$

Για $\nu=1$ παίρνουμε:

$$f(x)=F(x+1)-F(x) \qquad (3)$$

Έτσι η (2) γράφεται:

$$2f(x)=F(x+2)-F(x+1)+F(x+1)-F(x)=$$

$$\overset{(3)}{=\!=}f(x+1)-f(x)$$

Αυτή δίνει $2f(x)=f(x+1)+f(x)$, δηλαδή $f(x)=f(x+1)$.

γ) Η G είναι προφανώς παραγωγίσιμη με:

$$G'(x)=\left(F(x+1)-F(x)\right)'=f(x+1)-f(x)\overset{(\alpha)}{=}0,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η G είναι σταθερή

δ) Είναι $G(x)=c$, οπότε:

$$F(x+1)-F(x)=c\overset{(3)}{\Leftrightarrow}f(x)=c$$

Αφού $f(0)=2014$, είναι $f(x)=2014$, $x\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Δίνεται η εξίσωση $f(x)=0$, όπου f συνεχής συνάρτηση. Έστω ότι:

- Για την f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο [α,β].
- Για μια αρχική F της f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α,β].

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε κατάλληλη αρχική F της f στο [α,β] και εξασφαλίζουμε με το θεώρημα Bolzano δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 για την F στο [α,β]. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια θεώρημα Rolle για την F στο $[\rho_1, \rho_2]$ εξασφαλίζουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

1.23 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3-15x^2-18x=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

Η πρώτη μας προσπάθεια είναι να μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α′ μέλος:

$$4x^3-15x^2-18x=1 \Leftrightarrow 4x^3-15x^2-18x-1=0$$

Η δεύτερη βασική ενέργεια είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=4x^3-15x^2-18x-1$$

και να εξετάσουμε αν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.
- $f(-1)=-4-15+18-1=-2<0$ και $f(1)=4-15-18-1=-30<0$.

Είναι λοιπόν $f(-1)f(1)>0$, οπότε το θεώρημα Bolzano δεν προσφέρει αποτελεσματική βοήθεια. Στην περίπτωση αυτή είμαστε αναγκασμένοι να αναζητήσουμε παράγουσα της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με όσα έχουμε γράψει στο σχετικό σχόλιο, είναι:

$$F(x)=\frac{4x^4}{4}-\frac{15x^3}{3}-\frac{18x^2}{2}-x=x^4-5x^3-9x^2-x$$

Για την F εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$. Είναι όμως:

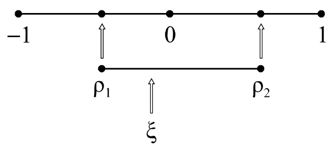
$$F(-1)=1+5-9+1=-2 \text{ και } F(1)=1-5-9-1=-14\neq F(-1)$$

Θα προσπαθήσουμε ωστόσο να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στην F σε άλλο διάστημα.

Θεωρούμε την αρχική $G(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - x + 1$ της f.

Για τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ είναι:

- $G(-1) = 1 + 5 - 9 + 1 + 1 = -1 < 0$.
- $G(0) = 1 > 0$.
- $G(1) = 1 - 5 - 9 - 1 - 1 = -13 < 0$.



Η G λοιπόν είναι συνεχής στα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και επιπλέον $G(-1)G(0) < 0$, $G(0)G(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχουν $\rho_1 \in (-1, 0)$ και $\rho_2 \in (0, 1)$, ώστε:

$$G(\rho_1) = 0 \quad \text{και} \quad G(\rho_2) = 0$$

Βλέπουμε τώρα ότι:

- Η G είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- Παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2).
- $G(\rho_1) = G(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, ώστε:

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Συνεπώς το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, άρα και της δοσμένης εξίσωσης.

1.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f.

γ) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $\varphi(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$ είναι συνεχής και $D_\varphi=\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση

$f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right)'=\frac{2}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$$

β) Έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επίσης $f(1)=\displaystyle\int_1^1 \frac{2}{1+t^2}dt=0$, οπότε το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

x	$-\infty$	$+\infty$
f΄(x)	+	
f(x)	↗	

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

- $x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>0$.
- $x<1 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$.

Άρα το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	− ↗	0	↗ +

γ) Αφού $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt$, είναι:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right)dx=$$

$$= \int_0^1 x'\left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right)dx = \left[x\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2}{1+x^2}dx =$$

$$= (0-0) - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx =$$

$$= -\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να γράψουμε:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x'f(x)dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx =$$

$$= 0 - \int_0^1 x\frac{2}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx \ \text{κ.λπ.}$$

κάτι που καθιστά την όλη διαδικασία πιο εύκολη. Αυτό όμως που πρέπει σε κάθε περίπτωση να επισημάνουμε είναι ότι σε παρόμοια θέματα εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

1.25 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx$$

α) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^4dx$.

β) Αν $g(x) = f(x^3) - x^2$, $x\in[0,1]$, να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 g^2(x)dx = 0$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f(x).

Λύση

α) Είναι $\int_0^1 x^4dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$.

β) Όπως διαπιστώνει κανείς με την πρώτη ματιά, ο όρος που παρουσιάζει ιδιαιτερότητα είναι ο $\int_0^1 f^2(x^3)dx$.

x	0	1
t	0	1

Θέτουμε λοιπόν στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ $x = t^3$, οπότε $dx = 3t^2 dt$ και έτσι:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(t^3)3t^2 dt =$$

$$= 3\int_0^1 t^2 f(t^3)dt = 3\int_0^1 x^2 f(x^3)dt$$

Η δοσμένη λοιπόν σχέση γίνεται:

$$3\int_0^1 x^2 f(x^3)dx = \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3)dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x^3)dx - 2\int_0^1 x^2 f(x^3)dx + \frac{1}{5} = 0 \qquad (1)$$

Επειδή οι δύο από τους τρεις όρους της (1) είναι σε ολοκληρωτική μορφή, αναγκαζόμαστε να γράψουμε $\frac{1}{5} = \int_0^1 x^4 dx$ (αυτός είναι ο λόγος ύπαρξης του α′ ερωτήματος). Έτσι η (1) γράφεται:

$$\int_0^1 \left(f^2(x^3) - 2x^2 f(x^3) + x^4\right)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x^3) - x^2\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g^2(x)dx = 0 \qquad (2)$$

γ) Επειδή $g^2(x) \geq 0$ και η $g^2(x)$ είναι επίσης συνεχής, η (2) δίνει αναγκαστικά $g^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Τονίζουμε ότι αν για κάποιο $x_0 \in [0, 1]$ είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε $\int_0^1 g^2 dx > 0$, άτοπο. Αν θέσουμε όπου x το $\sqrt[3]{x}$ (αυτό μπορεί να γίνει διότι με $x \in [0, 1]$ είναι και $\sqrt[3]{x} \in [0, 1]$), παίρνουμε:

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \ x \in [0, 1]$$

Σημείωση

Είναι φανερό ότι αν ζητηθεί απευθείας το ερώτημα (γ) το πρόβλημα γίνεται σαφέστατα πιο δύσκολο.

1.26 Έστω F μια αρχική της περιττής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $f(x)=2xe^{-F(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(0)=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) $xf'(x)=f(x)-xf^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=\lambda$, με $\lambda>0$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι περιττή, θα ισχύει $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Αυτή για $x=0$ δίνει:

$$f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$$

β) Από την υπόθεση έχουμε $f(x)=2xe^{-F(x)}$ (1) και $F'(x)=f(x)$. Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι $f(0)=0$. Επειδή η $e^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων e^x και $-F(x)$ (ή των e^{-x} και $F(x)$), η συνάρτηση $2xe^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων. Άρα και η f, λόγω της (1), παραγωγίζεται.

γ) Η (1), παραγωγίζοντας, δίνει:

$$f'(x)=2e^{-F(x)}-2xe^{-F(x)}f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{f(x)}{x}-f(x)f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf'(x)=f(x)-f^2(x)\qquad (2)$$

Αλλά επειδή $f(0)=0$, η (2) επαληθεύεται και για $x=0$ και έτσι η (2) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Εδώ απαιτείται περισσότερη προσπάθεια. Η (2) γράφεται:

$$f(x)-xf'(x)=xf^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'f(x)-xf'(x)=xf^3(x)\,,\ x\neq 0 \qquad (3)$$

Όμως η (1) εξασφαλίζει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$. Έτσι με $x\neq 0$ η (3) γίνεται:

$$\frac{x'f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}=x\Leftrightarrow\left(\frac{x}{f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right),\ x\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+c_1, & x>0\\[2mm] \dfrac{x^2}{2}+c_2, & x<0\end{cases}$$

Για $x=1$ παίρνουμε $\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{2}+c_1\Leftrightarrow c_1=\dfrac{1}{2}$, οπότε:

$$\frac{x}{f(x)}=\frac{x^2+1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ x>0$$

Για $x=-1$ παίρνουμε $\dfrac{-1}{f(-1)}=\dfrac{1}{2}+c_2\Leftrightarrow c_2=\dfrac{1}{2}$, διότι $f(-1)=-f(1)=-1$. Άρα:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ x<0$$

Επειδή $f(0)=0$, τελικά είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

ε) Για $x>0$ είναι $f(x)>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda)=\int_0^\lambda f(x)dx=\left[\ln(x^2+1)\right]_0^\lambda=\ln(\lambda^2+1)$$

στ) Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(e^{-\lambda}E(\lambda)\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln(\lambda^2+1)}{e^\lambda}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=}$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right)\cdot \lim_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0\cdot 0 = 0$$

διότι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{2}{\lambda} = 0$.

1.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.
α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
β) Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - x - 2 = \ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}$.

Λύση

α) Επειδή $e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.
Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Είναι τότε:

- $e^{x_1} < e^{x_2}$, $e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$, $\ln(e^{x_1} + 1) < \ln(e^{x_2} + 1)$.
- $x_1 + \ln(e^{x_1} + 1) < x_2 + \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η f είναι και 1-1.

γ) Η εξίσωση έχει σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$, διότι $\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Θα γράψουμε την εξίσωση σε πιο απλή μορφή. Είναι:

$$x^2 - x - 2 = \ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = \ln\left(e^{x+2}+1\right) - \ln\left(e^{x^2}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x^2}+1\right) + x^2 = \ln\left(e^{x+2}+1\right) + (x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)=f(x+2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=2)$$

Προφανώς, οι τιμές αυτές είναι δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού της εξίσωσης.

1.28 Αν η συνάρτηση f έχει θετική παράγωγο στο διάστημα [α,β], να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Λύση

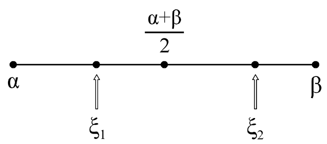
Πρόκειται για άσκηση με ιδιαίτερο διδακτικό χαρακτήρα. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με:

- $g'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$.
- $g''(x)=f'(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Η g' είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα.

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ ως παραγωγίσιμη σ' αυτά.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε:



- $g'(\xi_1)=\dfrac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{2\left(g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}$

- $$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\left(g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}$$

Επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα και $\xi_1<\xi_2$, παίρνουμε:

$$g'(\xi_1)<g(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{2\left(g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}<\frac{2\left(g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\beta>\alpha}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)<g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(g(\alpha)+g(\beta)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}f(t)dt<\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

αφού $g(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(t)dt=0$.

1.29 Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ έχει συνεχή παράγωγο και $f(1)-f(0)=1-e$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}dx$.

Λύση

Προσπαθούμε στον αριθμητή να εμφανίσουμε τον παρονομαστή. Γράφουμε λοιπόν:

- $$\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}=\frac{f(x)+e^x-e^x-f'(x)}{f(x)+e^x}=1-\frac{e^x+f'(x)}{f(x)+e^x}=1-\frac{\left(e^x+f(x)\right)'}{e^x+f(x)}.$$

- $$I=\int_0^1\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{\left(e^x+f(x)\right)'}{e^x+f(x)}\right)dx=\left[x-\ln(e^x+f(x)\right]_0^1=$$

$$=1-\ln(e+f(1))-\left(0-\ln(1+f(0)\right)=1-\ln(e+f(1))+\ln(1+f(0))=1+\ln\frac{1+f(0)}{e+f(1)}.$$

Είναι όμως $f(1)-f(0)=1-e$, οπότε $1+f(0)=e+f(1)$. Άρα $I=1+\ln 1=1$.