Άλγεβρα και εφαπτομένες καμπυλών

Σωτήρης Δ. Χασάπης	Μαρία Δ. Πουλούδη
M.Sc. Μαθηματικών	M.Sc. Στατιστικής
Πρότυπο ΓΕ.Λ. Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης	1ο ΓΕ.Λ. Κερατσινίου
shasapis@sch.gr	mpouloudi@sch.gr

Περίληψη. Παρουσιάζεται μία ανασκόπηση των ιδεών περί την εφαπτομένη μίας καμπύλης μέσω της άλγεβρας. Οι ιδέες των Fermat και Descartes, ως συνέχεια σχετικού θεωρήματος του Ευκλείδη, όπου συνδέονται οι τέμνουσες, δια μέσου των οριακών θέσεών τους με την εφαπτομένη μίας καμπύλης, είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον προ της εισαγωγής της εφαπτομένης δια μέσου της ανάλυσης. Οι μέθοδοι που περιγράφονται είναι αποτελεσματικές για αλγεβρικές καμπύλες, όχι όμως σε τριγωνομετρικές ή εκθετικές συναρτήσεις. Σε κάθε περίπτωση πάντως η πολυπλοκότητα στην εύρεση του αποτελέσματος μπορεί να είναι ιδιαίτερα αυξημένη.

Λέξεις κλειδιά: Εφαπτομένη καμπύλης, Άλγεβρα.

Εισαγωγή.

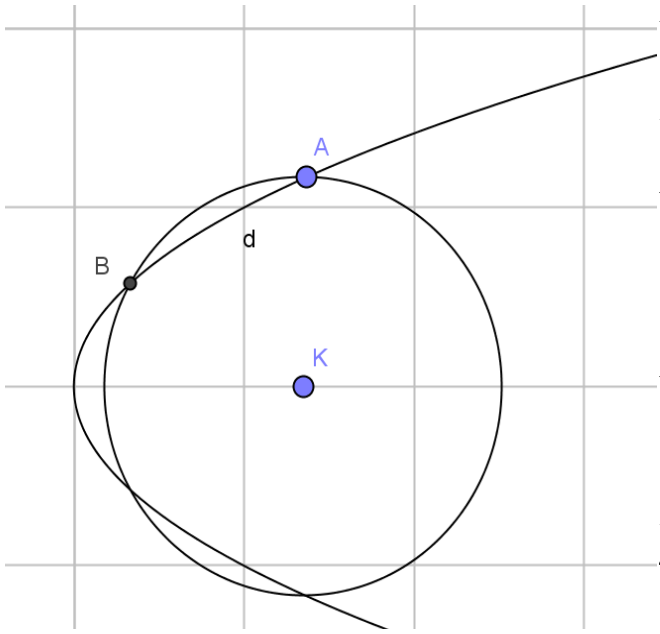
Επιχειρώντας μία σύντομη ιστορική αναδρομή στο θέμα της εφαπτομένης σε μία καμπύλη θα μπορούσε κανείς να επισημάνει τις παρακάτω κύριες περιόδους. Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του, στο βιβλίο ΙΙΙ, δίνει έναν ορισμό της εφαπτομένης για τον κύκλο (Όροι 2: *Μία ευθεία λέγεται ότι εφάπτεται κύκλου εκείνη, η οποία απτόμενη του κύκλου και προεκβαλλομένη δεν τέμνει τον κύκλο).* Ο Απολλώνιος, περί το 225 π.Χ., αναφερόμενος σε κωνικές τομές, θέτει την εφαπτομένη ως μία ευθεία τέτοια, ώστε καμία άλλη ευθεία δε θα μπορούσε να βρίσκεται μεταξύ αυτής και της καμπύλης. Παρόμοια θεώρηση παρουσιάζει ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» ΙΙΙ, πρόταση 16, γράφοντας: « *Η κάθετος η αγόμενη στο άκρο της διαμέτρου του κύκλου θα πέσει εκτός του κύκλου και στον τόπο τον μεταξύ της καθέτου και της περιφέρειας δεν δύναται να παραπέσει άλλη ευθεία...».* Ενώ, ο Αρχιμήδης βρίσκει εφαπτομένη στη σπείρα του, θεωρώντας την τροχιά ενός σημείου που κινείται κατά μήκος της καμπύλης και διαφεύγει από αυτήν στη διεύθυνση της κίνησής του. Στο πρώτο μισό του 17ου αιώνα οι Descartes και Fermat, χρησιμοποιώντας άλγεβρα έλυσαν πλήρως το πρόβλημα της εφαπτομένης μίας καμπύλης για γραφικές παραστάσεις πολυωνύμων και γενικότερα αλγεβρικών καμπυλών. Μέθοδοι που αποτυγχάνουν σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπου απαιτείται η μέθοδος του Newton με τον ορισμό του για την εφαπτομένη ως το όριο μίας τέμνουσας και με χρήση των ορίων.

Αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη καμπύλης.

Είναι γνωστό, τόσο από την εμπειρία στην τάξη, όσο και από έρευνες που έχουν γίνει (Vinner 1991, Zachariades 2008), ότι οι περισσότεροι μαθητές εδραιώνουν μία εντύπωση για την εφαπτομένη μίας καμπύλης, έχοντας υπόψη την περίπτωση της εφαπτομένης στον κύκλο. Αυτή παρουσιάζεται στους μαθητές ήδη από το Γυμνάσιο και εξακολουθεί να αποτελεί μοναδική περίπτωση για τους μαθητές έως τη Β΄Λυκείου, όταν θα έρθουν αντιμέτωποι με τις εφαπτομένες των κωνικών τομών (για όσον καιρό τουλάχιστον, βρίσκονται ακόμα εντός διδακτέας ύλης) στο μάθημα προσανατολισμού. Δηλαδή, οι μαθητές μέχρι να έρθουν σε επαφή με την εφαπτομένη στο μάθημα προσανατολισμού, έχουν ως έννοια εφαπτομένης στο μυαλό τους, εκείνη την ευθεία, η οποία τέμνει τον κύκλο σε ένα και μόνο σημείο. Ωστόσο, στην εκπαιδευτική τους πορεία, ακόμα κι αν δεν επιλέξουν τον θετικό προσανατολισμό, μπορούμε να τους παρέχουμε ευκαιρίες μελέτης της εφαπτομένης μίας καμπύλης πριν τη χρήση της έννοιας που εμφανίζεται στο διαφορικό λογισμό της Γ΄ Λυκείου. Αυτό μπορεί να γίνει είτε μέσω του μαθήματος της Άλγεβρας, είτε της Γεωμετρίας, ακολουθώντας μάλιστα την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Προσεγγίζοντας την εφαπτομένη μέσω κατάλληλου κύκλου.

Μία «φυσιολογική» αναζήτηση γενίκευσης της έννοιας της εφαπτομένης σε καμπύλες, μπορεί συχνά να οδηγήσει μέσα στην τάξη στο μετασχηματισμό του προβλήματος σε εκείνο της εύρεσης κατάλληλου κύκλου, ο οποίος να «εφάπτεται» της καμπύλης αυτής, οπότε να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την εφαπτομένη, μέσω της γνωστής εφαπτομένης του κύκλου στο ζητούμενο σημείο. Η ιδέα αυτή ήταν η πρώτη ιδέα που εφήρμοσε ο Descartes για την εύρεση εφαπτομένης προ του Απειροστικού Λογισμού. Συγκεκριμένα, η μέθοδός του συνίσταται στην εύρεση ενός κύκλου εφαπτόμενου στην καμπύλη στο ζητούμενο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα στην οριακή θέση.



Αναζητείται κύκλος κέντρου Κ, ο οποίος εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο Α. Ο κύκλος μπορεί αρχικά να τέμνει την καμπύλης και σε κάποιο άλλο σημείο Β, οπότε τότε δε θα εφάπτεται σ' αυτήν. Οπότε θα επιδιώξουμε να μη συμβαίνει ακριβώς αυτό. Η εύρεση των κοινών σημείων ενός κύκλου και μίας καμπύλης είναι γνωστό ότι αντιστοιχεί στην επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους. Οπότε η απλή απαίτηση που θα θελήσουμε θα είναι το σύστημα να έχει μία διακεκριμένη λύση. Θεωρούμε λοιπόν την καμπύλη, για παράδειγμα, $y^2=x$ το σημείο $A(a^2,a)$ και τον κύκλο με κέντρο το $K(k,0)$, ο οποίος θα έχει εξίσωση της μορφής: $(x-k)^2+y^2=r^2$, όπου r κατάλληλη ακτίνα. Τότε το σύστημα των δύο εξισώσεων θα είναι:

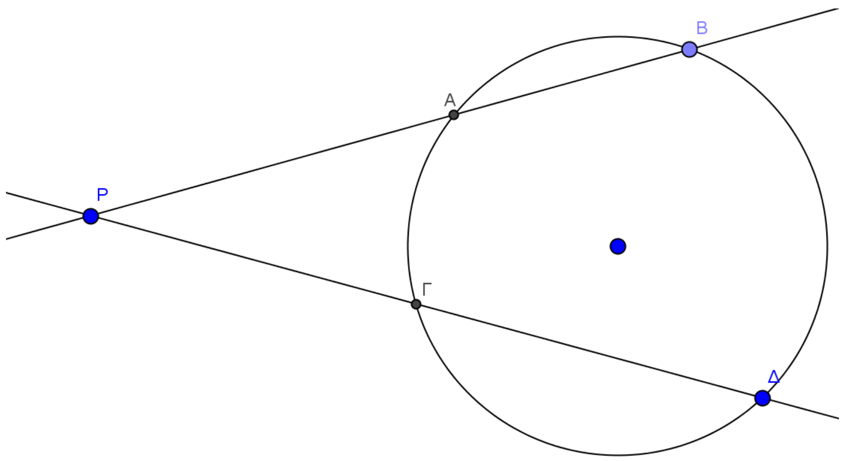
$$\begin{cases} y^2 & = & x \\ x^2-2\mathrm{k}\mathrm{x}+k^2+y^2 & = & r^2 \end{cases}$$

όπου αντικαθιστώντας το y^2 έχουμε την εξίσωση: $x^2+(1-2\mathrm{k})x+k^2-r^2=0$, όμως θέλουμε το σημείο επαφής να είναι μοναδικό το $A(a^2,a)$ άρα και το a^2 η μοναδική λύση της προηγούμενης εξίσωσης, δηλαδή θα ισχύει: $x^2+(1-2\mathrm{k})x+k^2-r^2=(x-a^2)^2$, απ' όπου με απλή ισότητα πολυωνύμων προκύπτει ότι $k=a^2+\frac{1}{2}$. Η εύρεση της ακτίνας του κύκλου δεν είναι αναγκαία, αφού από τα σημεία Α, Κ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ζητούμενη εφαπτομένη, ως την κάθετη στην ΑΚ. Αν και αυτή η μέθοδος του Descartes λειτουργεί καλά για τετραγωνικές καμπύλες, οι πράξεις γίνονται αρκετά επίπονες στην περίπτωση καμπυλών μεγαλύτερης τάξης, ακόμα και κυβικών καμπυλών.

Τέμνουσες κύκλου και Εφαπτομένες

Σύμφωνα με τον Coolidge, η ιδέα της εφαπτομένης ως οριακή θέση μίας τέμνουσας, όταν τα δύο σημεία τομής τείνουν να συμπέσουν στο ζητούμενο σημείο επαφής έγινε αποδεκτή στη Μαθηματική κοινότητα με πολύ αργούς ρυθμούς. Όμως, η ιδέα της σύμπτωσης των δύο σημείων τομής μίας τέμνουσας έγινε ευρέως κατανοητή πριν τα μισά του 17ου αιώνα και αυτό οφείλεται κυρίως στον Fermat. Οι βασικές του ιδέες εμφανίστηκαν πρώτα το 1629 σ' ένα γράμμα του στον Depagnet και οι εφαπτομένες εκεί προέκυψαν ως επακόλουθο μίας μεθόδου για την εύρεση ακροτάτων. Ας δούμε όμως πρώτα πώς θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε με τους μαθητές αυτήν την ιδέα της εφαπτομένης, χρησιμοποιώντας το μάθημα της γεωμετρίας. Η έννοια των όμοιων τριγώνων είναι ήδη γνωστή από το γυμνάσιο, όπως επίσης και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Οι μαθητές στο τέλος της Α΄λυκείου στο μάθημα της γεωμετρίας μπορούν – μέσω εγγράψιμων τετραπλεύρων- να αποδείξουν το παρακάτω θεώρημα για δύο τέμνουσες του κύκλου:

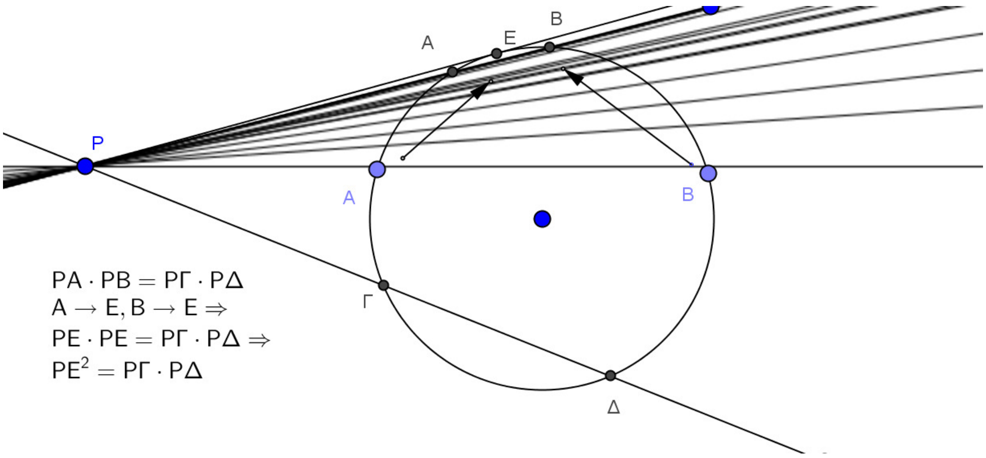
«Αν οι φορείς δύο χορδών ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται
σε σημείο Ρ, τότε ισχύει ότι:
$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$. »



Αν στη συνέχεια επικεντρώσουμε σε τέμνουσες εξωτερικές του κύκλου, τότε μπορεί να αποδειχθεί το θεώρημα που συνδέει το μήκος εφαπτόμενου τμήματος ΡΕ, από σημείο Ρ εξωτερικό του κύκλου και μίας τέμνουσας ΡΓΔ του κύκλου που αναφέρει ότι:

«Αν από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου φέρουμε
εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον
κύκλο στα σημεία Γ, Δ, τότε ισχύει ότι:
$PE^2 = P\Gamma \cdot P\Delta$. »

Συγκρίνοντας τις περιπτώσεις των δύο θεωρημάτων παραπάνω για τη σχέση των δύο τεμνουσών και τη σχέση μεταξύ τέμνουσα και εφαπτομένης, θεωρώντας τα αντίστοιχα τμήματα που δημιουργούνται από το σημείο τομής τους κάθε φορά μπορούμε να ωθήσουμε τους μαθητές στην έννοια της ταύτισης του εφαπτόμενου τμήματος ΡΕ με την τέμνουσα ΡΑΒ, όταν η τελευταία συρθεί προς το εξωτερικό του κύκλου και μέχρι τα σημεία Α,Β να ταυτιστούν.



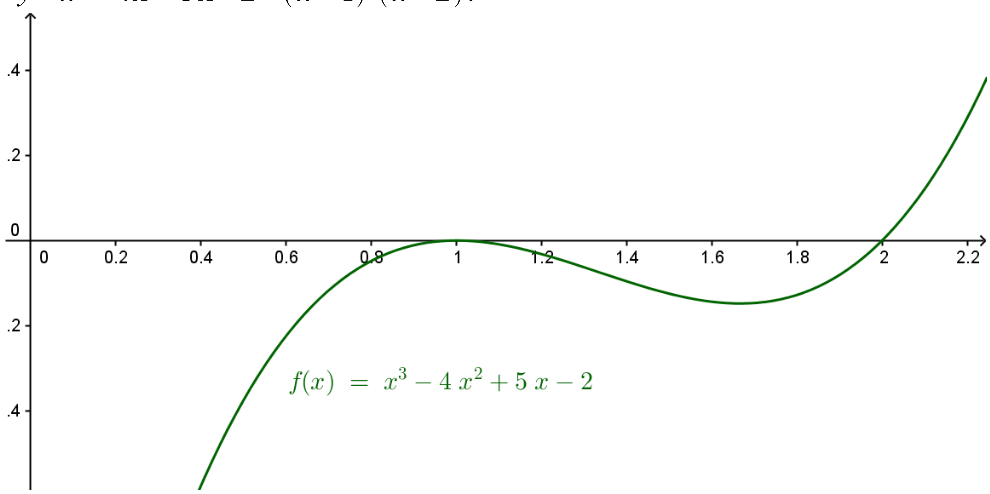
Μία τέτοια προσέγγιση ουσιαστικά ακολουθεί την ιδέα των δύο σημείων τομής που συμπίπτουν και ταυτόχρονα μπορεί να εισάγει την ιδέα της οριακής θέσης μίας τέμνουσας ως εφαπτομένης.

Η παραπάνω προσέγγιση ακολουθήθηκε από τον Descartes, χρησιμοποιώντας αλγεβρικές μεθόδους, ως βελτίωση της προηγούμενης μεθόδου που εξετάστηκε με την εύρεση του κατάλληλου κύκλου. Συγκεκριμένα, το σημείο επαφής θεώρησε ότι προσεγγίζεται ως «διπλό σημείο» τομής της εφαπτομένης με τον κύκλο, οπότε το σύστημα εξισώσεων της ευθείας και του κύκλου που πρέπει να λυθεί θα έχει στο σημείο τομής διπλή λύση.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Γνωρίζουμε ότι στο σημείο (0,1) δέχεται εφαπτομένη με εξίσωση y=1. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του κύκλου, μέσω της εξίσωσης της εφαπτομένης λαμβάνουμε: $x^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$, όπου η λύση $x=0$ είναι πράγματι διπλή.

Ως δεύτερο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την καμπύλη $y=x^3-4x^2+5x-2$ τότε αυτή συναντά τον άξονα x'x σε δύο σημεία με τετμημένες $x=1\,, x=2$. Είναι δυνατόν και πάλι να επιβεβαιωθεί αλγεβρικά ότι το σημείο (1,0) είναι σημείο επαφής για την καμπύλη με εφαπτομένη τον άξονα x'x. Αυτό συμβαίνει διότι η ρίζα x=1 είναι διπλή, αφού:

$y=x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$.



Τέλος, στην $y=x^3$ για την οποία γνωρίζουμε ότι ο άξονας x'x αποτελεί εφαπτομένη στο (0,0) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η x=0 είναι τριπλή ρίζα της εξίσωσης. Δηλαδή, η ιδέα της διπλής ρίζας επεκτείνεται και σε ρίζες με πολλαπλότητα μεγαλύτερη ή ίση του 2. Ας εφαρμόσουμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση μίας εφαπτομένης σε μία καμπύλη, η οποία δεν είναι τόσο προφανής, όσο στα προηγούμενα παραδείγματα. Θεωρούμε την παραβολή $y=x^2$ για την οποία θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη στο σημείο (2,4), η οποία θα έχει εξίσωση της μορφής $y-4=m(x-2)$. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και έχουμε:

$\begin{cases} y &= x^2 \\ y-4 &= m(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x^2 \\ x^2-4 &= m(x-2) \end{cases}$ όπου η δεύτερη εξίσωση τώρα γίνεται: $x^2-mx+2\mathrm{m}-4=0, \Delta=(m-4)^2$, η οποία έχει διπλή ρίζα για $m=4$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται: $y=4(x-2)+4$.

Τέμνουσες και διαίρεση πολυωνύμων

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της διαίρεσης πολυωνύμων στο μάθημα της άλγεβρας Β΄ Λυκείου μπορεί να οδηγήσει σε μία ακόμα προσέγγιση της εφαπτομένης. Αν θεωρήσουμε την τέμνουσα στα σημεία $(a, P(a)), (b, P(b))$, στη γραφική παράσταση ενός πολυωνύμου $P(x)$ τότε αυτή θα έχει εξίσωση $y=mx+c$ η οποία προκύπτει ως υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x)=q(x)(x-a)(x-b)+(mx+c)$.

Εφαπτομένες και Διαίρεση πολυωνύμων.

Η προηγούμενη μέθοδος για τις τέμνουσες μπορεί να γενικευτεί εύκολα για τις εφαπτομένες, συνδέοντας τα δύο σημεία τομής με τη μέθοδο που περιέγραψε ο Leibniz: *« Εφαπτομένη σε μία καμπύλη είναι μία ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία της καμπύλης τα οποία βρίσκονται απείρως κοντά»* (Leibniz G., Nova methodus pro Maximis et Minimis, 1684). Οπότε, θεωρώντας ότι τα δύο σημεία μίας τέμνουσας, όπως στα προηγούμενα ταυτίζονται, τότε ισχύει η εξής:

Παρατήρηση: Αν $y=mx+b$ είναι εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση του πολυωνύμου $p(x)$ στο $x=a$ αν και μόνο αν η Ευκλείδεια διαίρεση δίνει αποτέλεσμα: $p(x)=(x-a)^2\pi(x)+(mx+b)$.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση του πολυωνύμου $p(x)=x^3-3\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+3$ στο σημείο $x=2$ τότε εκτελώντας τη διαίρεση με $(x-2)^2$ έχουμε: $p(x)=(x+1)(x-2)^2+2\mathrm{x}-1$ οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία $y=2\mathrm{x}-1$. Θα μπορούσε επομένως να αποτελεί μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή στη διαίρεση πολυωνύμων στο πλαίσιο του μαθήματος της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου.

Αντίστοιχα, ο προσδιορισμός πολλαπλών ριζών ενός πολυωνύμου θα μπορούσε να έχει εφαρμογή στην εύρεση σημείων του άξονα x'x, στα οποία η καμπύλη εφάπτεται. Συγκεκριμένα, αν $x=a$ αποτελεί ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$ τότε ο άξονας x'x εφάπτεται στη γραφική παράστασή του, αν και μόνο αν η $x=a$ είναι τουλάχιστον διπλή ρίζα του πολυωνύμου.

Επίλογος

Ο Fermat, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της «περίπου ισότητας» (adequality) που δανείστηκε από τον Διόφαντο, βρήκε εφαπτομένες σε καμπύλες σε ένα έργο για εύρεση μεγίστων και ελαχίστων, η οποία θεωρείται από κάποιους ως προπομπός μέθοδος της παραγώγου. Για αυτήν του την προσέγγιση κατακρίθηκε από τον Descartes, αφού χρησιμοποίησε μία *απειροστή* ποσότητα με την οποία διαιρούσε θεωρώντας ότι δεν είναι ίση με το 0 και στη συνέχεια την εξίσωνε με 0. Τελικά, η προσέγγιση της εφαπτομένης μπορεί να γίνει από τους μαθητές πριν την εισαγωγή της παραγώγου, ως φυσική συνέπεια της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας, η οποία επιπροσθέτως θα συμβάλλει στην εξέλιξη της έννοιας της εφαπτομένης ως οριακής θέσης μίας τέμνουσας, αποτελώντας μία καλή βάση για την εισαγωγή στην κλίση της εφαπτομένης μέσω της παραγώγου.

Αναφορές

Aarao J., *Tangents without Calculus,* The College Mathematics Journal, vol.31, No.5, 2000, M.A.A.

Biza, I., Christou, C. and Zachariades, T., '*Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis'*, Mathematics Education, 10: 1, 53-70, 2008.

Coolidge J.L., *The Story of Tangents*, The American Mathematical Monthly, vol.58, No.7 (Aug.-Sep. 1951), pp. 449-462, M.A.A.

Lockwood E.H., *A book of curves,* Cambridge, 1961.

Vinner S., "*The role of definitions in the teaching and learning of mathematics",*στο D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*(pp. 65-81) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

Suzuki J., *The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits,* Mathematics Magazine, vol.78, (2005), pp. 339-353, M.A.A.

Struik D., *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών,* Δαίδαλος, 2008.

Ζέρβας Δ., Κισκύρας Ν., *Η εφαπτομένη καμπύλης,* Ευκλείδης Β, τεύχος 4, Μάρτιος – Απρίλιος 1979, σ.184-186, διαθέσιμο και στο http://www.hms.gr/apothema/?s=sa&i=4129, προσπέλαση 04/02/2016.

Σταμάτης Ευάγγελος, *Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία,* Τόμος Ι, Βιβλία 1,2,3,4, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975.