

Πρόβλημα 1: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. 05.01.09

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να υπολογίσετε την παράγωγό της στο $x=0$.
Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} γιατί είναι το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R} . Η $g(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 2x$. Η $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Για $x \neq 0$, έχουμε $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Για $x = 0$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παράγωγου: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$, αφού $h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \in [-|h|, |h|]$ και $|h| \rightarrow 0$.
Άρα, f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f'(0) = 0$.