

Πρόβλημα 1: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

Εάν $x \in \mathbb{Z}$, τότε $f(x) = x^2$.
Εάν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, τότε $f(x) = f(\lfloor x \rfloor) + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
Παραδείγματα: $f(1.5) = 1 + 0.5^2 = 1.25$, $f(2.2) = 4 + 0.2^2 = 4.04$, $f(-1.1) = 1 + 0.1^2 = 1.01$.
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του \mathbb{R} .
Επιπλέον, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του \mathbb{R} και βρείτε την παράγωγό της.