Μάθε να συγκεντρώνεσαι στις λύσεις...όχι στα προβλήματα!.............

222 Επιλεγμένα Λυμένα Θέματα

Σώλος Γιάννης

1. **Αν η εξίσωση** $z^3+(2i-1)z^2+(i-1)z-6-2i=0$ **έχει μια φανταστική ρίζα να βρεθούν οι ρίζες της.**

Έστω η φανταστική ρίζα αi με $\alpha\neq 0$. Τότε $(\alpha i)^3+(2i-1)(\alpha i)^2+(i-1)\alpha i-6-2i=0$

$\Leftrightarrow -\alpha^3 i-\alpha^2(2i-1)+\alpha i(i-1)-6-2i=0$

$\Leftrightarrow -\alpha^3 i-2\alpha^2 i+\alpha^2-\alpha-\alpha i-6-2i=0$

$\Leftrightarrow (-\alpha^3-2\alpha^2-\alpha-2)i+(\alpha^2-\alpha-6)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^3-2\alpha^2-\alpha-2=0 \ \ (1) \\ \alpha^2-\alpha-6=0 \ \left\langle \begin{array}{l}\alpha=3\\ \alpha=-2\end{array}\right. \end{cases}$$

1	2i-1	i-1	-6-2i	
	-2i	2i	6+i	-2i
1	-1	3i-1	0	

Για α=3 αδύνατη η (1) απορρίπτεται
Για α=-2 ισχύει η (1) δεκτή
Άρα η μία ρίζα ο $-2i$

Τότε $(\varepsilon)\Leftrightarrow (z+2i)(z^2-z+3i-1)=0\Leftrightarrow \begin{cases} z=-2i \\ z^2-z+3i-1=0\end{cases}$

$\Delta=1-4(3i-1)=1-12i+4=5-12i$

Έστω ότι ο $x+yi$ μια τετραγωνική ρίζα του $5-12i$

Τότε $(x+yi)^2=5-12i\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=5-12i\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=5 \ (2) \\ 2xy=-12 \ \ \ (3)\end{cases}$

$(3)\Leftrightarrow y=-\dfrac{6}{x}$ $\qquad (2)\Leftrightarrow x^2-\left(-\dfrac{6}{x}\right)^2=5\Leftrightarrow x^4-5x^2-36=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-4 \ \ \text{αδύνατη} \\ x^2=9\Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \ \ y=-2 \\ x=-3, \ y=2\end{cases}\end{cases}$$

άρα οι τετραγωνικές ρίζες είναι ο $3-2i$ ή $-3+2i$

$$\text{Τότε } z_{1,2}=\frac{-(-1)\pm(3-2i)}{2}\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1+3-2i}{2}=2-i \\ \dfrac{1-3+2i}{2}=-1+i\end{array}\right.$$

άρα οι ρίζες $\{-2i, 2-i, -1+i\}$

2. **Να λυθεί** $(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$

Τότε $(\varepsilon)\Leftrightarrow z^2+(i-4)z+(5+i)=0$

$\Delta=-5-12i$

Έστω $x+yi$ με $(x+yi)^2=-5-12i\Leftrightarrow\ldots$

Οι τετραγωνικές ρίζες $2-3i$ ή $-2+3i$

$$\text{Τότε } z_{1,2}=\frac{4-i\pm(2-3i)}{2}\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{4-i+2-3i}{2}=3-2i \\ \dfrac{4-i-2+3i}{2}=1+i\end{array}\right. \quad 1 \qquad z, w\in C$$

3. **α. Αν w, εI τότε** $\omega^2 \in IR$

Αν z,wεC με $|z|=|w|\neq 0$ **και** $z\neq w$ **δείξτε ότι:** $\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^2 \in R$ **.**

α. Θα δείξουμε ότι: $\exists\ \lambda\in IR,\ \omega=\lambda i \Rightarrow \omega^2\in IR$

Πράγματι: $\exists\ \lambda\in IR,\ \omega=\lambda i \Rightarrow \omega^2=(\lambda i)^2 \Rightarrow \omega^2=\lambda^2 i^2 \Rightarrow \omega^2=-\lambda^2\in IR$.

β. Σύμφωνα με το α ερώτημα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{z+w}{z-w}\in I \Leftrightarrow \left(\frac{z+w}{z-w}\right)=-\overline{\left(\frac{z+w}{z-w}\right)} \Leftrightarrow \frac{z+w}{z-w}=-\frac{\bar z+\bar w}{\bar z-\bar w} \Leftrightarrow$$

$$(z+w)(\bar z-\bar w)=-(z-w)(\bar z+\bar w) \Leftrightarrow z\bar z+w\bar z-z\bar w-w\bar w=-z\bar z+w\bar z-z\bar w+w\bar w$$

$$\Leftrightarrow |z|^2-|w|^2+w\bar z-z\bar w=|w|^2-|z|^2+\bar w z-z\bar w \overset{|z|=|w|}{\Leftrightarrow} w\bar z-z\bar w=w\bar z-z\bar w$$

που φανερά ισχύει και επομένως: $\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^2\in IR$.

4. **Αν** $z,w\in C$ **, δείξτε ότι η εξίσωση:** $x^2+4|z|x-4\left[|w|^2+(z\bar w+\bar z w)\right]=0$ **έχει ρίζες πραγματικές.**

Φανερά αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα της (1) είναι μη αρνητική.

Πράγματι: $\Delta=16|z|^2+16\left[|w|^2+(z\bar w+\bar z w)\right]=16\left[|z|^2+|w|^2+z\bar w+\bar z w\right]$

$=16\,(z\bar z+w\bar w+z\bar w+\bar z w)=16\left[\bar z\,(z+w)+\bar w(z+w)\right]$

$=16\,(z+w)\,(\bar z+\bar w)=16\,(z+w)\,\overline{(z+w)}=16|z+w|^2\geq 0$

και επομένως η (1) έχει πραγματικές ρίζες.

5. **Αν** $f:C^*\to C$ **με** $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ **και** $\arg z=\theta\neq\kappa\pi$**,** $\forall\ \kappa\in Z$ **να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού z, όταν:** $\mathrm{Im}(f(z))=0$

Είναι: $z=|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ και επομένως:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)+\frac{1}{|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}\right]=\frac{1}{2}\left\{|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)+\frac{1}{|z|}\left[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[|z|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)+\frac{1}{|z|}(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(|z|+\frac{1}{|z|}\right)\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{1}{2}\left(|z|-\frac{1}{|z|}\right)i\eta\mu\theta \quad (1)$$

Επειδή τώρα $\mathrm{Im}(f(z))=0$, από την (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\left(|z|-\frac{1}{|z|}\right)\eta\mu\theta=0 \underset{\forall\,\kappa\in Z}{\overset{\theta\neq\kappa\pi}{\Leftrightarrow}} |z|-\frac{1}{|z|}=0 \Rightarrow |z|^2-1=0 \Rightarrow |z|=1$$

6. **Για ποιο ελάχιστο** $\nu \in N^*$ **είναι ο** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{\nu} \in IR$ **.**

Θα γράψω τους μιγαδικούς σε τριγωνομετρική μορφή.

$1+i\sqrt{3}$, α=1, $\beta=\sqrt{3}$, $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\rho}=\dfrac{1}{2}>0 \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\rho}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \qquad 1+i\sqrt{3}=2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\,\eta\mu\frac{\pi}{3}\right]$$

$1-i$, α=1, β=-1, $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\rho}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\rho}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4} \quad 1-i=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Τότε $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\dfrac{2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right]}{\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{7\pi}{12}+i\eta\mu\dfrac{7\pi}{12}\right]$

Ο $z^{\nu}=\sqrt{2^{\nu}}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{7\nu\pi}{12}+i\eta\mu\dfrac{7\nu\pi}{12}\right]$

Επειδή $z^{\nu}\in IR \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{7\nu\pi}{12}=0 \Leftrightarrow \dfrac{7\nu\pi}{12}=\kappa\pi$

$\Leftrightarrow \nu=\dfrac{12\kappa}{7}$ / $\kappa\in Z$

άρα ν=12

7. **Ποιος ο μιγαδικός z για τον οποίο** $|z-1-i|=|z+1+i|$ **και** $Arg(z+3-\sqrt{3}-2i)=\dfrac{5\pi}{6}$

Πρέπει $|z-1-i|=|z+1+i| \Leftrightarrow |z-(1+i)|=|z-(-1-i)| \Leftrightarrow (MA)=(MB)$ όπου $M(x,y)$ η εικόνα του $z=x+yi$, A(1,1) η εικόνα του 1+i και B(-1,-1) η εικόνα του –1-i.

Άρα το Μ στη μεσοκάθετο του ΑΒ είναι η διχοτόμος 2ου, 4ου τεταρτημορίου, άρα $y=-x$ και $z=x-xi$.

Ο $z+3-\sqrt{3}-2i=x-xi+3-\sqrt{3}-2i=(x+3-\sqrt{3})+(-x-2)i$ απεικονίζεται στο $N(x+3-\sqrt{3},-x-2)$

$\varepsilon\varphi\, Arg(z+3-\sqrt{3}-2i)=\varepsilon\varphi\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \dfrac{-x-2}{x+3-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3} = x + 3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)x = 3\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$\Leftrightarrow x = -3$ Τότε $z = -3 + 3i$

8. **Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) όταν ο μιγαδικός z ικανοποιεί την σχέση** $\ell og_{1/2}|z-2i| \geq \ell og_{1/2} 2|z|$

Έστω $z = x + yi$

Τότε $|z-2i| \leq 2|z| \Leftrightarrow |z-2i|^2 \leq 4|z|^2 \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 \geq \left(\sqrt{8}\right)^2$

Άρα ο γ.τ. του $M(x, y)$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο K(0,-2) και ακτίνα $\sqrt{8}$.

9. **Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης** $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$ **, αν για τον μιγαδικό z ισχύει** $z\bar{z} + (2+2\sqrt{3}\,i)\,z + (2-2\sqrt{3}\,i)\,\bar{z} + 12 = 0$ **.**

Έστω $z = x + yi$

Πρέπει $z\bar{z} + (2+2\sqrt{3}\,i)\,z + (2-2\sqrt{3}\,i)\,\bar{z} + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}\,y + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + \left[y^2 - 4\sqrt{3}\,y + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \right] = 4$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2$

Άρα η εικόνα του z το $M(x, y)$ στον κύκλο κέντρου $K\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, ακτίνας 2.

Αν OA, OB οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο, είναι $OA \perp xx'$ τότε

$x\hat{O}A \leq x\hat{O}M \leq x\hat{O}B \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}\, z \leq x\hat{O}B$ (1)

Έστω $OB : y = \lambda x$

Η OB εφάπτεται του κύκλου, άρα το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μοναδική λύση άρα $\begin{cases} y = \lambda x \\ (x+2)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(\lambda x - 2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + 1\right)x^2 + \left(4 - 4\sqrt{3}\,\lambda\right)x + 12 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \ldots \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad OB : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\varepsilon\varphi\, x\hat{O}B = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x\hat{O}B = \frac{5\pi}{6}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}\, z \leq \frac{5\pi}{6}$

Άρα το σύνολο τιμών $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

10. **Αν** $\arg z = -\frac{53\pi}{6}$ **να υπολογιστεί το** $\operatorname{Arg} z$**.**

Είναι $\arg z = 2\kappa\pi + \operatorname{Arg} z \Leftrightarrow -\frac{53\pi}{6} - 2\kappa\pi = \operatorname{Arg} z$ (1)

Είναι $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi \Leftrightarrow 0 \le -\frac{53\pi}{6} - 2\kappa\pi < 2\pi$

$\Leftrightarrow 0 \ge +53 + 12\kappa > -24 \Leftrightarrow -\frac{53}{12} \ge \kappa > -\frac{77}{12}$

Επειδή $\kappa \in Z$ άρα κ=-5

Τότε (1) $\Rightarrow \operatorname{Arg} z = -\frac{53\pi}{6} - 2\cdot(-5)\pi = -\frac{53\pi}{6} + 10\pi = \frac{7\pi}{6}$

Άρα $\operatorname{Arg} z = \frac{7\pi}{6}$

11. **Να βρεθούν τα** $\alpha, \kappa, \beta, \rho \in IR$ **αν f(x)=** $\begin{cases} \frac{x^2+x+\kappa}{x-2}, x<2 \\ \alpha+p+\beta, x=2 \\ \frac{4x+\alpha x-p}{x-2}, x>2 \end{cases}$ **είναι συνεχής στο x=2.**

Για να είναι η f συνεχής στο x=2 πρέπει $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ (1)

Αν x<2 $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$, $\lim_{x\to 2}(x^2+x+\kappa) = 6+\kappa$

Αν $6+\kappa \ne 0$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \pm\infty$ ή δεν υπάρχει άτοπο άρα $6+\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -6$

και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$

Αν x>2 , $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$, $\lim_{x\to 2}(4x+\alpha x-\rho) = 8+2\alpha-\rho$

Αν $8+2\alpha-\rho \ne 0$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \pm\infty$ ή δεν υπάρχει άτοπο άρα $8+2\alpha-\rho = 0$ (2)

και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x+ax-p}{x-2} = 4+a$

(1) $\Leftrightarrow$ 4+α=5 $\Leftrightarrow$ α=1, (2) $\Leftrightarrow$ ρ=10, (1) $\Leftrightarrow$ α+ρ+β=5 $\Leftrightarrow$ β=-6.

12. **Να υπολογιστεί** $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+6x^2+1} - \sqrt{x^2+6x+2}\right]$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+6x^2+1} - \sqrt{x^2+6x+2}\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2+1} - x\right) + \left(x - \sqrt{x^2+6x+2}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+6x^2+1-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}\cdot x+x^2}+\frac{x^2-x^2-6x-2}{x+\sqrt{x^2+6x+2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}+\frac{x\left(-6-\frac{2}{x}\right)}{x\left[1+\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}\right]}\right]=\frac{6}{1+1+1}+\frac{-6}{1+1}=2-3=-1$$

13. **Να υπολογιστεί** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha^{2x}+3\cdot 4^x}{\alpha^{2x+3}+3\cdot 4^{x+1}}$ **για κάθε** $\alpha\in IR$ **.**

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha^{2x}+3\cdot 4^x}{\alpha^{2x+3}+3\cdot 4^{x+1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\alpha^2\right)^x+3\cdot 4^x}{\left(\alpha^2\right)^x\cdot\alpha^3+12\cdot 4^x}$ (1)

- αν $\alpha^2<4\Leftrightarrow -2<\alpha<2$

$(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x+3}{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x\cdot\alpha^3+12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\quad(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+3\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x}{\alpha^3+12\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x}=\frac{1}{\alpha^3}$

- αν $\alpha^2>4\Leftrightarrow\alpha\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\Rightarrow\frac{4}{\alpha^2}<1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+3\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x}{\alpha^3+12\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x}=\frac{1}{\alpha^3}$, $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x+3}{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x\cdot\alpha^3+12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

- αν α=2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4^x+3\cdot 4^x}{8\cdot 4^x+12\cdot 4^x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4\cdot 4^x}{20\cdot 4^x}=\frac{1}{5}$

- αν α=-2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4^x+3\cdot 4^x}{-8\cdot 4^x+12\cdot 4^x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4\cdot 4^x}{4\cdot 4^x}=1$

14. **Δίνεται** $f(x)=\sqrt{x^2+(\beta^2-8\beta)x+2001}+x$ **, αν** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=6+\frac{\alpha^2}{2}$ **να βρεθεί ο γ.τ. του Μ(α, β). Ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης g με** $g(\theta)=Arg(z)$ **όπου** $z=\alpha+\beta i$ **.**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+(\beta^2-8\beta)x+2001-x^2}{\sqrt{x^2+(\beta^2-8\beta)x+2001}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\beta^2-8\beta+\frac{2001}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{\beta^2-8\beta}{x}+\frac{2001}{x^2}}-1\right)}$$

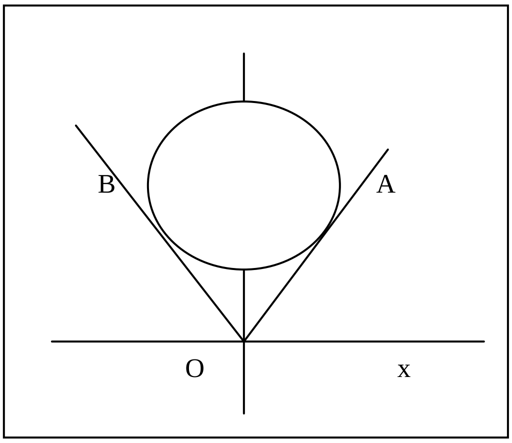
$$=\frac{\beta^2-8\beta}{-1-1}=\frac{\beta^2-8\beta}{-2}$$

Πρέπει $\frac{\beta^2-8\beta}{-2}=6+\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-8\beta+12=0\Leftrightarrow\alpha^2+(\beta-4)^2=4$

Άρα το Μ(α, β) ανήκει σε κύκλο με κέντρο Κ(0,4) και ακτίνα 2.

Η εικόνα Μ του $z=\alpha+\beta i$ βρίσκεται στον παραπάνω κύκλο. Αν ΟΑ, ΟΒ οι εφαπτόμενες τότε $x\hat{O}A\le x\hat{O}M\le x\hat{O}B\Rightarrow x\hat{O}A\le Arg(z)\le x\hat{O}B$ (1)

Έστω ΟΑ: $y=\lambda x$ εφάπτεται του $x^2+(y-4)^2=4$ τότε το σύστημα των εξισώσεων έχει μοναδική λύση $\begin{cases} y=\lambda x \\ x^2+(y-4)^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=\pm\sqrt{3}$



ΟΑ: $y=\sqrt{3}x\quad \varepsilon\varphi x\hat{O}A=\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Rightarrow x\hat{O}A=\frac{\pi}{3}$

ΟΒ: $y=-\sqrt{3}x\quad \varepsilon\varphi x\hat{O}B=-\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x\hat{O}B=\frac{2\pi}{3}$

$(1)\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le Argz\le\frac{2\pi}{3}$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

15. **Έστω $z=\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$ να γραφεί στην μορφή α+βi και στη συνέχεια σε τριγωνομετρική μορφή. Να βρείτε τον ελάχιστο $\nu\in N^*$ για τον οποίο ο z^ν είναι αρνητικός πραγματικός.**

Εχουμε $z=\ldots=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

Τότε

$$z=\frac{\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{4}+i\eta\mu\frac{-\pi}{4}\right]}{2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right]}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-7\pi}{12}+i\eta\mu\frac{-7\pi}{12}\right]$$

$$z^\nu=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\nu\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-7\pi\nu}{12}+i\eta\mu\frac{-7\pi\nu}{12}\right]$$

Επειδή $z^\nu\in R^-\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\frac{-7\pi\nu}{12}<0\\ \eta\mu\frac{-7\pi\nu}{12}=0\Leftrightarrow\frac{-7\pi\nu}{12}=2\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow\nu=\frac{-24\kappa-12}{7}=\frac{-12(2\kappa+1)}{7}\end{cases}$

Επειδή $\nu \in N^*$ ο κ αρνητικός ακέραιος και ο 2κ+1 πολλαπλάσιο του 7.

κ=-1 $\rightarrow$ $\nu = \frac{12}{7}$ απορ.

κ=-2 $\rightarrow$ $\nu = \frac{36}{7}$ απορ.

κ=-3 $\rightarrow$ $\nu = \frac{60}{7}$ απορ.

κ=-4 $\rightarrow$ ν=12 ο ελάχιστος φυσικός.

16. **Ποιος ο μιγαδικός z για τον οποίο $|z+2i| = |z-2|$ και Arg(z+2)=Arg(z+i) και ποιος ο w αν $|w-i| = \left|w - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right|$ και $\mathrm{Arg}(w-i) = \mathrm{Arg}\left(w - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right) + \frac{\pi}{3}$. Ν γραφεί ο $\frac{z}{w}$ σε κανονική μορφή και δείξτε ότι $\left(\frac{z}{w}\right)^9 \in I$.**

Επειδή $|z+2i| = |z-2| \Leftrightarrow (MK) = (M\Lambda)$, όπου M(x,y) η εικόνα του $z = x + yi$,
K(0,-2) η εικόνα του –2i και Λ(2,0) η εικόνα του 2 τότε το M στη μεσοκάθετο του ΚΛ που είναι η y=-x.
Αν Α, Β οι εικόνες των z+2, z+i επειδή Arg(z+2)=Arg(z+i)
$\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ομόρροπα άρα $\exists$ λ>0: $\vec{OA} = \lambda \vec{OB} \Rightarrow z + 2 = \lambda(z+i)$

$$\Leftrightarrow x + yi + 2 = \lambda(x + yi + i) \Leftrightarrow x - xi + 2 = \lambda(x - xi + i) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \lambda x \ (1) \\ -x = -\lambda x + \lambda \ (2) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow \lambda = 2$, (1) $\Leftrightarrow$ x=2, y=-2 άρα z=2-2i

Επειδή $|w-i| = \left|w - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right|$ και $\mathrm{Arg}(w-i) = \mathrm{Arg}\left(w - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right) + \frac{\pi}{3}$ είναι

$$w - i = \left(w - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \overset{x+yi}{\Leftrightarrow} (x + yi - i) = \left(x + yi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ldots \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ άρα } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Τότε $\frac{z}{w} = \ldots = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

και

$$\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{4} + i\eta\mu\frac{-\pi}{4}\right]}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-5\pi}{6} + i\eta\mu\frac{-5\pi}{6}\right]$$

Τότε

$$\left(\frac{z}{w}\right)^9 = (2\sqrt{2})^9 \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\frac{-15\pi}{2} + i\eta\mu\frac{-15\pi}{2}\right] = (2\sqrt{2})^9\left[\sigma\upsilon\nu\left(6\pi + \frac{3\pi}{2}\right) - i\eta\mu\left(6\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \left(2\sqrt{2}\right)^9 i \in I$$

17. **Δίνεται ο μιγαδικός** $w=8+6i$ **που απεικονίζεται στο Α και οι μιγαδικοί u και v που απεικονίζονται στο Β και Γ αντίστοιχα με το Γ στο τέταρτο τεταρτημόριο. Αν το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο να βρεθούν οι μιγαδικοί u και v και αν** $10(z-2i)^{2004}=v\,(z+2i)^{2004}$ **να δείξτε ότι ο z είναι πραγματικός.**

Επειδή $A\hat{O}\Gamma=90^o$ και (ΟΑ)=(ΟΓ) είναι w=iv γιατί η εικόνα του w το Α προκύπτει με στροφή κατά 90ο σε σχέση με την εικόνα του v τότε $v=\frac{w}{i}=\frac{8+6i}{i}=\frac{8i-6}{-1}=6-8i$

άρα Γ(6,-8) και Α(8,6).

Αν Μ το μέσο του ΑΓ τότε Μ(7,-1) που είναι το μέσο του ΟΒ

Τότε $7=\frac{0+x_B}{2}\Leftrightarrow x_B=14 \quad -1=\frac{0+y_B}{2}\Leftrightarrow y_B=-2$ άρα Β(14,-2) και u=14-2i

Έχουμε $10(z-2i)^{2004}=v(z+2i)^{2004}$

$\Rightarrow\left|10(z-2i)^{2004}\right|=|6-8i|\left|(z+2i)^{2004}\right|$

$\Leftrightarrow 10|z-2i|^{2004}=10|z+2i|^{2004}$

$\Leftrightarrow |z-2i|=|z+2i|\Leftrightarrow(MK)=(M\Lambda)$

όπου Μ η εικόνα του z , Κ(0,2) η εικόνα του 2Ι, Λ(0,-2) η εικόνα του –2i

Άρα το Μ στη μεσοκάθετο του ΚΛ που είναι ο x΄x. Άρα ο z πραγματικός.

18. **Να βρεθούν τα** $\alpha,\beta\in C$ **ώστε η εξίσωση** $z^2+\alpha z-\alpha\beta=0$ **να έχει ρίζα τους** $z_1=-1-\sqrt{3}i$ **και** $\beta=|z_1|$**. Αν z_2 η άλλη ρίζα τότε** $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=-2^{\nu}\eta\mu\frac{\nu\pi}{3}$ / $\nu\in N^*$ **Να βρεθεί ο** $\kappa\in IR$ **ώστε η συνάρτηση** $f(x)=x^3+\beta x^2+5\kappa^2x-\kappa$ **$I_M(\alpha)$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0=1 το** $2-2\sqrt{3}$

Ο $z_1=-1-\sqrt{3}i$ ρίζα τότε $\beta=|z_1|=2$ τότε $S=-\frac{\alpha}{1}=-\alpha=z_1+z_2\Leftrightarrow-\alpha=-1-\sqrt{3}i+z_2$ (1)

$P=\frac{-2\beta}{1}=-2\beta=-4=z_1\cdot z_2\Leftrightarrow-2=(-1-\sqrt{3}i)z_2\Leftrightarrow z_2=\frac{-4}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{-4(-1+\sqrt{3}i)}{1+3}$

$\Leftrightarrow z_2=1-\sqrt{3}i$

Τότε (1) $\Leftrightarrow-\alpha=-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i\Leftrightarrow\alpha=2\sqrt{3}i$

$z_1=-1-\sqrt{3}i=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z_2=1-\sqrt{3}i=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ Τότε $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=\ldots=-2^{\nu}\eta\mu\frac{\nu\pi}{3}$

$I_M(\alpha)=2\sqrt{3} \quad f(x)=x^3-4x^2+5\kappa^2x-2\sqrt{3}\kappa \quad f'(x)=3x^2-8x+5\kappa^2$

Στο x_0=1 τοπικό ακρότατο το $-2\sqrt{3}$ τότε

$f'(1)=0\Leftrightarrow 3-8+5\kappa^2=0\Leftrightarrow\kappa=\pm1$

$f(1)=2-2\sqrt{3}\Rightarrow 1-4+5\kappa^2-2\sqrt{3}\kappa=2-2\sqrt{3}\Leftrightarrow-3+5\kappa^2-2\sqrt{3}\kappa=2-2\sqrt{3}$ (2)

Για κ=1 η (2) $\Leftrightarrow 2-2\sqrt{3}=2-2\sqrt{3}$ ισχύει δεκτή η κ=1

Για κ=-1 η (2) $\Leftrightarrow 2+2\sqrt{3}=2-2\sqrt{3}$ άτοπο απορ. η κ=-1

19. **Έστω Α, Β δύο μύγες που κινούνται πάνω στο επίπεδο και είναι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει $z=(-\sqrt{3}+i)\,w$. Αν η μύγα Α κινείται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνας 8 δείξτε ότι $z^6=-2^6 w^6$. Να βρεθεί που κινείται η μύγα Β. Να δείξτε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο μυγών είναι συνεχής σταθερή. Όταν η μύγα Α βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Oy΄ ποια η θέση της Β;**

Είναι $|z|=8$ και $-\sqrt{3}+i=2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right]$ τότε $z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)w\Rightarrow$

$\Rightarrow z^6=2^6[\sigma\upsilon\nu 5\pi+i\eta\mu 5\pi]w^6\Rightarrow z^6=2^6[\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi]w^6\Rightarrow z^6=-2^6 w^6$

$z=(-\sqrt{3}+i)\,w\Rightarrow|z|=\left|-\sqrt{3}+i\right||w|\Leftrightarrow 8=2|w|\Leftrightarrow|w|=4$, άρα η Β σε κύκλο κέντρου Ο(0,0), ακτίνας 4.

$(AB)=|z-w|=\left|\left(-\sqrt{3}+i\right)w-w\right|=|w|\cdot\left|-\sqrt{3}+i-1\right|=4\cdot\left|-1-\sqrt{3}+i\right|=4\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+1^2}$ σταθερή

Όταν z=βi με β<0

$|z|=8\Leftrightarrow|\beta i|=8\Leftrightarrow\beta=\pm 8$, άρα β=-8, z=-8i

$z=\left(-\sqrt{3}+i\right)w\Leftrightarrow -8i=\left(-\sqrt{3}+i\right)w\Leftrightarrow w=\dfrac{-8i}{-\sqrt{3}+i}$

$\Leftrightarrow w=\dfrac{-8i\left(-\sqrt{3}-i\right)}{3+1}=\dfrac{-8\left(-\sqrt{3}i+1\right)}{4}=-2+2\sqrt{3}i$ στη θέση $B\left(-2,2\sqrt{3}\right)$.

20. **Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\vec{OA}$ η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού z και $\vec{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $u=z\cdot w^2$ όπου $w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. Να δείξτε ότι $w^3=i$, $u^3=-z^3$, $u^2+z^2=uz$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.**

Είναι $w=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}$, $w^3=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}=i$

$u^3=\left(zw^2\right)^3=z^3w^6=z^3(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)=-z^3$

$u^3=-z^3\Leftrightarrow u^3+z^3=0\Leftrightarrow(u+z)\cdot(u^2-uz+z^2)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+z=0 \text{ άτοπο}\\ u^2-uz+z^2=0\Leftrightarrow u^2+z^2=uz\end{cases}$$

αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, $w^2=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}$

$u=zw^2=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)=\rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

και $|u|=\left|zw^2\right|=|z|\cdot|w|^2=|z|\cdot 1^2=|z|$

τότε (ΟΑ)=(ΟΒ) και $A\hat{O}B=\frac{\pi}{3}$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

21. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(z)=\dfrac{3z-i}{i-2\overline{z}}$ $z\in C$ **με** $z\neq -\dfrac{i}{2}$**. Να βρεθεί ο** $w=f(5+2i)$ **και ο** $u=\left[f(5+2i)\right]^{2004}\in IR$**.**

Είναι $w=f(5+2i)=...=-1-i=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$u=\left[\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{4}+i\eta\mu\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^{2004}=\left(\sqrt{2}\right)^{2004}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu 2505\pi+i\eta\mu 2505\pi\right]$

$=2^{1002}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi\right]=-2^{1002}\in IR$.

22. **Δίνεται η εξίσωση** $z^2+\alpha z+\beta=0$ **με** $\alpha,\beta\in IR$ **που έχει ρίζα τον** $w=-1+\sqrt{3}i$ **και η συνάρτηση** $f(x)=e^x+3x^\beta+x^\alpha-2004$ **να δείξτε ότι η f΄ έχει μοναδικό σημείο που μηδενίζεται.**

Επειδή η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές και μια ρίζα της είναι ο $-1+\sqrt{3}i$, η άλλη ρίζα $-1-\sqrt{3}i$.

Τότε $S=-\dfrac{\alpha}{1}=-\alpha=(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)\Leftrightarrow-\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=2$

$P=\dfrac{\beta}{1}=\beta=(-1+\sqrt{3}i)\cdot(-1-\sqrt{3}i)=1+3=4$

Τότε $f(x)=e^x+3x^4+x^2-2004$

$f'(x)=e^x+12x^3+2x$

$f''(x)=e^x+36x^2+2>0\Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα, άρα f΄ ¨1-1¨.

Είναι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(12x^3+2x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

Είναι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(12x^3+2x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ $\exists$ Α>0: $f'(A)>0$

και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ $\exists$ Β<0: $f'(B)<0$

Επειδή $f'(A)\cdot f'(B)<0$ $\exists\,\rho\in(B,A)$: f΄(ρ)=0 και επειδή η f΄ ¨1-1¨ ο ρ μοναδικός.

23. **Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(z) του επιπέδου για τους οποίους** $|z-4-2i|=|z+2i|$ **. Ποιος από αυτούς τους μιγαδικούς έχει το ελάχιστο μέτρο και αν Ν η εικόνα του και Κ η εικόνα του μιγαδικού που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με** $f(x)=3(\lambda-1)x^2-4\lambda x+\lambda+\alpha$ **, όπου** $\alpha,\lambda\in IR$ **συμμετρικό του Ν ως προς** $\Sigma\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$ **να δείξτε ότι υπάρχει** $\rho\in(0,1)$ **: f(ρ)=0.**

$|z-4-2i|=|z+2i| \Leftrightarrow |z-(4+2i)|=|z-(-2i)|$ (1)
Αν Μ η εικόνα του Ζ, Α(4,2) η εικόνα του 4+2i και Β(0,-2) η εικόνα του –2i (1) $\Leftrightarrow$ (ΜΑ)=(ΜΒ), άρα το Μ στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
Π μέσο ΑΒ $\Rightarrow$ Π(2,0)

$$\lambda_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2+2}{4-0}=1$$

$\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$ ε: $y-0=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+2$

Έστω $ON \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{ON}=1$, ΟΝ: y=x

Οι συντεταγμένες του Ν $\begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \Leftrightarrow x=1,\ y=1 \end{cases}$

άρα Ν(1,1) και ο μιγαδικός που ανήκει στον παραπάνω γ.τ. και έχει το ελάχιστο μέτρο ο 1+i

επειδή $\Sigma\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ τότε το Κ(1,-2).

Το $K \in C_f \Leftrightarrow f(1)=-2 \Leftrightarrow 3\lambda^{-3}-4\lambda+\lambda+\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=1$

Τότε $f(x)=3(\lambda-1)x^2-4\lambda x+\lambda+1$

Έστω η g με $g(x)=(\lambda-1)x^3-2\lambda x^2+\lambda x+x$ στο [0,1]

Είναι $g'(x)=3(\lambda-1)x^2-4\lambda x+\lambda+1=f(x)$

και $g(0)=0=g(1)$

Εφαρμόζεται στην g το Θ. Rolle στο [0,1]

$\exists\ \rho \in (0,1):\ g'(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=0$.

24. **Να βρεθεί ο γ.τ. του M(z) για τον οποίο $|z-4i|=2$. Ποιοι από αυτούς έχει το μέγιστο και ελάχιστο μέτρο; Ποια η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του Argz;**

Είναι $|z-4i|=2 \Leftrightarrow (MK)=2$ όπου Μ η εικόνα του z και Κ(0,4) η εικόνα του 4i, τότε ο γ.τ. του M(z) είναι ο κύκλος κέντρου Κ ακτίνας 2.
Οι μιγαδικοί που ανήκουν στον παραπάνω γ.τ. και έχουν το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αντίστοιχα είναι ο 2i και ο 6i.
Αν ΟΑ, ΟΒ οι εφαπτόμενες από το Ο στον κύκλο, τότε στο τρίγωνο ΟΚΑ η υποτείνουσα είναι διπλάσια της κάθετης,

άρα $A\hat{O}K=\frac{\pi}{6} \Rightarrow X\hat{O}A=\frac{\pi}{3}$ και $X\hat{O}B=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

Τότε $X\hat{O}A \le Argz \le X\hat{O}B \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le Argz \le \frac{2\pi}{3}$, άρα η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της Argz είναι το $\frac{\pi}{3}$ και το $\frac{2\pi}{3}$.

25. **Να βρεθεί ο γ.τ. του M(z) αν $\left|\frac{z-i}{z+1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Αν N(α,β) σημείο του παραπάνω τόπου να δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό** $\rho\in(0,1)$
$6(\alpha-3)^2\rho^{2001}+5(\beta-4)^2\rho^{1821}=119$.

Έστω $\left|\frac{z-i}{z+1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2|z-i|=\sqrt{3}|z+1|\Leftrightarrow 4(z-i)(\bar{z}+i)=3(z+1)(\bar{z}+1)$
$\Leftrightarrow z\bar{z}+4i(z-\bar{z})-3(z+\bar{z})+1=0$ αν z=x+yi
$x^2+y^2-8y-6x+1=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=24$
Άρα η εικόνα του z το M(x,y) σε κύκλο κέντρου K(3,4) και ακτίνας $\sqrt{24}$
Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=6(\alpha-3)^2x^{2001}+5(\beta-4)^2x^{1821}-119$ ορισμένη στο [0,1].
Η f συνεχής στο [0,1].
Το N(α,β) ανήκει στον παραπάνω τόπο, άρα $(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2=24$ (1)
f(0)=-119<0
$f(1)=6(\alpha-3)^2+5(\beta-4)^2-119=(\alpha-3)^2+5\left[(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2\right]-119$
$\overset{(1)}{=}(\alpha-3)^2+5\cdot24-119=\alpha^2-6\alpha+9+120-119=\alpha^2-6\alpha+10>0$ γιατί Δ<0
άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ τότε $\exists\,\rho\in(0,1):$
$f(\rho)=0\Leftrightarrow\ldots\quad 6(\alpha-3)^2\rho^{2001}+5(\beta-4)^2\rho^{1821}=119$
Επειδή $f'(x)=6\cdot2001(\alpha-3)^2x^{2000}+5\cdot1821(\beta-4)^2x^{1820}>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα
$\Rightarrow f$ ¨1-1¨ η παραπάνω ρίζα μοναδική.

26. **Να βρεθεί ο μιγαδικός z για τον οποίο $z=|z|-2+i(1-|z|)$. Έστω z_1, z_2 οι παραπάνω μιγαδικοί και $I_M(z_2)\neq0$. Ένα κουνούπι ξεκινά από το A(z_1) και κινείται ευθύγραμμα και ομαλά στο B(z_2) σε χρόνο $t_0=4\sec$. Να βρεθεί η ταχύτητα του κουνουπιού. Την τυχαία χρονική στιγμή t όπου $t\in[0,4]$ το κουνούπι βρίσκεται στη θέση M(z) να βρεθούν τα $R_e(z)$, $I_M(z)$ συναρτήσει του t.**

Είναι $z=|z|-2+i(1-|z|)\Rightarrow|z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(1-|z|)^2}$
$\Leftrightarrow|z|^2=|z|^2-4|z|+4+1-2|z|+|z|^2$
$\Leftrightarrow 0=|z|^2-6|z|+5\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1, & z=-1\\ |z|=5, & z=3-4i\end{cases}$
Είναι $z_1=-1$ και $z_2=3-4i$ και A(-1,0), B(3,-4)
Τότε $\upsilon=\frac{(AB)}{t_0}=\frac{|z_1-z_2|}{4}=\frac{|-1-3+4i|}{4}=\frac{|-4+4i|}{4}=|-1+i|=\sqrt{2}$
Έστω z=x+yi η εικόνα του M(x,y)
Αν t ο χρόνος της διαδρομής AM τότε
$(AM)=\upsilon t\Leftrightarrow(AM)^2=\left(\sqrt{2}\,t\right)^2\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=2t^2$ (1)
Επειδή A, B, M συνευθειακά $\lambda_{AM}=\lambda_{AB}\Leftrightarrow\frac{y-0}{x+1}=\frac{-4-0}{3+1}\Leftrightarrow y=-x-1$ (2)
(1) $\Leftrightarrow(x+1)^2+(-x-1)^2=2t^2\Leftrightarrow x=t-1$ y=-t

άρα $R_e(z)=t-1$, $I_M(z)=-t$

27. **Δείξτε ότι η εξίσωση** $\frac{\alpha^2}{x-2}+\frac{\beta^2}{x+2}+\frac{\gamma^2}{x}=0$ **με** $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$ **έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (-2,2) και αν** ρ_1, ρ_2 **τότε** $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\gamma^2}$.

Αυτή είναι ισοδύναμη με την $\alpha^2(x^2+2x)+\beta^2(x^2-2x)+\gamma^2(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+(2\alpha^2-2\beta^2)x-4\gamma^2=0$

Έστω η f με $f(x)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+(2\alpha^2-2\beta^2)x-4\gamma^2$ στο [-2,2]

Η f είναι συνεχής στο [-2,2]

$f(0)=-4\gamma^2<0$ $f(2)=8\alpha^2>0$ $f(-2)=4\beta^2>0$

Είναι f(-2)f(0)<0 υπάρχει $\rho_1\in(-2,0)$: $f(\rho_1)=0$

f(0)f(2)<0 υπάρχει $\rho_2\in(0,2)$: $f(\rho_2)=0$

Επειδή η f β΄ βαθμού πράγματι έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (-2,2)

Τότε $S=\rho_1+\rho_2=-\frac{2\alpha^2-2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, $P=\frac{-4\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

Έτσι $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_1\rho_2}=\frac{-\frac{2\alpha^2-2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{-\frac{4\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\gamma^2}$.

28. **Δύο πλοία Α και Β κινούνται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο ώστε την τυχαία χρονική στιγμή** $t\geq 0$ **όπου t ώρες να βρίσκονται στις θέσεις που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z=3t-1+(t+1)i και w=3t+2+(t-3)i αντίστοιχα. Να δείξτε ότι η απόσταση των δύο πλοίων είναι συνεχώς ίδια.**
Να δείξτε ότι το πλοίο Α κινείται πάνω σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.
Να βρεθεί που κινείται το πλοίο Β.
Ποιες οι συντεταγμένες του σημείου ανεφοδιασμού των δύο πλοίων;
Μετά από 20 λεπτά της ώρας που κινήθηκε το πλοίο Α αλλάζει πορεία γράφοντας παραβολή και έχοντας την ευθεία της αρχικής τροχιάς εφαπτόμενη στο σημείο αυτό και παρουσιάζει αυτή ελάχιστο στο $x_0=-\frac{1}{6}$ **ποια η τροχιά της παραβολής;**

Είναι $(AB)=|z-w|=...=|-3+4i|=5$

Αν A(x,y) τότε $\begin{cases}x=3t-1\\ y=t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+1}{3}=t\\ y-1=t\end{cases}$

άρα $\frac{x+1}{3}=y-1\Leftrightarrow x-3y+4=0$ (1) άρα ο A(x,y) ανήκει σε ευθεία με εξίσωση την (1). Αν $A_1(3t_1-1,\ t_1+1)$ και $A_2(3t_2-1,\ t_2+1)$ με $t_1<t_2$ είναι δύο θέσεις του Α στις

χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα τότε

$$\upsilon = \frac{A_1A_2}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{9(t_2-t_1)^2 + (t_2-t_1)^2}}{t^2 - t_1} = \sqrt{10}$$ σταθερή ταχύτητα

Έστω B(x,y) τότε $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = t \\ y+3 = t \end{cases}$

άρα $\frac{x-2}{3} = y+3 \Leftrightarrow x - 3y - 11 = 0$ (2) άρα το B κινείται σε ευθεία με εξίσωση (2)

Επειδή οι (1), (2) ευθείες παράλληλες τα πλοία δεν ανεφοδιάζονται στο ίδιο σημείο. Μετά από 20 λεπτά άρα $t = \frac{1}{3}$ τότε το A(3t-1, t+1) $\Rightarrow A\left(0, \frac{4}{3}\right)$ γράφει παραβολή με εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ και έχει εφαπτομένη την x-3y+4=0 τότε $\lambda = f'(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$ το $A \in C_f \Leftrightarrow f(0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \gamma = \frac{4}{3}$ και επειδή στο

$x_0 = -\frac{1}{6}$ παρουσιάζει ελάχιστο $f'\left(-\frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

άρα η παραβολή έχει εξίσωση $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

29. **Αν** $\alpha = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{8x-4} - \sqrt{6x+3} + x}{x-1}$**,** $\beta = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4 + (x-2)^2 \eta\mu(\frac{2002}{x-2})}{x-2}$ **και η f γνησίως μονότονη με τα A(α,7) και B(β,3) σημεία της γραφικής παράστασης να λυθεί η ανίσωση** $f\left(f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5) - 2\right) \le 7$

Εύκολα $\alpha = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{8x-4} - \sqrt{6x+3} + x}{x-1}$ =2 και $\beta = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4 + (x-2)^2 \eta\mu(\frac{2002}{x-2})}{x-2}$ =4

γιατί $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{x-2} + \frac{(x-2)^2 \eta\mu(\frac{2002}{x-2})}{x-2} \to 4 + 0 = 4$ και $\left|\frac{(x-2)^2 \eta\mu(\frac{2002}{x-2})}{x-2}\right| \le |x-2| \to 0$

Είναι $A \in C_f \Leftrightarrow f(2) = 7$, $B \in C_f \Leftrightarrow f(4) = 3$

Έστω f γνησίως αύξουσα τότε $2 < 4 \Rightarrow f(2) < f(4) \Rightarrow 7 < 3$ άτοπο, άρα η f γνησίως φθίνουσα.

Έχουμε $f\left(f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5) - 2\right) \le 7$

$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5) - 2\right) \le f(2) \Leftrightarrow f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5) - 2 \ge 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5) \ge 4$

$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^3 - 2x^2 - x + 5)\right) \le f(4) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 5 \le 3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) < 0$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

30. **Αν** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$**,** $\alpha=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{x^2}-4}{2-\frac{1}{x}}$**,** $\beta=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+2|-|x-2|}{x^2-x}$**,**

$\gamma=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$ **να βρεθεί το** $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5+\alpha f(x)}-\left|f^2(x)+\beta f(x)\right|}{|f(x)-3|-\frac{1}{\gamma}}$

Εχουμε $\alpha=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{x^2}-4}{2-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\left(\frac{1}{x}-2\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)}{-\left(\frac{1}{x}-2\right)}=...=-4$

$$\beta=\lim_{x\to 0}\frac{|x+2|-|x-2|}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)-(-x+2)}{x(x-1)}=...=-2$$

$$\gamma=\lim_{x\to 2}\left[\frac{2}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-1)-x}{x(x-1)(x-2)}=...=\frac{1}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ τότε f(x)>0 και $f(x)\cong 1$ σε περιοχή κοντά στο 1.

Τότε έχουμε $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-4f(x)}-|f(x)||f(x)-2|}{|f(x)-3|-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-4f(x)}-f(x)[-f(x)+2]}{[-f(x)+3]-2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-4f(x)}+f^2(x)-2f(x)}{1-f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-f^4(x)+4f^3(x)-4f^2(x)-4f(x)+5}{-[f(x)-1]\left[\sqrt{5-4f(x)}-f^2(x)+2f(x)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)-3f^2(x)+f(x)+5}{\sqrt{5-4f(x)}-f^2(x)+2f(x)}=\frac{4}{2}=2$$

31. **Έστω η f με** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-36x}+38\sqrt{x^2-9x}}{\sqrt{x^2-x}} & x<0\\ \dfrac{\eta\mu x\cdot\eta\mu 2x\cdot\ldots\cdot\eta\mu\nu x}{x^\nu} & x>0\end{cases}$

Αν υπάρχει το όριο στο $x_0=0$ **και** $\nu\in N$ **να βρεθούν τα** $\alpha,\beta\in R$ **ώστε** $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\nu$ **όπου** $g(x)=\sqrt{x^2-6x+2}+\alpha x+\beta$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{-x}\left(\sqrt{36-x}+38\sqrt{9-x}\right)}{\sqrt{-x}\sqrt{1-x}}=120$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot 2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot\ldots\cdot\nu\frac{\eta\mu\nu x}{\nu x}\right]=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu=\nu!$$

Επειδή υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow ν!=120 \Leftrightarrow ν=5$

Τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right]$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=-1+\alpha$

- αν $-1+\alpha\neq 0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\pm\infty$ Άτοπο

- άρα $-1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1$ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-6x+2}+x+\beta\right)$

$$=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{x^2-6x+2-x^2}{\sqrt{x^2-6x+2}-x}+\beta\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{x\left(-6+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)}+\beta\right]$$

$$=\frac{-6}{-1-1}+\beta=3+\beta$$

Πρέπει $3+\beta=5\Leftrightarrow \beta=2$, άρα (α, β)=(1,2)

32. **Εστω οι συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισύουν:** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{xf(x)+x-2}{x+2}=4$

$\alpha=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **,** $\beta=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2f(x)+3x^2-x+5}{x^2f(x)+x+1}$ **,** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{x}=\alpha$ **,** $\lim\limits_{x\to +\infty}[g(x)-\alpha x]=2\beta$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)+\mu x-2}{xg(x)-3x^2+x+1}=2$ **,** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+3}{x^2+4}-\kappa x+\lambda\right]=\mu$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\sqrt{4x^2+8x+15}+\rho x+\gamma\right]=\lambda$ **Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον φε(β-ρ,κ):**

$u^2\phi^3+\mu\phi=\kappa u\phi^2+\gamma-\lambda$

Θέτω $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)=4$ με $F(x)=\frac{xf(x)+x-2}{x+2}\Leftrightarrow (x+2)F(x)-x+2=xf(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)}{x}F(x)-\frac{x-2}{x}=f(x)$$

Τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{x+2}{x}F(x)-\frac{x-2}{x}\right]=3$ γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x}=1=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-2}{x}$ άρα α=3

$\beta=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2f(x)+3x^2-x+5}{x^2f(x)+x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2\left[f(x)+3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right]}{x^2\left[f(x)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}=2$ Άρα β=2

Τότε $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}[g(x)-3x]=4$

Ετσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\mu x-2}{xg(x)-3x^2+x+1}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left[\frac{g(x)}{x}+\mu-\frac{2}{x}\right]}{x\left[g(x)-3x+1+\frac{1}{x}\right]}=2\Leftrightarrow\frac{3+\mu}{4+1}=2\Leftrightarrow\mu=7$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x^2+3}{x^2+4}-\kappa x+\lambda\right)=7\ \Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x^2+3-\kappa x^3+\lambda x^2-4\kappa x+4\lambda}{x^2+4}\right)=7$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-\kappa)x^3+(\lambda-4)x^2-4\kappa x+4\lambda+3}{x^2+4}=7$$

Αν $1-\kappa\neq0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\kappa=\pm\infty$ Άτοπο Άρα κ=1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\lambda-4)x^2-4x+4\lambda+3}{x^2+4}=7\ \Leftrightarrow\frac{\lambda-4}{1}=7\Leftrightarrow\lambda=11$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2+8x+15}+\rho x+\gamma\right]=11\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\cdot\left(4+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)}+\rho x+\gamma\right]=11\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}-\rho-\frac{\gamma}{x^2}\right)=11,\qquad\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}+\rho+\frac{\gamma}{x}\right)=-2+\rho$$

Αν $-2+\rho\neq0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\Pi=\pm\infty$ δεν υπάρχει άτοπο. Άρα $-2+\rho=0\Leftrightarrow\rho=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+15}+2x+\gamma\right)=11\ \Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+8x+15-4x^2}{\sqrt{4x^2+8x+15}-2x}+\gamma=11$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8+\frac{15}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}-2\right)}+\gamma=11\Leftrightarrow\frac{8}{-4}+\gamma=11\Rightarrow\gamma=13$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει φε(0,1): $u^2\phi^3+7\phi=u\phi^2+2$

Εστω η συνάρτηση $Q(x)=u^2x^3-ux^2+7x-2$ ορισμένη στο [0,1]

Η Q συνεχής στο [0,1], Q(0)Q(1)= $-2(u^2-u+5)<0,\quad\Delta<0$

τότε υπάρχει φε(0,1): Q(φ)=0): $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow u^2\phi^3+7\phi=u\phi^2+2$

33. **Αν οι εικόνες των 1, z, 1+z² είναι στην ίδια ευθεια να βρεθεί ο γ.τ. της εικόνας του z το Μ(α, β) όπου**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+e^{-x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\kappa^{x^2}-\lambda^{x^2}}{(\kappa^x-\lambda^x)^2}$$

λ η λύση της $5^x+12^x=13^x$**, μ<ν οι ρίζες της** $3^x+4^x=2^x+5^x$ **και** να **βρεθεί ο** z^{2001} **αν** $\mu\kappa z^3+\alpha z^2+(\beta-\lambda)z+\nu=0$**.**

Εστω z=α+βi ,1+z²=1+(α+βi)² =1+α²-β²+2αβ
Έστω Μ(α, β) η εικόνα του z
Έστω N(1,0) η εικόνα του 1
Έστω K(1+α²-β², 2αβ) η εικόνα του 1+z²Μ, Ν, Κ συνευθειακά

$MN // NK \Leftrightarrow \lambda_{MN} = \lambda_{NK} \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 1$ (1)

Άρα το Μ(α, β) σε κύκλο.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n(e^x + e^{-x})}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x + e^{-x}}\cdot(e^x - e^{-x})}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[1-\frac{1}{e^{2x}}\right]}{e^x\left[1+\frac{1}{e^{2x}}\right]} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n(1+e^{\alpha x})}{\ell n(1+e^{\beta x})} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+e^{\alpha x}}\cdot\alpha e^{\alpha x}}{\frac{1}{1+e^{\beta x}}\cdot\beta e^{\beta x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\alpha e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}\cdot\left(1+\frac{1}{e^{\alpha x}}\right)}}{\frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta x}\cdot(1+\frac{1}{e^{\beta x}})}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2} - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \overset{\%}{=} \lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2} + \eta\mu x}{2x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to0}\frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \sigma\upsilon\nu x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\kappa^{x^2} - \lambda^{x^2}x}{(\kappa^x - \lambda^x)^2} = \lim_{x\to0}\frac{\kappa^{x^2}\ell n\kappa 2x - \lambda^{x^2}\ell n\lambda 2x}{2(\kappa^x - \lambda^x)\cdot[\kappa^x\ell n\kappa - \lambda^x\ell n\lambda]} = \lim_{x\to0}\left[\frac{2x}{2(\kappa^x - \lambda^x}\cdot\frac{\kappa x^2\ell n\kappa - \lambda x^2\ell n\lambda}{\kappa^x\ell n\kappa - \lambda^x\ell n\lambda}\right]$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\kappa^x\ell n\kappa - \lambda^x\ell n\lambda}\cdot\frac{\kappa x^2\ell n\kappa - \lambda^{x^2}\ell n\lambda}{\kappa^x\ell n\kappa - \lambda^x\ell n\lambda}\right] = \frac{1}{\ell n\kappa - \ell n\lambda} = \frac{1}{\ell n\frac{\kappa}{\lambda}}$$

Τότε $1 = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ell n\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)}$ $\begin{cases} 1 = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ 1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ell n\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ell n\frac{\kappa}{\lambda}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ell n\dfrac{\kappa}{\lambda} = 2 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2\alpha \begin{cases} \alpha = 1 = \beta \\ \alpha = 0 = \beta, \text{ ατοπο} \end{cases}$

Για την $5^x + 12^x = 13^x$

Η $5^x + 12^x = 13^x$ παρατηρώ ότι έχει μια λύση $x = 2$

Έστω η f με $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα, άρα η ρίζα μοναδική, άρα λ=2.

Για τη $3^x + 4^x = 2^x + 5^x \Leftrightarrow 3^x - 2^x = 5^x - 4^x$

Έστω η f με $f(t) = t^x$ $f'(t) = xt^{x-1}$

Στο [2,3] Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ t_1 \in (2,3)$ $f'(t_1) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3-2} \Leftrightarrow xt_1^{x-1} = 3^x - 2^x$

Στο [4,5] Θ.Μ.Τ.Δ. $\exists\ t_2 \in (4,5)$ $f'(t_2) = \dfrac{f(5) - f(4)}{5-4} \Rightarrow xt_2^{x-1} = 5^x - 4^x$

Τότε $xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t_1^{x-1} = t_2^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 1 \end{cases}$

Είναι $\ell n\dfrac{\kappa}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \ell n\dfrac{\kappa}{2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{2} = e^2 \Leftrightarrow \kappa = 2e^2$

Είναι $z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = z - 1 \Rightarrow z^3 = ... = -1,\ z^{2001} = (z^3)^{667} = (-1)^{667} = -1$

34. **Εστω οι μιγαδικοί** $z_x = x + \frac{\sqrt{3}}{3} + \kappa^x i$ **με** $Arg\, z_x \geq \frac{\pi}{3} \quad \forall\, x \in [0, +\infty)$

Έστω η συνάρτηση f(x)=(αx²+β)x+γ, η γραφική της παράσταση να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, στο σημείο x=1 να παρουσιάζει ακρότατο και στο x=2 να είναι κάθετη στην ευθεία ε: x+9y+2000=0.

Αν $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + ... + \eta\mu\nu x}{x}$ **= 28 με νεN,** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot ... \cdot \eta\mu\lambda\chi}{x^{\lambda}}$ **= 120 .**

Αν $\gamma\kappa z^3 + \alpha z^2 + (\alpha - \beta)z + (\lambda - \nu)^2 = 0$ **τότε ο** z^{1821} **είναι αρνητικός.**

Ο z_x απεικονίζει στο $M\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3},\ \kappa^x\right)$

$$\varepsilon\varphi Arg\, z_x \geq \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\kappa^x}{x + \frac{\sqrt{3}}{3}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \kappa^x - \sqrt{3}\,x - 1 \geq 0 \quad \forall\, x \in [0, +\infty)$$

Έστω η g με $g(x) = \kappa^x - \sqrt{3}\,x - 1 \geq 0 = g(0) \quad g'(x) = \kappa^x \ell n\kappa - \sqrt{3}$

Στο x=0 ολικό ελάχιστο άρα Τ.Α. από Θ. Fermat $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \ell n\kappa - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \kappa = e^{\sqrt{3}}$.

Είναι f(x)=(αx²+β)x+γ= αx³+βx+γ, f΄(x)=3αx²+β

Εχουμε f(0)=0⇔γ=0, f΄(1)=0⇔3α+β=0, $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{9}$, λ_η=f΄(2)=12α+β

είναι ε⊥η⇔$\lambda_\varepsilon\ \lambda_\eta$=-1 ⇔ 12α+β=9 τότε α=1, β=-3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + ... + \eta\mu\nu x}{x} = = 28 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\chi}{\chi} + 2\frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi} + 3\frac{\eta\mu 3\chi}{3\chi} + ... + \nu\frac{\eta\mu\nu\chi}{\nu\chi}\right] = 28$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + ... + \nu = 28 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 28 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = -8, & \alpha\pi o\rho \\ \nu = 7, & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot ... \cdot \eta\mu\lambda\chi}{x^{\lambda}} = 120 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\quad 2\frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi}\quad 3\frac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}\quad ...\ \lambda\frac{\eta\mu\lambda\chi}{\lambda\chi}\right] = 120$$

⇔ 1 2 3 … λ=120⇔λ=5

Είναι $z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2z - 4 \Rightarrow z^3 = ... = -8,\ z^{1821} = (z^3)^{607} = (-8)^{607} < 0$

35. **Εστω ότι το σύστημα** $\begin{cases}(\lambda+1)x + 2\mu y = 2 \\ (3-\lambda)x + (3\mu - 1)y = -3\end{cases}$ **έχει άπειρες λύσεις και για τους μιγαδικούς z,w ισχύει** $\left|z - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4} \quad w = \frac{2-3z}{4z-3} \Rightarrow \alpha = \left|w + \frac{3}{4}\right|$ **και** $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 \eta\mu x}{x^3+1}$ **,**

$\gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2 - 6x + 2} - 3x$ **,** $\delta = \lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}$ $\kappa = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot\eta\mu\frac{3x}{2}\cdot\eta\mu\frac{x}{2}}{x^2}$ **τότε υπάρχει**

φε(0,1): $5\phi^3 - \frac{1}{\lambda\mu}\rho\phi = \delta - \frac{\kappa}{\alpha}\phi + \gamma\rho^2\phi^2 + \beta$

Το $\begin{cases}(\lambda+1)x + 2\mu y = 2 \\ (3-\lambda)x + (3\mu - 1)y = -3\end{cases}$ είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ως προς x, y.

Αφού είναι αόριστο πρέπει D=0=D_x=D_y

D_x=0 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2\mu \\ -3 & 3\mu-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{6}$

D_y=0 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 3-\lambda & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3\lambda-\lambda-6+2\lambda = 0 \Leftrightarrow -2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = -3$

Τότε $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+\frac{1}{3}y = 2 \\ 12x-\frac{1}{2}y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x-y=-6 \\ 24x-y=-6 \end{cases}$ Πράγματι αόριστο. Άρα $(\lambda,\mu) = \left(-9, \frac{1}{6}\right)$

$$\alpha = \left|\omega+\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{2-3z}{4z-3}+\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{8-12z+12z-9}{4\cdot(4z-3)}\right| = \frac{1}{16\left|z-\frac{3}{4}\right|} = \frac{1}{4}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\,\eta\mu x}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^3+1}\eta\mu x\right] = 0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+1} = 0$ $\quad \left|\frac{x^2\eta\mu x}{x^3+1}\right| \le \left|\frac{x^2}{x^3+1}\right|$

$$\gamma = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+2}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-6x+2-9x^2}{\sqrt{9x^2-6x+2}+3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-6+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\right)} = -1$$

$$\delta = \lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\eta\mu y = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

$$\kappa = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{3x}{2}\eta\mu\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}2\frac{\eta\mu\frac{3x}{2}}{x}\cdot\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{x} = \frac{3}{4}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει φε(0,1): $5\phi^3+2\rho\phi = 1-3\phi-\rho^2\phi^2$

Εστω η συνάρτηση G με $G(x) = 5x^3+p^2x^2+(2p+3)x-1$ ορισμένη στο [0,1]

Η G συνεχής στο [0,1], G(0)G(1)= $-(p^2+2p+7)<0, \quad \Delta<0$

τότε υπάρχει φε(0,1): G(φ)=0 $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow 5\phi^3+2\rho\phi = 1-3\phi-\rho^2\phi^2$

36. **Εστω ότι** $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\alpha+\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\cdot x\cdot\eta\mu x}{x^2} = 4$ **και το** $Q(x) = 3x^3+\kappa x^2+\lambda x+8$ **έχει παράγοντα το** $(x-2)^2$**, αν** $|z-iw| \le |z|+|w|$ $\quad z = 1+i\mu^x$ **, w=1+i-ix και ρ η λύση της εξίσωσης** $1+e^x(x-1)=0$ **και αν** $(\alpha+pk)^2z^2+az-a=0$ **και** $\mu^\nu z^{2004} = e^{14+k}$

Αν οι αριθμοί f(λ), f(ν), f(β) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\lambda,\beta): f''(x_0)=0$**.**

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}x^2 = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha+\sigma\upsilon\nu 2x+\beta x\eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1+\sigma\upsilon\nu 2x+\beta x\eta\mu x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu 2x+\beta\eta\mu x+\beta x\sigma\upsilon\nu x}{2x}$$

$\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\sigma\upsilon x+\beta\sigma\upsilon\nu x-8x\eta\mu x}{-2}=-2+\beta$. Πρέπει $-2+\beta=4\Rightarrow\beta=6$

$Q(x)=3x^3+\kappa x^2+\lambda x+8$, $Q'(x)=9x^2+2\kappa x+\lambda$

Το Q έχει παράγοντα το $(x-2)^2$ τότε $Q(x)=(x-2)^2\Pi(x)$, $Q(2)=0\Leftrightarrow 2k+\lambda=-16$

και $Q'(x)=2(x-2)\Pi(x)+(x-2)^2\Pi'(x)$ $Q'(2)=0\Leftrightarrow 4\kappa+\lambda=-36$, έτσι $\kappa=-10$, $\lambda=4$.

Έστω $f(x)=1+e^x(x-1)$,

η $x=0$ μια τουλάχιστον ρίζα της f

και $f'(x)=xe^x$ τότε $f(x)\ge f(0)=0$,

άρα η ρίζα x=0 μοναδική, οπότε ρ=0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	-		+
f(x)	↘		↗

$|z-i\omega|\le|z|+|\omega| \Leftrightarrow |z-i\omega|^2\le(|z|+|\omega|)^2 \Leftrightarrow (z-i\omega)($ ... $2|z||\omega|$

$\Leftrightarrow i\cdot(z\bar{\omega}-\omega\bar{z})\le 2|z||\omega| \Leftrightarrow i\cdot 2i\,\mathrm{Im}(z\bar{\omega})\le 2|z\bar{\omega}| \Leftrightarrow -\mathrm{Im}(z\bar{\omega})\le|z\bar{\omega}|$ (1)

Τότε $z\bar{\omega}=1+\mu^x(x-1)+i[\mu^x-(x-1)]$

Αν $z\bar{\omega}=\alpha+\beta i$, $(1)\Leftrightarrow -\beta\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}-\beta\ge 0\\ (-\beta)^2\le\alpha^2+\beta^2\Rightarrow\alpha^2\ge 0 \text{ Ισχύει}\end{cases}$

Άρα $\beta\le 0\Leftrightarrow\mu^x-(x-1)\le 0\Leftrightarrow\mu^x-x+1\le 0\ \ \forall x\in R$

$g(x)=\mu^x-x-1\le 0=g(0)$ $g'(x)=\mu^x\ell n\mu-1$

Στο $x=0$ Ο.Μ. Άρα Τ.Α. $g'(0)=0\Leftrightarrow\mu^e\ell n\mu-1=0\Leftrightarrow\mu=e$

Είναι $z^2-z+1=0\Leftrightarrow z^2=z-1\Rightarrow z^3=.....=-1,\ z^{2004}=(z^3)^{668}=(-1)^{668}=1$

Τότε $\mu^\nu z^{2004}=e^{14+k}\Leftrightarrow e^\nu 1=e^{14-10}\Leftrightarrow\nu=4$

Οι f(4), f(5), f(6) διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε

2f(5)=f(6)+f(4) $\Leftrightarrow$ f(5)-f(4)=f(6)-f(5)

Εφαρμόζω στην f Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [4,5] $\exists\ x_1\varepsilon(4,5)$: $f'(x_1)=\dfrac{f(5)-f(4)}{5-4}$

Εφαρμόζω στην f Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [5,6] $\exists\ x_2\varepsilon(5,6)$: $f'(x_2)=\dfrac{f(6)-f(5)}{6-5}$

Τότε $f'(x_1)=f'(x_2)$ από το Θ.Rolle για την f' στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\varepsilon(x_1,x_2)$ για το οποίο $f''(x_0)=0$.

37. **Αν η f παραγωγίσιμη στο x_o=0 με f(x)=** $\begin{cases}\alpha e^{5x}+\beta & ,x\le 0\\ \dfrac{\ln(x+1)-\eta\mu x}{x} & ,x>0\end{cases}$**, ποια τα** $\alpha,\beta\in IR$ **;**

Επειδή η f παραγωγίσιμη στο x_0=0 είναι και συνεχή τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

(1)

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha e^{5x}+\beta\right)=\alpha+\beta$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(x+1)-\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ell n(x+1)-\eta\mu x]'}{(x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-\sigma\upsilon\nu x}{1}=\frac{1-1}{1}=0\,,\quad (1)\Leftrightarrow \alpha+\beta=0=\alpha+\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=0\,(2)$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (3)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{5x}+\beta-\alpha-\beta}{x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5\alpha e^{5x}}{1}=5\alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ell n(x+1)-\eta\mu x}{x}-(\alpha+\beta)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(x+1)-\eta\mu x-0}{x^2}$$

$$\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-\sigma\upsilon\nu x}{2x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}+\eta\mu x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$(3)\Leftrightarrow 5\alpha=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{10}\,,\quad (2)\Leftrightarrow\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{10}$$

38. **Εστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ και για την οποία ισχύει**

$$e^{2x}+\ln(2x+1)\le f(x)\le\sqrt{x+1}+\frac{7}{2}x\ \ \forall x\varepsilon\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

να βρεθούν τα f(0) f΄(0) , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+\sqrt{x^3+4}-3e^{5x}}{x}$.

Έχουμε $e^{2x}+\ln(2x+1)\le f(x)\le\sqrt{x+1}+\frac{7}{2}x$ (1)

Για x=0 (1) $\Rightarrow 1\le f(0)\le 1$ άρα $f(0)=1$

Θα βρω το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$

- αν x<0 (1) $\Rightarrow\frac{e^{2x}+\ell n(2x+1)-1}{x}\ge\frac{f(x)-1}{x}\ge\frac{\sqrt{x+1}+\frac{7}{2}x-1}{x}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}+\ell n(2x+1)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+\frac{2}{2x+1}}{1}=4$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+1}+\frac{7}{2}x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{7}{2}}{1}=4$$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}=4$

- αν x>0 όμοια $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=4$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=4 \Leftrightarrow f'(0)=4$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+\sqrt{x^3+4}-3e^{5x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}+\frac{\sqrt{x^3+4}-3e^{5x}+1}{x}\right]=4+(-15)=-11$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+4}-3e^{5x}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}-3\cdot 5\cdot e^{5x}}{1}=-15$

39. **Δίνεται η συνάρτηση f με** $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\lambda x+5$**. Αν στα σημεία** $A(x_1,y_1)$ **και** $B(x_2,y_2)$ **της C_f οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον** $x'x$ **και** $5x_1^3x_2-2\lambda-4x_1^2x_2=4x_1x_2^2+3-5x_1x_2^3$ **να βρεθεί η τιμή του λ.**

Έχουμε $f'(x)=x^2-3x+\lambda$

Είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, άρα x_1, x_2 ρίζες της f' και του τριωνύμου $x^2-3x+\lambda$.

Άρα Δ>0 και $S=x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=3$ $\quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\lambda}{1}=\lambda$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2\lambda=9-2\lambda$

Έχουμε $5x_1^3x_2-2\lambda-4x_1^2x_2=4x_1x_2^2+3-5x_1x_2^3$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2(x_1^2+x_2^2)-4x_1x_2(x_1+x_2)-2\lambda-3=0$

$\Leftrightarrow 5\lambda(9-2\lambda)-4\lambda\cdot 3-2\lambda-3=0 \Leftrightarrow 10\lambda^2-31\lambda+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=3\\ \lambda=\frac{1}{10}\end{cases}$

Για λ=3 $f'(x)=x^2-3x+3$ Δ=-3<0 απορρίπτεται

Για $\lambda=\frac{1}{10}$ $f'(x)=x^2-3x+\frac{1}{10}$ $\Delta=\frac{86}{10}>0$ δεκτή $\lambda=\frac{1}{10}$

40. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=\frac{x}{e^x}$ **να βρεθεί το σύνολο τιμών της και να λυθεί η εξίσωση** $x=\kappa e^x$ **για κάθε** $\kappa\in R$ **.**

Είναι $f'(x)=\left[\frac{x}{e^x}\right]'=\frac{1-x}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$ γιατί $x\to-\infty$, $e^x\to 0$, $\frac{1}{e^x}\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

Το σύνολο τιμών το $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$

Για την εξίσωση $x=\kappa e^x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x}=\kappa \Leftrightarrow f(x)=\kappa$

- αν $\kappa>\frac{1}{e}$ $f(x)=\kappa$ αδύνατη

- αν $\kappa = \frac{1}{e}$ $f(x) = \kappa \Leftrightarrow x = 1$
- αν $\kappa \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ $f(x) = \kappa$ έχει δύο λύσεις
- αν $\kappa \le 0$ $f(x) = \kappa$ έχει μία μόνο λύση

x	-∞	1	+∞
f ’(x)	+		-
f(x)	- ∞ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

41. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+\beta^3+\gamma^3}{3\alpha\beta\gamma} & x < \alpha \\ \dfrac{x}{\alpha} & x \ge \alpha \end{cases}$ **με** $\alpha+\beta+\gamma=0$**,** $\alpha \in (0,1)$ **και ότι οι** β, α, γ **είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν** $K\left(0, \frac{2}{3}\right)$**,** $\Lambda\left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$ **δείξτε ότι** $\exists\, x_0 \in (0,1)$ **που στο σημείο** $M(x_0, f(x_0))$ **η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης να είναι παράλληλη στη χορδή ΚΛ.**

Επειδή $K \in C_f$, $\Lambda \in C_f$ αρκεί να εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [0,1].

$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

β, α, γ διαδοχικοί γ.π. $\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta\gamma$

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{x^3+\beta^3+\gamma^3}{3\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{x}{\alpha} = 1$$

$f(\alpha)=1$, άρα η f συνεχής στο $x_0 = \alpha$ Άρα η f συνεχής στο [0,1]

Η f παραγωγίσιμη στο (0,α) και στο (α,1)

Εξετάζω αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\dfrac{x^3+\beta^3+\gamma^3}{3\alpha\beta\gamma} - 1}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}{3\alpha\beta\gamma(x-\alpha)}$$

$$\overset{\%}{=} \lim_{x\to\alpha} \frac{3x^2}{3\alpha\beta\gamma} = \frac{3\alpha^2}{3\alpha\beta\gamma} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\dfrac{x}{\alpha} - 1}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\dfrac{x-\alpha}{\alpha}}{x-\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

άρα $\exists\, f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ Άρα η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$

Τότε η f παραγωγίσιμη στο (0,1) Έτσι εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [0,1]

$\exists\, x_0 \in (0,1)$: τότε στο $M(x_0, f(x_0))$ η εφαπτόμενη παράλληλη στη χορδή ΚΛ όπου $K\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\Lambda\left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$

42. **Έστω f:** $IR_1 \to IR$ **όπου** $IR_1 = \left\{ x \in IR \;\; με \;\; x \neq κπ + \frac{π}{2},\; κ \in Z \right\}$ **παραγωγίσιμη στο** IR **με f(0)=1 και** $f'(x)\,συνx + ημx = f(x)\,ημx$ **(1) αποδείξτε ότι** $f(x) = f(x+1) = ... = f(x+2004)$

Εχουμε $f'(x)\cdot συνx + ημx = f(x)ημx$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot συνx - f(x)ημx = -ημx$

$\Leftrightarrow \left[f(x)συνx\right]' = \left[συνx\right]'$

$\Leftrightarrow f(x)συνx = συνx + c \;\; (1)$

Για x=0 $(1) \Rightarrow f(0)\cdot συν0 = συν0 + c \Leftrightarrow 1\cdot 1 = 1 + c \Leftrightarrow 0 = c$

$(1) \Rightarrow f(x)συνx = συνx \Leftrightarrow f(x) = 1$

Τότε $f(x) = f(x+1) = ... = f(x+2004) = 1$

43. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ορισμένη στο (0,+∞) με** $\frac{f^7(x)}{7} - \frac{f^4(x)}{4} + 2f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} - συνx$ **. Να δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).**

Έστω ότι στο x=ρ>0 παρουσιάζει ακρότατο η f τότε f'(ρ)=0.

Έχουμε $\frac{f^7(x)}{7} - \frac{f^4(x)}{4} + 2f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} - συνx$

$\Rightarrow f^6(x)f'(x) - f^3(x)f'(x) + 2f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + ημx \;\; (1)$

Για x=ρ $(1) \Rightarrow 0 = \frac{ρ^3}{3} - ρ + ημρ$ (2) με ρ>0 άτοπο γιατί

Έστω η g με $g(x) = \frac{x^3}{3} - x + ημx$ στο $[0, +\infty)$

$g'(x) = x^2 - 1 + συνx$

$g''(x) = 2x - ημx$

$g'''(x) = 2 - συνx > 0 \Rightarrow g''$ γνησίως αύξουσα

x>0 $\overset{g''\uparrow}{\Rightarrow} g''(x) > g''(0) = 0 \Rightarrow g'$ γνησίως αύξουσα

x>0 $\overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα

x>0 $\overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{3} - x + ημx > 0 \Rightarrow \frac{ρ^3}{3} - ρ + ημρ > 0$

Επίσης $(1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{x^3}{3} - x + ημx}{f^6(x) - f^3(x) + 2} > 0 \Rightarrow f\uparrow$,

γιατί $f^6(x) - f^3(x) + 2 > 0$,Δ<0.

44. **Μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα** $x\left[f(x) + f(-x) + 4\right] + 4f(-x) = 0$ **(1)** $\forall\; x \in IR$ **.**
α. Να αποδειχθεί ότι είναι περιττή.

β. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Για x=0 $(1)\Rightarrow 4f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$
Θέτω όπου x το –x στην (1) τότε $-x\left[f(-x)+f(x)+4\right]+4f(x)=0$
$\Rightarrow 4f(x)=x\left[f(-x)+f(x)+4\right]$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} 4f(x)=-4f(-x) \quad \Rightarrow f(-x)=-f(x)$ άρα η f περιττή
Τότε $(1)\Rightarrow x\left[f(x)+f(-x)+4\right]+4f(-x)=0$
$\Rightarrow x\left[f(x)-f(x)+4\right]-4f(x)=0 \Rightarrow 4x-4f(x)=0\Rightarrow f(x)=x$

45. **Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f με f: $R\to R$ η οποία για κάθε $x,y\in IR$ ικανοποιεί τη σχέση $f\left[f(x)+y\right]=f(x+y)-3$. Ποιος ο τύπος της f; Να δείξτε ότι η C_f εφάπτεται της C_g με $g(x)=\ell nx-2$.**

Για x=y=0 τότε $f\left(f(0)+0\right)=f(0)-3\Leftrightarrow f\left(f(0)\right)=f(0)-3$ (1)
Για y=-x τότε $f\left(f(x)-x\right)=f(0)-3$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(f(x)-x\right)=f\left(f(0)\right)$
$\overset{f\ "1-1"}{\Rightarrow} f(x)-x=f(0)$
$\Rightarrow f(x)=x+f(0)$ (3)
Για x=-3 $(3)\Rightarrow f(-3)=-3+f(0)\overset{(1)}{=}f\left(f(0)\right)$
$\Rightarrow f(-3)=f\left(f(0)\right)$
$\overset{f\ "1-1"}{\Rightarrow} -3=f(0)$
Τότε $(3)\Rightarrow f(x)=x-3$
Έστω Μ(α,β) το σημείο επαφής τότε β=α-3

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-3=\ell n\alpha-2 \\ 1=\dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3=\ell n1-2 \\ \alpha=1 \end{cases}$$ που ισχύει, άρα β=1-3=-2

Άρα στο (1,-2) η C_f εφάπτεται της C_g.

46. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $R\to R$ τέτοια ώστε $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)$ (1) για κάθε $x,\psi\in R$. Να δειχτούν:
α. f(0)=0
β. η f είναι περιττή
γ. ισχύει $f(\nu x)=\nu f(x)$ για κάθε $\nu\in N^*$
δ. είναι $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ για κάθε $\lambda\in Z$
ε. ισχύει $f(\rho x)=\rho f(x)$ για κάθε $\rho\in Q$
στ. αν f(1)=c τότε $f(x)=cx$ για κάθε $x\in Q$
ζ. αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την x=0 τότε f είναι 1-1
η. αν f συνεχής στο $x_0=\alpha\in IR$ τότε συνεχής στο R.

α. Για x=ψ=0 έχουμε $f(0)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$
β. Θέτουμε ψ=-x τότε $f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)$

$\overset{\alpha}{\Leftrightarrow} 0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

γ. Για ν=1 ισχύει

- Έστω αληθής για ν=κ δηλαδή $f(\kappa x) = \kappa f(x)$ (2)

- Θα είναι αληθής και για ν=κ+1, δηλαδή αρκεί: $f[(\kappa+1)\chi] = (\kappa+1)f(x)$

Είναι $f[(\kappa+1)\chi] = f(\kappa x + x) \overset{(1)}{=} f(\kappa x) + f(x) \overset{(2)}{=} \kappa f(x) + f(x) = (\kappa+1)f(x)$. Άρα αληθής.

δ. Έστω $\kappa \in Z_+^*$ τότε $-\kappa \in Z_-^*$ δηλαδή $\kappa \in N^*$ άρα

$f(-\kappa x) \overset{\beta}{=} -f(\kappa x) \overset{\gamma}{=} -\kappa f(x)$. Θέτουμε $-\kappa = \lambda \in Z_-^*$ τότε $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

άρα ισχύει για κάθε $\lambda \in Z$ (αφού ισχύει και για κάθε $\lambda \in Z_+$)

ε. Έστω $\rho = \dfrac{\mu}{\nu}$, $\mu \in Z$, $\nu \in N^*$ αρκεί $f\left(\dfrac{\mu}{\nu}x\right) = \dfrac{\mu}{\nu}f(x)$ πράγματι:

$$f(\mu x) = f\left(\nu \cdot \frac{\mu}{\nu} \cdot x\right) = \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}x\right) \Leftrightarrow \mu f(x) = \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}x\right) \Leftrightarrow \frac{\mu}{\nu}f(x) = f\left(\frac{\mu}{\nu}x\right)$$

στ. Στη σχέση $f(\rho x) = \rho f(x)$, $\rho \in Q$ θέτουμε όπου $\rho = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ τότε $f\left(\dfrac{1}{x} \cdot x\right) = \dfrac{1}{x}f(x)$

ή $f(1) = \dfrac{1}{x}f(x) \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{x}f(x) \Leftrightarrow f(x) = cx$ που ισχύει και για $\chi = 0$ άρα $f(x) = cx$ για κάθε $x \in Q$.

ζ. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$ θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Έχουμε $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) + f(-x_2) = 0$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f[x_1 + (-x_2)] = 0 \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0$ δηλαδή το $x = x_1 - x_2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή είναι μοναδική η λύση $x = 0$ θα είναι $x_1 - x_2 = 0$ (αποκλειστικά) ή $x_1 = x_2$.

Επομένως η f είναι 1-1.

Επειδή η f συνεχής στο $x_0 = \alpha$, $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Έστω ο τυχαίος $\kappa \in R$

$$\lim_{x \to \kappa} f(x) \overset{x=\kappa-\alpha+y}{=} \lim_{y \to \alpha} f(\kappa - \alpha + y) = \lim_{y \to \alpha}[f(\kappa - \alpha) + f(y)] = f(\kappa - \alpha) + f(\alpha)$$
$$= f(\kappa - \alpha + \alpha) = f(\kappa).$$

Άρα η f συνεχής στο τυχαίο $\kappa \in R$, άρα συνεχής στο R.

47. Έστω $\alpha, \beta \in IR$ **με** $\alpha \neq \beta$**. Δείξτε ότι** $\exists\, \rho \in (0,1)$**:** $(\alpha^2 + \beta^2)\rho^{2001} + 2001(\rho - 1) = 2\alpha\beta\rho^{1821}$

Έστω η f με $f(x) = (\alpha^2 + \beta^2)x^{2001} - 2\alpha\beta x^{1821} + 2001(x-1)$ ορισμένη στο $[0,1]$

Η f συνεχής στο $[0,1]$

$f(0) = -2001 < 0$

$f(1) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 > 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$

Εφαρμόζεται στην f το Θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$.

$\exists\, \rho \in (0,1)$: $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)\rho^{2001} - 2\alpha\beta\rho^{1821} + 2001(\rho - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)\rho^{2001} + 2001(\rho - 1) = 2\alpha\beta\rho^{1821}$

48. Έστω $\alpha,\beta\in IR$ **. Δείξτε ότι** $\exists\ \rho\in(0,1)$**:** $1000\alpha\rho^{499}+99\beta\rho^{32}=300\beta\rho^{99}+100\alpha\rho^{49}$

Έστω η f με $f(x)=2\alpha x^{500}-3\beta x^{100}-2\alpha x^{50}+3\beta x^{33}$ ορισμένη στο $[0,1]$
Η f συνεχής στο $[0,1]$
Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=1000\alpha x^{499}-300\beta x^{99}-100\alpha x^{49}+99\beta x^{32}$
f(0)=0
f(1)=2α-3β-2α+3β=0, άρα f(0)=f(1)
Εφαρμόζεται στην f το Θεώρημα Rolle στο $[0,1]$
άρα $\exists\ \rho\in(0,1):\ f'(\rho)=0\Leftrightarrow 1000\alpha\rho^{499}-300\beta\rho^{99}-100\alpha\rho^{49}+99\beta\rho^{32}=0$
$\Leftrightarrow 1000\alpha\rho^{499}+99\beta\rho^{32}=300\beta\rho^{99}+100\alpha\rho^{49}$

49. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ **και οι μιγαδικοί z, w με** $z=\alpha+\beta i$ **και** $w=f(\alpha)+f(\beta)i$ **με** $|z+w|=|z-w|$**. Να δείξτε ότι** $\exists\ \rho\in[\alpha,\beta]$**: f(ρ)=0.**

Έχουμε $|z+w|=|z-w|\Leftrightarrow|z+w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow(z+w)\cdot\overline{(z+w)}=(z-w)\cdot\overline{(z-w)}$
$\Leftrightarrow(z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w})=(z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w})\Leftrightarrow z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=z\overline{z}-z\overline{w}-\overline{z}w+w\overline{w}$
$\Leftrightarrow 2z\overline{w}+2\overline{z}w=0\Leftrightarrow\overline{z}w=-z\overline{w}\Leftrightarrow\overline{z\overline{w}}=-z\overline{w}\Leftrightarrow z\overline{w}\in I$
$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\overline{w})=0$ (1)
$z\overline{w}=(\alpha+\beta i)\cdot\left(\overline{f(\alpha)+f(\beta)i}\right)=(\alpha+\beta i)\cdot\left(f(\alpha)-f(\beta)i\right)=[\alpha f(\alpha)+\beta f(\beta)]+i[\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)]$
$(1)\Leftrightarrow\alpha f(\alpha)+\beta f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=\dfrac{-\alpha f(\alpha)}{\beta}$
Τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)=f(\alpha)\left[-\dfrac{\alpha f(\alpha)}{\beta}\right]=-\dfrac{\alpha f^2(\alpha)}{\beta}\le 0$
Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ από Θεώρημα Bolzano $\exists\ \rho\in(\alpha,\beta)$: f(ρ)=0
Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)=0\\ f(\beta)=0\end{cases}$
Άρα $\exists\ \rho\in[\alpha,\beta]$: f(ρ)=0

50. Έστω ο $z\in C$ **για τον οποίο** $z^4-iz^3-z^2+iz+1=0$ **και** $\alpha,\beta\in R$ **ώστε** $2\beta eiz^{200}+2\beta z^{105}-500z^{65}=\alpha z^{35}$**. Τότε δείξτε ότι** $\exists\ \rho\in(0,1)$**:** $8\alpha\rho^3=4\beta e^{\rho}+2000\rho$**.**

Έχουμε $z^4=iz^3+z^2-iz-1$ (1)
$(1)\overset{z}{\Rightarrow}z^5=iz^4+z^3-iz^2-z\overset{(1)}{=}i(iz^3+z^2-iz-1)+z^3-iz^2-z$
$\Leftrightarrow z^5=i^2z^3+iz^2-i^2z-i+z^3-iz^2-z$
$\Leftrightarrow z^5=-i$
$z^{200}=\left(z^5\right)^{40}=\left[(-i)^4\right]^{10}=1$
$z^{105}=\left(z^5\right)^{21}=(-i)^{21}=-i^{21}=-i^{20}\cdot i=-i$
$z^{65}=\left(z^5\right)^{13}=(-i)^{13}=-i^{13}=-i^{12}\cdot i=-i$
$z^{35}=\left(z^5\right)^{7}=(-i)^{7}=-i^{7}=-i^{4}\cdot i^3=i$
Τότε η δοσμένη γίνεται $2\beta ei1+2\beta(-i)-500(-i)=\alpha i$

$\Leftrightarrow 2\beta e - 2\beta + 500 = \alpha$ (2)

Έστω η f με $f(x) = 2\alpha x^4 - 4\beta e^x - 1000x^2$ ορισμένη στο $[0,1]$

Η f συνεχής στο [0,1]

Η f παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x) = 8\alpha x^3 - 4\beta e^x - 2000x$

f(0)=-4β

$f(1) = 2\alpha - 4\beta e - 1000 \overset{(2)}{=} 2(2\beta e - 2\beta + 500) - 4\beta e - 1000$

$= 4\beta e - 4\beta + 1000 - 4\beta e - 1000 = -4\beta = f(0)$

Τότε εφαρμόζεται για την f στο [0,1] το Θεώρημα Rolle

$\exists\, \rho \in (0,1):\ f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow 8\alpha\rho^3 - 4\beta e^\rho - 2000\rho = 0$

$\Leftrightarrow 8\alpha\rho^3 = 4\beta e^\rho + 2000\rho$

51. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:[-2,2]$\rightarrow$[0,1]. Να δείξτε ότι η διχοτόμος του 2ου και 4ου τεταρτημορίου την τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (-2,2)

Για να τέμνει η διχοτόμος του 2ου και 4ου τεταρτημορίου με εξίσωση y=-x την γραφική παράσταση της f πρέπει το σύστημα $\begin{cases} y = -x \\ y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \end{cases}$

να έχει μία τουλάχιστον λύση.

Έτσι η εξίσωση $f(x) + x = 0$ πρέπει να έχει μια τουλάχιστον λύση στο (-2,2)

Έστω η h με $h(x) = f(x) + x$ ορισμένη στο [-2,2]

Η h είναι συνεχής στο [-2,2]

$h(-2) = f(-2) - 2 < 0$

$h(2) = f(2) + 2 > 0$ γιατί f:[-2,2]$\rightarrow$[0,1]

Τότε $\forall x \in [-2,2]\ \ 0 \le f(x) \le 1 \Rightarrow -2 < 0 \le f(x) \le 1 < 2$

Έτσι $h(-2)\cdot h(2) < 0$ τότε από Θεώρημα Bolzano $\exists\, \rho \in (-2,2): h(\rho) = 0$

$\Leftrightarrow f(\rho) + \rho = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = -\rho$

Άρα πράγματι η y=-x τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (-2,2).

52. **Έστω η f συνεχής στο [α, β]. Δείξτε ότι $\exists\, \gamma \in [\alpha,\beta]$: $2004f(\gamma) = 999f(\alpha) + 1005f(\beta)$. Αν το γ μέσο του [α, β] τότε $\exists\, x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$: $1005f'(x_2) = 999f'(x_1)$.**

Επειδή η f συνεχής στο [α, β] υπάρχει για την f μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή μ τότε $\forall\, x \in [\alpha,\beta]\ \ \mu \le f(x) \le M$

Έχουμε $\mu \le f(\alpha) \le M \Leftrightarrow 999\mu \le 999f(\alpha) \le 999M$

$\mu \le f(\beta) \le M \Leftrightarrow 1005\mu \le 1005f(\beta) \le 1005M$

Έτσι $2004\mu \le 999f(\alpha) + 1005f(\beta) \le 2004M \ \ \Leftrightarrow \mu \le \dfrac{999f(\alpha) + 1005f(\beta)}{2004} \le M$

Τότε από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\gamma \in [\alpha,\beta]$ ώστε

$f(\gamma) = \dfrac{999f(\alpha) + 1005f(\beta)}{2004} \Leftrightarrow 2004f(\gamma) = 999f(\alpha) + 1005f(\beta)$ (1)

Επειδή γ μέσο $\beta - \gamma = \gamma - \alpha$

Τότε $(1) \Rightarrow 999[f(\gamma)-f(\alpha)] = 1005[f(\beta)-f(\gamma)] \Rightarrow 999\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = 1005\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ (2)

Στο [α, γ] εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ x_1 \in (\alpha,\gamma):\ f'(x_1) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$

Στο [γ, β] εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ x_2 \in (\gamma,\beta):\ f'(x_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

Τότε $(2) \Rightarrow 999f'(x_1) = 1005f'(x_2)$

53. **Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\alpha \in IR$ και είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha-h)}{h} = 2001$ να δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$.**

Θέτω $\alpha - h = x \Rightarrow \alpha - x = h$ και αν $h \to 0 \Rightarrow x \to \alpha$

Τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{\alpha-x} = 2001 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{x-\alpha} = -2001$ (1)

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha} \Leftrightarrow g(x)\cdot(x-\alpha) = f(x)$ με $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -2001$

Επειδή η f συνεχής στο $x_0 = \alpha$ έχουμε

$f(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha}[g(x)\cdot(x-\alpha)] = -2001\cdot(\alpha-\alpha) = 0$

Τότε $(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{x-\alpha} = -2001 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = -2001 \Leftrightarrow f'(\alpha) = -2001$

54. **Εστω f,g παραγωγίσιμες στο x=0, αν f(0)=g(0) και $f(x) + \eta\mu x + x \geq g(x) + e^x - 1$, να δείξτε ότι f΄(0)+1=g΄(0).**
Επίσης υπάρχει ρε(0,1): $f'(0)\rho^{2000} + \rho^{1821} + 1 = g'(0)\rho^{2004} + e\rho$.

Έχουμε $f(x) + \eta\mu x + x \geq g(x) + e^x - 1$

$\Leftrightarrow f(x) - f(0) + \eta\mu x + x \geq g(x) - g(0) + e^x - 1$ (1)

Αν $x < 0$ $(1) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x} + \dfrac{\eta\mu x + x}{x} \leq \dfrac{g(x)-g(0)}{x} + \dfrac{e^x-1}{x}$ (2)

Επειδή f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ έχουμε

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1$

Τότε $(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x} + \dfrac{\eta\mu x + x}{x}\right] \leq \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{g(x)-g(0)}{x} + \dfrac{e^x-1}{x}\right]$

$\Rightarrow f'(0) + 2 \leq g'(0) + 1 \Leftrightarrow f'(0) + 1 \leq g'(0)$ (3)

Αν $x>0$ όμοια $f'(0)+1\geq g'(0)$ (4)
Από (3) και (4) $f'(0)+1=g'(0)$
Έστω h με $h(x)=f'(0)x^{2000}+x^{1821}+1-g'(0)x^{2004}-ex$ ορισμένη στο $[0,1]$
Η h συνεχής στο $[0,1]$
$h(0)=1>0$
$h(1)=f'(0)+1+1-g'(0)-e=1-e<0$
Είναι $h(0)h(1)<0$ τότε από Θ. Bolzano $\exists\ \rho\in(0,1):\ h(\rho)=0\Leftrightarrow ...$

55. **Αν** $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}\right]=\dfrac{1}{3}$**, f συνεχής στο** $x_0=2$ **και** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$**, τότε να βρεθεί το f(2) να δείξτε ότι** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2+2h)+f(2+3h)-f(2)}{h}=3$

Θέτω $f(x)-\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}+g(x)$ με $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\dfrac{1}{3}$
Επειδή η f συνεχής στο $x_0=2$ έχουμε
$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}+g(x)\right]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$
γιατί $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}\overset{\%}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}}{1}=\dfrac{2}{3}$
Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow f'(2)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{3}{2}$
Θέτω όπου h το 2h τότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{h}=\dfrac{6}{2}$
Θέτω όπου h το 3h τότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{3h}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{h}=\dfrac{9}{2}$
Τότε
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2+2h)+f(2+3h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)-f(2+2h)+f(2)-f(2)+f(2+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}+\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}\right]$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{6}{2}+\frac{9}{2}=3$$

56. **Οι τροχιές του ΜΕΤΡΟ δίνονται από την σχέση** $f(x)=x^3-k\ln x,\ k>0$**. Να δείξτε ότι όλες διέρχονται από τον κεντρικό σταθμό Σ και να βρεθεί η τιμή του κ ώστε η καμπύλη της f να εφάπτεται του x'x.**

Έχει πεδίο ορισμού η f το $(0,+\infty)$
Έστω $y=f(x)\Leftrightarrow y=x^3-\kappa\ell nx\Leftrightarrow\kappa\ell nx+y-x^3=0$ (1) με x>0, κ>0
Η (1) πρώτου βαθμού ως προς κ και επειδή παίρνει άπειρες τιμές πρέπει:

$\begin{cases}\ell nx=0\\ y-x^3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$ άρα όλες οι τροχιές διέρχονται από το σημείο $\Sigma(1,1)$

Είναι $f'(x)=3x^2-\dfrac{\kappa}{x}$

Έστω στο A(α,0) με α>0 η γραφική παράσταση της f εφάπτεται του xx'

Τότε $A\in C_f \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-\kappa\ell n\alpha=0$ (2)

και $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3\alpha^2-\dfrac{\kappa}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \kappa=3\alpha^3$ (3)

(2) $\Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^3\ell n\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha^3(1-3\ell n\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0 \quad \text{άτοπο}\\ \ell n\alpha=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha=e^{\frac{1}{3}}\end{cases}$

Τότε (3) $\Rightarrow \kappa=3\alpha^3=3\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3 \Leftrightarrow \kappa=3e$

57. Για μια συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο x=0 ισχύει $f^3(x)+3xf^2(x)+2x^2f(x)=24x^2\left(\sqrt{4-x}-2\right)$ **να δείξτε ότι** $f'(0)=-3$

Για x=0 $(\Sigma)\Rightarrow f^3(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$

Διαιρούμε με $x^3\neq 0$

$(\Sigma)\Rightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]^3+3\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]^2+2\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=24\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$ (1)

Επειδή υπάρχει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x} \overset{\%}{=} -\dfrac{1}{4}$

Τότε (1) $\Rightarrow \left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right]^3+3\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right]^2+2\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=24\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow [f'(0)]^3+3[f'(0)]^2+2f'(0)=-6 \overset{f'(0)=\alpha}{\Rightarrow} \alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+6=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+3)(\alpha^2+2)=0 \Leftrightarrow \alpha=-3 \Leftrightarrow f'(0)=-3$.

58. **Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει** $f'(x)-x=1+\dfrac{1}{e^x}-f(x)$ **και f(0)=0. Κατόπιν να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f που η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην η:2x+ψ+2000=0.**

Είναι $f'(x)-x=1+\dfrac{1}{e^x}-f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=xe^x+e^x+1 \Leftrightarrow [f(x)e^x]'=[xe^x+x]' \Leftrightarrow f(x)e^x=xe^x+x+c$

για x=0 , $f(0)e^0=0e^0+0+c \Leftrightarrow c=0$, τότε $f(x)=x+\dfrac{x}{e^x}$ με $f'(x)=1+\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}$

Εστω ότι στο $x_0 \varepsilon R$ είναι η εφαπτόμενη κάθετη στην ευθεία (η) τότε

$f'(x_0)\dfrac{-1}{2}=-1 \Leftrightarrow f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1-x_0}{e^{x_0}}=2 \Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-1=0$

Εστω η συνάρτηση g με g(x)=e^x+x-1, παρατηρώ ότι g(0)=0, ενώ g'(x)=e^x+1>0, άρα η g είναι γνησίως αυξουσα άρα η ρίζα μοναδική, οπότε μόνο στο x=0 η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης είναι κάθετη στην (η).

59. **Εστω η συνάρτηση f με** $f(x)=\dfrac{\ln(\alpha x)}{x}$ **με α>0, x>0, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο x=x_0. Να δείξτε ότι όλες αυτές οι εφαπτόμενες καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha x-\ell n(\alpha x)}{x^2}=\frac{1-\ell n(\alpha x)}{x^2}$$

Εφαπτομένη στο $x=x_0$, $y-f(x_0)=f'(x_0)=(x-x_0)\Leftrightarrow y-\dfrac{\ell n(\alpha x_0)}{x_0}=\dfrac{1-\ell n(\alpha x_0)}{x_0^2}(x-x_0)$

$\Leftrightarrow yx_0^2-x_0\ell n(\alpha x_0)=x-x_0-\ell n(\alpha x_0)x+x_0\ell n(\alpha x_0)\ \Leftrightarrow yx_0^2-x_0+x_0=(-x+2x_0)\ell n(\alpha x_0)$

Επειδή ισχύει $\forall\ \alpha>0$ πρέπει $\begin{cases}-x+2x_0=0\\ yx_0^2-x+x_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x_0\\ y=-x_0\end{cases}$

Άρα διέρχεται από το σημείο $(2x_0,-x_0)$

60. Εστω ότι η $f(x)=2x^3-9x^2+6\mu x+2000$ **έχει τοπικά ακρότατα στα ρ_1, ρ_2 και** $5\rho_1^3\rho_2-4\rho_1^2\rho_2+5\rho_1\rho_2^3-4\rho_1\rho_2^2=2\mu+3$ **επίσης ν φυσικός ίσος με το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου** $g(x)=-3(x+2)^2(2x^2-3x+1)^{1999}+9$.

Έστω h: $R\to R$ **συνεχής στο R με** $xh(x)=5e^x-3x-5$**, κ=h(0), δείξτε ότι υπάρχει** $\rho\in(\alpha+3,\nu-8)$**: g(ρ)=0 όπου α ο σταθερός όρος του g(x).**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $R\varepsilon(0,1)$**:** $(\nu-13)R^3+(\alpha+k)\beta^2R^2+k\beta R+10\mu=0$

Είναι $f'(x)=6x^2-18x+6\mu$

Επειδή στα ρ_1, ρ_2 Τ.Α. αυτές ρίζες της f' και Δ>0

Τότε $\rho_1+\rho_2=S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{18}{6}=3$ και $P_1\cdot P_2=P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{6\mu}{6}=\mu$

Είναι $5\rho_1^3\rho_2-4\rho_1^2\rho_2+5\rho_1\rho_2^3-4\rho_1\rho_2^2=2\mu+3\Leftrightarrow 5\rho_1\rho_2(\rho_1^2+\rho_2^2)-4\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)=2\mu+3$

$\Leftrightarrow 5\rho_1\rho_2[(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2]-4\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)=2\mu+3\Leftrightarrow 5\mu[3^2-2\mu]-4\mu\cdot 3-2\mu-3=0$

$$\Leftrightarrow -10\mu^2+31\mu-3=0\ \left\langle\begin{array}{lll}\mu=3 & f'(x)=6x^2-18x+18 & \Delta<0\quad \text{απορ.}\\ \mu=\dfrac{1}{10} & f'(x)=6x^2-18x+\dfrac{6}{10} & \Delta>0\quad \text{δεκτή}\end{array}\right.$$

Έστω $g(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$

$\nu=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\ldots+\alpha_1+\alpha_0=g(1)=9\Rightarrow\nu=9$

α=α_0=g(0)=-3 $\Rightarrow\alpha=-3$

$$\kappa=h(0)=\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\frac{5e^x-3x-5}{x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to0}\frac{5e^x-3}{1}=2\Rightarrow\kappa=2$$

Πρέπει να βρω $\rho\in(\alpha+3,\ \nu-8)=(0,1)$, g(0)=-3<0, g(1)=9>0

Από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$: g(ρ)=0

Εστω η $\Phi(x)=(\nu-13)x^3+(\alpha+k)\beta^2x^2+k\beta x+10\mu$ στο [0,1] τότε $\Phi(x)=-4x^3-\beta^2x^2+2\beta x+1$, είναι $\Phi(0)\Phi(1)=-(\beta^2-2\beta+5)<0,\quad \Delta<0$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $R\varepsilon(0,1)$:

$\Phi(R)=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow(v-13)R^3+(\alpha+k)\beta^2R^2+k\beta R+10\mu=0$

61. Αν για τους μιγαδικούς z,w ισχύει $|z+iw|\le|iz+w|\ \forall x\varepsilon R$ με z=1+α^x i και w=e^x+(ex+1)i. Εστω η $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+x^2+\beta x+1$ που παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0=-1 και η συνάρτηση g περιττή στο R με g(αx²+x+1)+g(x²+βx-1)=xg(1)
Δείξτε ότι η εφαπτόμενη στο x_0=1 της C_g είναι παράλληλη στον xx', ενώ αν $h'(x)=\begin{vmatrix} x & h(x)\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}$ τότε η h'+h'' σταθερή

Είναι $|z+iw|\le|iz+w|\Leftrightarrow|z+iw|^2\le|iz+w|^2\Leftrightarrow(z+iw)\cdot(\overline{z}-\overline{w}\,i)\le(i\,z+w)\cdot(-\overline{z}\,i+\overline{w})$

$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\overline{w}i+iw\overline{z}+w\overline{w}\le z\overline{z}+iz\overline{w}-w\overline{z}i+w\overline{w}\Leftrightarrow iw\overline{z}+iw\overline{z}-z\overline{w}i-z\overline{w}i\le 0\Leftrightarrow 2iw\overline{z}-2iz\overline{w}\le 0$

$\Leftrightarrow iw\overline{z}-i\overline{w}z\le 0\Leftrightarrow i(w\overline{z}-\overline{\overline{w}\,z})\le 0\Leftrightarrow i(2i\,\mathrm{Im}(w\overline{z})\le 0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(w\overline{z})\ge 0$ (1)

w=e^x+(ex+1)i , $\overline{z}=1-\alpha^x i$

Άρα $w\overline{z}=[e^x+(ex+1)i]\cdot(1-\alpha^x i)$

$\Leftrightarrow w\overline{z}=(e^x+exi+i)\cdot(1-\alpha^x i)=e^x-e^x\alpha^x i+exi-\alpha^x exi^2+i-\alpha^x i^2$

$\Leftrightarrow w\overline{z}=e^x-e^x\alpha^x i+exi+\alpha^x ex+i+\alpha^x\Leftrightarrow w\overline{z}=e^x+\alpha^x+\alpha^x ex+(-e^x\alpha^x+ex+1)i$

Είναι $\mathrm{Im}(w\overline{z})\ge 0\Leftrightarrow -e^x\alpha^x+ex+1\ge 0$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=-e^x\alpha^x+ex+1$, $g'(x)=-e^x\alpha^x-e^x\alpha^x\ell n\alpha+e$, g(0)=0

Άρα για κάθε $x\in IR$ είναι $g(x)\ge g(0)$

Άρα η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=0. Άρα από Θ. Fermat είναι

$g'(0)=0\Leftrightarrow 1-\ell n\alpha+e=0\Leftrightarrow -\ell n\alpha=1-e\Leftrightarrow \ell n\alpha=e-1\Leftrightarrow \alpha=e^{e-1}$

Είναι $f'(x)=x^3+2x^2+2x+\beta$, στο x=-1 Τ.Α άρα $f'(-1)=0\Leftrightarrow -1+2-2+\beta=0\Leftrightarrow\beta=1$

$g(\alpha x^2+x+1)+g(x^2+6x-1)=xg(1)$ (1)

$(1)\Rightarrow g'(\alpha x^2+x+1)(2\alpha x+1)+g'(x^2+\beta x-1)(2x+\beta)=g(1)$ (2)

Για x=0 $(1)\Rightarrow g(1)+g(-1)=1\cdot g(1)\Rightarrow g(1)-g(1)=g(1)$ (g περιττή)

$\Leftrightarrow 0=g(1)$

Για x=0 $(2)\Rightarrow g'(1)+g'(-1)=g(1)\Rightarrow g'(1)+g'(-1)=0\Rightarrow g'(1)+g'(1)=0\Rightarrow g'(1)=0$

Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον xx' γιατί αν g περιττή $\Rightarrow$ g' άρτια

Είναι $h'(x)=\begin{vmatrix} x & h(x)\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}\Rightarrow h'(x)=x\alpha-\beta h(x)$, $h''(x)=\alpha-\beta h'(x)$

Τότε $h'(x)+h''(x)=x\alpha-h(x)+\alpha-h'(x)$

Τότε

$[h'(x)+h''(x)]'=\alpha-h'(x)+0-h''(x)=\alpha-[x\alpha-\beta h(x)]-[\alpha-\beta h'(x)]=\alpha-x\alpha+\beta h(x)-\alpha+h'(x)$

$=-h'(x)+h'(x)=0$ άρα $h'(x)+h''(x)=c$

62. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2000$ **είναι γνησίως φθίνουσα στο (2, 4) και** $g(x)=\dfrac{x^2-\kappa x+1}{x^2+x+1}$ **να έχει σύνολο τιμών το [α+7, β+2α-4] με κ<-1 τότε για την h: [κ, β]** $\to R_+^*$ **υπάρχει ένα x_0ε(κ,β) :** $\dfrac{h(\beta)}{h(\kappa)}=e^{\frac{28h'(x_0)}{h(x_0)}}$ **.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	Ο.Ε $g(-1)$	$\nearrow$	Ο.Μ $g(1)$	$\searrow$	1

Είναι $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta$ Δ>0,

$S=-\dfrac{2\alpha}{3}=2+4\Leftrightarrow \alpha=-9$, $P=\dfrac{\beta}{3}=2\cdot 4\Leftrightarrow \beta=24$

$$g'(x)=\frac{(\kappa+1)(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$$

Το σύνολο τιμών το $[g(-1),g(1)]$ πρέπει

να είναι το [α+7, β+2α-4]=[-2,2] άρα $\begin{cases} g(-1)=-2 \\ g(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\kappa=-2 \\ \dfrac{2-\kappa}{3}=2 \end{cases} \Rightarrow \kappa=-4$

Τότε $h:[\kappa,\beta]\to R_+^* \Rightarrow h:[-4,24]\to R_+^*$, Έστω η F με $F(x)=\ell n h(x)$ στο [-4,24]

Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. για την F

$\exists\ x_0\in(-4,24)$:

$$F'(x_0)=\frac{F(24)-F(-4)}{24-(-4)}\Rightarrow \frac{h'(x_0)}{h(x_0)}=\frac{\ell nh(24)-\ell nh(-4)}{28}\Leftrightarrow \frac{28h'(x_0)}{h(x_0)}=\ell nh(\beta)-\ell nh(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{28h'(x_0)}{h(x_0)}=\ell n\frac{h(\beta)}{h(\kappa)}\Leftrightarrow \frac{h(\beta)}{h(\kappa)}=e^{\frac{28h'(x_0)}{h(x_0)}}$$

63. **Εστω η Φ συνεχής στο [0,+ ∞) και** $(\sqrt{x}-1)\Phi(x)=\ln x-1+x$ **τότε** $\alpha=\dfrac{\Phi(1)}{4}$

Οι $g(x)=2x^2+3x-(5\beta+4)$ $t(x)=x^2+2x-(3\beta+2)$ **με** $\beta\in N$ **τέμνονται πάνω στον xx'**

Αν h(β)=βh(α) με την h παραγωγίσιμη στο R τότε $\exists\ x_0\in(\alpha,\beta)$ **ώστε η εφαπτομένη στο** $M(x_0,h(x_0))$ **να περνά από την αρχή αξόνων.**

Αν η f' γνησίως αύξουσα $\forall\ x\in IR$ **τότε** $f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$ $\forall\ x\in[\alpha,\beta]$

Είναι $(\sqrt{x}-1)\Phi(x)=\ln x-1+x\Leftrightarrow \Phi(x)=\dfrac{\ln x-1+x}{\sqrt{x}-1}$ για κάθε xε[0,+ ∞)-{1}

Επειδή η Φ συνεχής τότε $\Phi(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-1+x}{\sqrt{x}-1}=...=4$ τότε α=1

Έστω $x_0\in R$ πρέπει $\left.\begin{matrix} g(x_0)=0 \\ t(x_0)=0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 2x_0^2+3x_0=5\beta+4 \\ x_0^2+2x_0=3\beta+2 \end{matrix}$

Σύστημα ως προς x_0^2 και x_0 άρα: $D=.....,\ D_{x_0^2}=.......,\ D_{x_0}=.......,$ τότε β=2

Τότε h(2)=2h(1)

Πρέπει η εφαπτομένη στο $M(x_0,\ h(x_0))$ η ε: $y-h(x_0)=h(x_0)\cdot(x-x_0)$ να περνά από αρχή. Άρα $0-h(x_0)=h'(x_0)\cdot(0-x_0)\Rightarrow h'(x_0)x_0-h(x_0)=0$

Έστω η G με $G(x)=\dfrac{h(x)}{x}$ στο [1,2] εφαρμόζω το Θ. Rolle……….

Στο [α, x] με $x\in[\alpha,\beta]$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ x_0\in(\alpha,x)$: $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Είναι

$$x_0<x\le\beta\Rightarrow x_0\le\beta\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_0)\le f'(\beta)\Rightarrow\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\le f'(\beta)\overset{x>\alpha}{\Rightarrow} f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)\cdot(x-\alpha)$$

64. **Έστω f παραγωγίσιμη με $f(x+\ell n x)=x^{2000}+999$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο x=1 περνά από αρχή αξόνων.**

Παραγωγίζω την σχέση

$$[f(x+\ell n x)]'=[x^{2000}+999]'\Rightarrow f'(x+\ell n x)(x+\ell n x)'=2000x^{1999}\Rightarrow f'(x+\ell n x)\left(1+\frac{1}{x}\right)=2000x^{1999}\quad(1)$$

Για x=1 η αρχική $f(1+\ell n1)=1^{2000}+999\Leftrightarrow f(1)=1000$

Για x=1 $(1)\Rightarrow f'(1+\ell n1)\left(1+\dfrac{1}{1}\right)=2000\cdot1^{1999}\Rightarrow f'(1)\cdot2=2000\Rightarrow f'(1)=1000$

Τότε η εφαπτομένη ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1000=1000(x-1)\Leftrightarrow y=1000x$

Που περνά από αρχή αξόνων

65. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [-3,5] και f(5)=2 $\forall\ x\in(-3,5)$ είναι $-1\le f'(x)\le3$. Να δείξτε ότι: $-22\le f(-3)\le10$**

Η f συνεχής στο [-3,5] γιατί είναι παραγωγίσιμη

Η f παραγωγίσιμη στο (-3,5)

Εφαρμόζεται για την f στο [-3,5] το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.

$\exists\ x_0\in(-3,5):\ f'(x_0)=\dfrac{f(5)-f(-3)}{5-(-3)}\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{2-f(-3)}{8}$

Είναι $-1\le f'(x_0)\le3\Leftrightarrow-1\le\dfrac{2-f(-3)}{8}\le3\Leftrightarrow-8\le2-f(-3)\le24$

$\Leftrightarrow-10\le-f(-3)\le22\Leftrightarrow-22\le f(-3)\le10$

66. **Αν για την παραγωγίσιμη f στο R ισχύει f(-1)=λ-κ, f(2)=2κ-λ, f(4)=4κ-λ να δείξτε ότι $\exists\ x_0\in IR$: $f''(x_0)=0$**

Εφαρμόζεται στην f το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [-1,2] τότε $\exists\ x_1 \in (-1,2):\ f'(x_1)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{2\kappa-\lambda-\lambda+\kappa}{3}=\dfrac{3\kappa}{3}=\kappa$

Εφαρμόζεται στην f το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο [2,4]

τότε $\exists\ x_2 \in (2,4):\ f'(x_2)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{4\kappa-\lambda-2\kappa+\lambda}{2}=\dfrac{2\kappa}{2}=\kappa$. Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)$

Εφαρμόζεται στην f' στο $[x_1,x_2]$ το Θ. Rolle

$\exists\ x_0 \in (x_1,x_2):\ f''(x_0)=0$

67. **Δείξτε ότι** $\forall\ x\in(0,+\infty)$ **ισχύει** $1<e^{x^2}<2x^2e^{x^2}+1$

Έστω η συνάρτηση f με $f(t)=e^{t^2}$ ορισμένη στο [0,x], x>0

Η f συνεχής στο [0,x]

Η f παραγωγίσιμη στο (0,x) με $f'(t)=2te^{t^2}$

Εφαρμόζεται στο [0,x] για την f το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.

$\exists\ \kappa\in(0,x):\ f'(\kappa)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ (1)

Είναι $f''(t)=2e^{t^2}+4t^2e^{t^2}>0\ \ \forall\ t>0$

Τότε f' γνησίως αύξουσα

Είναι $0<\kappa<x\Rightarrow f'(0)<f'(\kappa)<f'(x)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}0<\dfrac{e^{x^2}-1}{x}<2xe^{x^2}\Rightarrow 0<e^{x^2}-1<2x^2e^{x^2}\Rightarrow 1<e^{x^2}<2x^2e^{x^2}+1$

68. **Έστω η παραγωγίσιμη f με** $f(2001)\neq 0$ **και** $f(2001)+f(2004)=0$**. Δείξτε ότι**

$\exists\ \alpha,\beta\in(2001,2004)$**:** $\dfrac{1}{f'(\alpha)}+\dfrac{1}{f'(\beta)}=-\dfrac{3}{f(2001)}$

Είναι $f(2004)=-f(2001)$ και $f(2001)\cdot f(2004)=-f^2(2001)<0$ τότε από Θ. Bolzano

$\exists\ \rho\in(2001,2004):$ f(ρ)=0

Στο [2001,ρ] εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \alpha\in(2001,\rho):$

$f'(\alpha)=\dfrac{f(\rho)-f(2001)}{\rho-2001}=\dfrac{-f(2001)}{\rho-2001}$

Στο [ρ,2004] εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \beta\in(\rho,2004):$

$f'(\beta)=\dfrac{f(2004)-f(\rho)}{2004-\rho}=\dfrac{-f(2001)}{2004-\rho}$

Τότε $\dfrac{1}{f'(\alpha)}+\dfrac{1}{f'(\beta)}=\dfrac{\rho-2001}{-f(2001)}+\dfrac{2004-\rho}{-f(2001)}=-\dfrac{3}{f(2001)}$

69. **Αν** $\forall\ x\in R\ \ [f''(x)]^3<-1000$ **να δείξτε ότι** $2f(0)>f(2001)+f(-2001)$

Επειδή $[f''(x)]^3<-1000\Rightarrow f''(x)<-10\Rightarrow f''(x)<0$ άρα f' γνησίως φθίνουσα

Στο [-2001,0] εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.

$\exists\ \alpha\in(-2001,0):\ f'(\alpha)=\dfrac{f(0)-f(-2001)}{2001}$

Στο [0,2001] εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.

$\exists\ \beta \in (0, 2001):\ f'(\beta) = \dfrac{f(2001) - f(0)}{2001}$

Είναι $\alpha < \beta \Rightarrow f'(\alpha) > f'(\beta) \Rightarrow \dfrac{f(0) - f(-2001)}{2001} > \dfrac{f(2001) - f(0)}{2001}$

$\Rightarrow 2f(0) > f(2001) + f(-2001)$

70. **Έστω η f παραγωγίσιμη στο R με** $f(2001) < f'(x) < f(2003)$ **δείξτε ότι** $\exists\ x_0 \in (2000, 2002):\ f(x_0) = 0$

Εφαρμόζουμε στο [2000,2001] Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \alpha \in (2000, 2001):\ f'(\alpha) = \dfrac{f(2001) - f(2000)}{1}$

Είναι $f(2001) < f'(\alpha) \Rightarrow f(2001) < f(2001) - f(2000) \Rightarrow f(2000) < 0$

Εφαρμόζουμε στο [2002,2003] Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \beta \in (2002, 2003):\ f'(\beta) = \dfrac{f(2003) - f(2002)}{1}$

Επίσης $f'(\beta) < f(2003) \Rightarrow f(2003) - f(2002) < f(2003) \Rightarrow f(2002) > 0$

Στο [2000,2002] εφαρμόζω το Θ. Bolzano

$\exists\ x_0 \in (2000, 2002):\ f(x_0) = 0$

71. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση** $f:[0, +\infty) \to R$ **με f(0)=0 και f΄(0)=2000. Αν για κάθε** $x, y \in (0, +\infty)$ **ισχύει:** $f(x+y) \le e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x)$ **(1) να βρεθεί ο τύπος της f.**

Από την (1) έχουμε ισοδύναμα: $f(x+y) - e^x \cdot f(y) - e^y \cdot f(x) \le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με: $g(y) = f(x+y) - e^x \cdot f(y) - e^y \cdot f(x)$,

$g(0) = f(x) - e^x \cdot f(0) - e^0 \cdot f(x) = f(x) - f(x) - 0 = 0$ και έτσι είναι $g(y) \le g(0) = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $g'(y) = f'(x+y) - e^x f'(y) - e^y f(x)$, $y \in [0, +\infty)$

Επειδή η g παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού y=0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, είναι σύμφωνα με το Θ. Fermat:

$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - e^x f'(0) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 2000e^x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 2000$

$\Leftrightarrow [f(x)e^{-x}]' = [2000x]' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 2000x + c \Leftrightarrow f(x) = 2000xe^x + ce^x$

για x=0, $f(0) = 2000e^0 + ce^0 \Leftrightarrow -2000 = c$, τότε $f(x) = 2000xe^x - 2000e^x$

72. **Εστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει f(α)=f(β)=0 και f΄΄(x)<0 για κάθε xεR. Να δείξτε ότι f(x)>0 για κάθε xε(α,β).**

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0$.

Για κάθε ισχύει ότι:

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα.

Για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

x	α	x_0	β
f ’(x)	+	-	
f(x)	f(α)=0 ↗	↘ f(β)=0	

Για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) > 0$ Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα
Τότε προκύπτει ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ f(x)>0.

73. Υποθέτουμε ότι η πραγματική συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και g''(x)>0 για όλα τα x∈[α,β]. Αν g(α)=g(β)=2001, να αποδείξετε ότι: g(x)<2001 για κάθε x∈(α,β).

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $g'(x_0) = 0$.
Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι: $g'' > 0 \Leftrightarrow g'$ γνησίως αύξουσα.
Για $x_0 > x \Leftrightarrow g'(x_0) > g'(x) \Leftrightarrow g'(x) < 0$
Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως ισχύει για $x > \alpha \Leftrightarrow g(x) < g(\alpha) = 2001$ (1)
Για $x > x_0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(x_0) = 0$
Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x < \beta \Leftrightarrow g(x) < g(\beta) = 2001$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) λοιπόν προκύπτει ότι: $g(x) < 2001$για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

74. Έστω η f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), α<β με f(α)=f(β)=0 και f(x)≠0 για x∈(α,β). Να δείξετε ότι υπάρχει ρ∈(α,β) με $\frac{f'(p)}{f(p)} = 2001$.

Θεωρούμε $g(x) = e^{-2001x} \cdot f(x)$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και g(α)=g(β)=0.
Σύμφωνα λοιπόν με το Θ. Rolle υπάρχει $p \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε g'(ρ)=0 (1)
Όμως $g'(x) = -2000e^{-2001x} \cdot f(x) + e^{-2001x} \cdot f'(x) = e^{-2001x}\left(-2001 f(x) + f'(x)\right)$ και $e^{-2001x} \neq 0$ (2)
Άρα από την (1) και (2) προκύπτει ότι: $f'(p) = 2001 f(p) \Rightarrow \frac{f'(p)}{f(p)} = 2001.$

75. **Έστω συνάρτηση g:R→R δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $g\left(\frac{x}{y}\right) = g(x) - 2g(y) + (2^x - 4)y + \ln(2000)$. Να αποδείξετε ότι: g''(ρ)=0**

Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς y: $g'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -2g'(y) + (2^x - 4)$ (1)
Για y=1 έχουμε: $-xg'(x) = -2g'(1) + 2^x - 4$ (2)
Θέτουμε στην (2), x=1 και x=2 οπότε παίρνουμε: g'(1)=-2 και g'(2)=-2.
Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και g'(1)=g'(2), τότε με το Θ. Rolle υπάρχει $p \in (1, 2)$τέτοιο ώστε: g''(ρ)=0.

76. **Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g:** $R \to R$ **για τις οποίες ισχύουν:** $f'(x)-f(x)=g'(x)-g(x)$ **για κάθε** $x \in R$ **και** $f(1821)=g(1821)$
Να δειχθεί ότι $f=g$.

Είναι

$$f'(x)-f(x)=g'(x)-g(x) \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow [f(x)-g(x)]'-[f(x)-g(x)]=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)-g(x)]'e^{-x}-[f(x)-g(x)]e^{-x}=0 \Leftrightarrow \left[(f(x)-g(x))e^{-x}\right]'=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)-g(x)]e^{-x}=c \Leftrightarrow f(x)-g(x)=c\,e^{x}$$

Για x=1821 $f(1821)-g(1821)=c\,e^{1821} \Leftrightarrow 0=c$ άρα $f(x)=g(x)$

77. **Έστω οι συναρτήσεις f, g:** $(0,+\infty) \to R$ **για τις οποίες ισχύουν:**

- $f(1)=g(1)=0$
- $f'(x)=-e^{g(x)}$ **για κάθε** $x>0$.
- $g'(x)=-e^{f(x)}$ **για κάθε** $x>0$.

Να δειχθεί ότι: α. $f=g$

β. Η συνάρτηση h με $h(x)=e^{-f(x)}-x$ **είναι σταθερή και κατόπιν να βρεθεί ο τύπος της f.**

α. $f''(x)=\left(-e^{g(x)}\right)'=-e^{g(x)}\cdot g'(x)=f'(x)\cdot g'(x)$

$g''(x)=\left(-e^{f(x)}\right)'=-e^{f(x)}\cdot f'(x)=g'(x)\cdot f'(x)$

$f''(x)=g''(x) \Leftrightarrow (f'(x))'=(g'(x))'$ οπότε: $f'(x)=g'(x)+c_1$

$f'(1)=-e^{g(1)}=-1$ και $g'(1)=-e^{f(1)}=-1$

δηλαδή f'(1)=g'(1) και έτσι $c_1=0$.

$f'(x)=g'(x)$ οπότε $f(x)=g(x)+c_2$

Για x=1 δίνει: $f(1)=g(1)+c_2 \Leftrightarrow 0=0+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Άρα $f(x)=g(x)$, $x \in (0,+\infty)$.

β. $h'(x)=\left(e^{-f(x)}-x\right)'=\left(e^{-f(x)}\right)'-(x)'=e^{-f(x)}\cdot(-f(x))'-1=$

$=-e^{-f(x)}\cdot f'(x)-1=-e^{-f(x)}\cdot\left(-e^{g(x)}\right)-1=e^{-f(x)}\cdot e^{g(x)}-1=e^{g(x)-f(x)}-1=e^{0}-1=1-1=0$

και έτσι $h(x)=c$, $c \in R$ δηλαδή η h είναι σταθερή. Είναι:

$h(1)=c \Leftrightarrow e^{-f(x)}-1=c \Leftrightarrow e^{0}-1=c \Leftrightarrow 1-1=c \Leftrightarrow c=0$ οπότε:

$h(x)=0 \Leftrightarrow e^{-f(x)}-x=0 \Leftrightarrow e^{-f(x)}=x \Leftrightarrow -f(x)=\ln x \Leftrightarrow f(x)=-\ln x$, x>0.

78. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:** $(0,+\infty) \to R$. **Αν για κάθε** $x>0$ **ισχύει ότι:** $f'(\eta\mu x)=x$ **και** $f(1)=0$ **να βρεθεί το f**$\left(\frac{1}{2}\right)$.

Είναι $[f(\eta\mu x)]'=f'(\eta\mu x)(\eta\mu x)'=x\cdot\sigma\upsilon\nu x=x(\eta\mu x)'+\eta\mu x-\eta\mu x$

$\Rightarrow [f(\eta\mu x)]'=[x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x]' \Rightarrow f(\eta\mu x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+c$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad f(1)=\frac{\pi}{2}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+c\Rightarrow 0=\frac{\pi}{2}+c\Leftrightarrow c=-\frac{\pi}{2}$

άρα $f(\eta\mu x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}$

Για $x=\frac{\pi}{6}$ $\quad f\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots$

79. Να βρεθούν τα σημεία που η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της $f(x)=x\ell nx-\frac{x^2}{2}$ **να είναι παράλληλη στον xx΄.**

Είναι $f'(x)=\ell nx+1-x$

Τα σημεία που η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον xx΄ είναι όταν $f'(x)=0\Leftrightarrow \ell nx+1-x=0$.

Παρατηρώ ότι για x=1 είναι λύση.

Έστω η g με $g(x)=\ln x+1-x$ $\quad g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

Τότε $g(x)\le g(1)=0$ που είναι μοναδική.

x	0		1		$+\infty$
g ’(x)		+		-	
g(x)		↗	Ο.Μ	↘	

80. Ο ρυθμός μεταβολής των αποβλήτων σ’ ένα εργοστάσιο δίνεται από τη σχέση $t-1-\ell nt=A'(t)$ **όπου t μήνες t>0 A(1)=5. Ποια η ποσότητα των αποβλήτων για t=e και για άπειρους μήνες;**

Είναι $A'(t)=t-1-\ell nt$. Από την προηγούμενη $t-1-\ell nt=\left(\frac{t^2}{2}-t\ell nt\right)'$

Τότε $A'(t)=\left[\frac{t^2}{2}-t\ell nt\right]'\Leftrightarrow A(t)=\frac{t^2}{2}-t\ell nt+c$

$A(1)=5\Leftrightarrow \frac{1}{2}+c=5\Leftrightarrow c=\frac{9}{2}$, $\quad A(t)=\frac{t^2}{2}-t\ell nt+\frac{9}{2}$

Τότε A(e)=…

Ενώ για άπειρους μήνες $A=\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}-t\ell nt+\frac{9}{2}\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[t^2-t\ell nt\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[t^2\left(1-\frac{\ell nt}{t}\right)\right]=+\infty$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ell nt}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1}=0$

81. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν μηδενίζονται στο R και ισχύει $f''(x)=g''(x)=0$**,** $2g(x)-1=0$ **και** $f'(1)=0$ **για κάθε** $x\in R$**, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση** $h(x)=\ln|f(x)|+\frac{1}{g(x)}$ **είναι σταθερή στο R.**

Είναι $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{f'(x)g^2(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g^2(x)}$

Έστω η t με $t(x)=f'(x)g^2(x)-f(x)g'(x)$

$t'(x)=f''(x)g^2(x)+f'(x)\,2g(x)g'(x)-f'(x)g'(x)-f(x)g''(x)$

$=f'(x)g'(x)\left[2g(x)-1\right]=0\Rightarrow t(x)=c$

Για x=1 $t(1)=c=f'(1)g^2(1)-f(1)g'(1)=0-0=0$

άρα $t(x)=0\Rightarrow h'(x)=0\Rightarrow h(x)=c$.

82. Οι επιστήμονες μιας γαλακτοκομικής εταιρίας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το μέσο βάρος γάλακτος που παράγει ημερησίως μια γαλακτοφόρα αγελάδα ηλικίας t ετών είναι:

$$B(t)=\begin{cases}-\dfrac{t^2}{2}+10t-30 & ,\alpha\nu\ \ 3\le t\le 12\\ 13 & ,\alpha\nu\ \ 12<t\le 15\end{cases}$$

. Αφού υποτεθεί ότι το t μεταβάλλεται σε διάστημα, να βρεθεί η ηλικία του ζώου κατά την οποία έχουμε τη μεγαλύτερη απόδοση και η απόδοση αυτή.

Η Β συνεχής στο [3,12) και (12,15]

$$\lim_{t\to 12^-}B(t)=\lim_{t\to 12}\left(-\frac{t^2}{2}+10t-30\right)=13=\lim_{t\to 12^+}B(t)=B(12)$$

Άρα η Β συνεχής στο [3,15]

και $B'(t)=-t+10$

$B(t)\le B(10)$, άρα έχουμε την μέγιστη απόδοση όta t=10 ετών.

t	3	10	15
B ’(t)	+		-
B(t)	↗	O.M	↘

83. Έστω f συνάρτηση συνεχής για $x\ge 0$, παραγωγίσιμη για x>0 με f(0)=0 και f΄(x) αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι για κάθε x>0 αύξουσα.

Έχουμε $g'x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$

Εστω η συνάρτηση: t(x)=f΄(x)x-f(x) στο [0,+∞) με t΄(x)=f΄΄(x)x>0, γιατί η f΄ είναι γνησίως αυξουσα έτσι

x>0$\Rightarrow$t(x)>t(0)=0$\Rightarrow$t(x)>0$\Rightarrow$g΄(x)>0 άρα η g γνησίως αύξουσα.

84. **Δίνεται η συνάρτηση με** $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ **, να δείξτε ότι f(x)>0 για κάθε x>0 και** $2\sqrt{e\pi}\left(\sqrt{e}-\sqrt{\pi}\right)<\ln\dfrac{e^{\sqrt{\pi}}}{\pi^{\sqrt{e}}}$

Είναι $f'(x)=\dfrac{2x-2+\ln x}{4x\sqrt{x}}$

Αν $\begin{cases} 0<x<1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2<0 \\ \ln x<0 \Rightarrow 2x-2+\ln x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \end{cases} \\ x>1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2>0 \\ \ln x>0 \Rightarrow 2x-2+\ln x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \end{cases} \end{cases}$

X	0	1	$+\infty$
f΄(x)		-	+
f(x)		↘	↗
		O.E f(1)=1	

Είναι $f(x)\geq f(1)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$

Είναι e<π ⇔ f(e)<f(π)

$\Leftrightarrow \sqrt{e}-\dfrac{\ln e}{2\sqrt{e}}<\sqrt{\pi}-\dfrac{\ln\pi}{2\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow \dfrac{2e-\ln e}{\sqrt{e}}<\dfrac{2\pi-\ln\pi}{\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow 2e\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\ln e<2\pi\sqrt{e}-\sqrt{e}\ln\pi$

$2\sqrt{e\pi}\left(\sqrt{e}-\sqrt{\pi}\right)<\ln\dfrac{e^{\sqrt{\pi}}}{\pi^{\sqrt{e}}}$

85. **Έστω η παραγωγίσιμη f:** $R\to R$ **δύο φορές στο R,** $f(0)=f'(0)=1$ **και** $f''(x)=f(x)\ \ \forall\ x\in R$ **. Ποιο το εμβαδόν του χωρίου από** C_f **, xx', x=0, x=1**

Είναι $f''(x)=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow \left[f'(x)+f(x)\right]'=f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=c\cdot e^x$ (1)

Για $x=0$ $f'(0)+f(0)=c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=2$ $(1)\Rightarrow f'(x)+f(x)=2e^x$

$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)e^x\right]'=\left[e^{2x}\right]' \Leftrightarrow f(x)e^x=e^{2x}+\alpha$

Για $x=0$ $f(0)e^0=e^0+\alpha \Leftrightarrow 1=1+\alpha \Leftrightarrow 0=\alpha$

άρα $f(x)e^x=e^{2x} \Leftrightarrow f(x)=e^x$

Είναι $f(x)>0\ \ \forall\ x\in[0,1]$

Τότε $E=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e^1-e^0=e-1$ τ.μ.

86. **Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β] καθώς και το πολυώνυμο** $g(z)=z^3+f(\alpha)z^2+f(\beta)z+1$**,** $z\in C$ **. Εάν ο αριθμός 1+i είναι ρίζα του πολυωνύμου να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** $\theta\in(\alpha,\beta)$ **ώστε να ισχύει** $f(\theta)=0$ **.**

Το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές και είναι τρίτου βαθμού. Άρα έχει μια ρίζα πραγματική έστω $\rho\in R$ και δύο συζυγείς τις 1+i και 1-i. Επομένως

$g(z)=(z-\rho)(z^2-2z+2)\Leftrightarrow g(z)=z^3-(\rho+2)z^2+(2\rho+2)z-2\rho$.

Άρα $z^3+f(\alpha)z^2+f(\beta)z+1=z^3-(\rho+2)z^2+(2\rho+2)z-2\rho$ για κάθε $z\in C$.

Επομένως προκύπτει $f(\alpha)=-(\rho+2)$, $f(\beta)=2\rho+2$ και $-2\rho=1 \Leftrightarrow \rho=-\frac{1}{2}$. Τότε $f(\alpha)=-\frac{3}{2}$ και $f(\beta)=1$.

$f(\alpha)\cdot f(\beta)=-\frac{3}{2}<0$. Η συνάρτηση f στο [α,β] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\theta)=0$.

87. **Δίνεται ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z και μια συνάρτηση f συνεχής στο R. Εάν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|z\,f(x)-3|-3}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|z\,f(x)+1|-1}{x-1}$ υπάρχουν στο R να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in [0,1]$ ώστε $f(\theta)=0$.**

Εφόσον υπάρχει στο R το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|z\,f(x)-3|-3}{x}$ και το όριο του παρονομαστή είναι μηδέν θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0}\left(|z\,f(x)-3|-3\right)=0 \Leftrightarrow |z\,f(0)-3|=3$ (1).

Έστω ότι $z=\alpha+\beta i$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$. Τότε η σχέση (1) γίνεται $|\alpha\,f(0)-3+if(0)\beta|=3 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha f(0)-3)^2+f^2(0)\beta^2}=3 \Leftrightarrow (\alpha\,f(0)-3)^2+f^2(0)\beta^2=9 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 f^2(0)+9-6\alpha\,f(0)+f^2(0)\beta^2=9 \Leftrightarrow \alpha^2 f^2(0)+\beta^2 f^2(0)-6\alpha f(0)=0 \Leftrightarrow$

$f(0)\left(\alpha^2 f(0)+\beta^2 f(0)-6\alpha\right)=0$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν $f(0)=0$ τότε θ=0.
- Εάν $f(0)\neq 0$ τότε $\left(\alpha^2+\beta^2\right)f(0)-6\alpha=0 \Leftrightarrow f(0)=\frac{6\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

Εφόσον υπάρχει στο R το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|z\,f(x)+1|-1}{x-1}$ και ο παρονομαστής έχει όριο μηδέν πρέπει $\lim\limits_{x\to 1}\left(|z\,f(x)+1|-1\right)=0 \Leftrightarrow |z\,f(1)+1|=1 \Leftrightarrow |\alpha\,f(1)+1+\beta\,f(1)i|=1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha f(1)+1)^2+\beta^2 f^2(1)}=1 \Leftrightarrow \alpha^2 f^2(1)+2\alpha\,f(1)+1+\beta^2 f^2(1)=1 \Leftrightarrow$

$f(1)\left(\alpha^2 f(1)+\beta^2 f(1)+2\alpha\right)=0$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν $f(1)=0$ τότε θ=1.
- Εάν $f(1)\neq 0$ τότε $\left(\alpha^2+\beta^2\right)f(1)+2\alpha=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

Συνεπώς $f(0)\cdot f(1)=\frac{-12\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)}<0$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [0,1] άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in(0,1)$ ώστε $f(\theta)=0$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in[0,1]$ ώστε $f(\theta)=0$.

88. **Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $z^4+z^3+2z^2+z+1=0$ (1) και $z^{1996}+2z^{1998}+1=0$ (2) στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.**

Εχουμε: $z^4+z^3+2z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z^4+2z^2+1+z^3+z=0 \Leftrightarrow (z^2+1)^2+z(z^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$(z^2+1)(z^2+1+z)=0 \Leftrightarrow z^2+1=0$ ή $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z^2-i^2=0$ ή
$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\pm i$ ή $z^2+z+1=0$

Για $z=i$ έχουμε $i^{1996}+2i^{1998}+1=\left(i^4\right)^{499}+2\left(i^4\right)^{499}i^2+1=1-2+1=0$

άρα το $z=i$ είναι λύση και της εξίσωσης (2). Όμως η (2) έχει πραγματικούς συντελεστές οπότε έχει λύση και τη $z=-i$. Οι λύσεις της $z^2+z+1=0$ είναι οι μη πραγματικές κυβικές ρίζες της μονάδας. Αν z_0 είναι μία από αυτές θα ισχύει $z_0{}^3=1$ οπότε:

$z_0{}^{1996}+2z_0{}^{1998}+1=\left(z_0{}^3\right)^{665}z_0+2\left(z_0{}^3\right)^{666}+1=z_0+2+1=3+z_0\neq 0$.

Άρα οι κοινές λύσεις είναι οι $\pm i$.

89. **Έστω συνάρτηση f:** $(0,+\infty)\to R$ **παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ **και το σύνολο των μιγαδικών αριθμών** $A=\left\{\alpha^x+if(x),\ x>0\right\}$**. Αν υπάρχουν** $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ **με** $Arg(z_{x_1})=Arg(z_{x_2})$ **όπου** $z_{x_1},z_{x_2}\in A$**. Να αποδείξετε ότι:**

α. Υπάρχει $\theta\in(x_1,x_2)$ **ώστε:** $f'(\theta)=f(\theta)\ell n\alpha$**.**

β.Να δείξτε ότι η εφαπτόμενη της $g(x)=x^2+[f'(\theta)+1]x-f(\theta)\ln a$ **στο x=0 περνά από το σημείο Μ(1,1).**

α. Ο $z_{x_1}=a^{x_1}+if(x_1)$ απεικονίζεται στο $\mathrm{M}(a^{x_1},if(x_1))$ και $\varepsilon\varphi(Argz_{x_1})=\dfrac{f(x_1)}{\alpha^{x_1}}$

Έχουμε $Arg(z_{x_1})=Arg(z_{x_2})$ τότε $\varepsilon\varphi(Argz_{x_1})=\varepsilon\varphi(Argz_{x_2})$ ή $\dfrac{f(x_1)}{\alpha^{x_1}}=\dfrac{f(x_2)}{\alpha^{x_2}}$ (1).

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\alpha^x}$, $x\in[x_1,x_2]$. Η g παραγωγίζεται στο (x_1,x_2) με

$$g'(x)=\frac{f'(x)\alpha^x-f(x)\alpha^x\ell nx}{(\alpha^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ell nx}{\alpha^x}$$

Η g συνεχής στο $[x_1,x_2]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

$g(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{\alpha^{x_1}}=\dfrac{f(x_2)}{\alpha^{x_2}}=g(x_2)$ από την (1). Άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta\in(x_1,x_2)$ έτσι ώστε:

$$g'(\theta)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\theta)-\ell n\alpha\, f(\theta)}{\alpha^\theta}=0\Leftrightarrow f'(\theta)-\ell n\alpha\, f(\theta)=0\Leftrightarrow f'(\theta)=\ell n\alpha\, f(\theta)$$

β. Είναι $g'(x)=2x+[f'(\theta)+1]$ και η εφαπτόμενη στο x=0 είναι $y+f(\theta)\ln a=[f'(\theta)+1]x$ για να περνά από το Μ(1,1) πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, πράγματι έχουμε: $1+f(\theta)\ln a=[f'(\theta)+1]1\Leftrightarrow f'(\theta)=f(\theta)\ln a$

το οποίο ισχύει από το ερώτημα α.

90. **Έστω συνάρτηση f:** $[0,1] \to R$ **παραγωγίσιμη στο [0,1] και** $f(1)=f(0)$ **(1). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν** $x_1, x_2, ..., x_{2001} \in (0,1)$ **τέτοια ώστε** $f'(x_1)+f'(x_2)+...+f'(x_{2001})=0$**.**

Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε 2001 ισομήκη διαστήματα $\left[0,\frac{1}{2001}\right],\left[\frac{1}{2001},\frac{2}{2001}\right],\left[\frac{2}{2001},\frac{3}{2001}\right],...,\left[\frac{2000}{2001},1\right]$. Η f παραγωγίσιμη στο [0, 1], άρα παραγωγίσιμη σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα, οπότε και συνεχής σ' αυτά. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης τιμής. Οπότε υπάρχουν: $x_1 \in \left(0,\frac{1}{2001}\right), x_2 \in \left(\frac{1}{2001},\frac{2}{2001}\right), x_3 \in \left(\frac{2}{2001},\frac{3}{2001}\right),..., x_{2001} \in \left(\frac{2000}{2001},1\right)$

τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2001}\right)-f(0)}{\frac{1}{2001}}, \quad f'(x_2)=\frac{f\left(\frac{2}{2001}\right)-f\left(\frac{1}{2001}\right)}{\frac{2}{2001}-\frac{1}{2001}},$$

$$f'(x_3)=\frac{f\left(\frac{3}{2001}\right)-f\left(\frac{2}{2001}\right)}{\frac{3}{2001}-\frac{2}{2001}}, \ \ldots, \quad f'(x_{2001})=\frac{f(1)-f\left(\frac{2000}{2001}\right)}{1-\frac{2000}{2001}}$$

Οπότε: $f'(x_1)+f'(x_2)+...f'(x_{2001})=$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2001}\right)-f(0)}{\frac{1}{2001}}+\frac{f\left(\frac{2}{2001}\right)-f\left(\frac{1}{2001}\right)}{\frac{2}{2001}-\frac{1}{2001}}+\frac{f\left(\frac{3}{2001}\right)-f\left(\frac{2}{2001}\right)}{\frac{3}{2001}-\frac{2}{2001}}+...+\frac{f(1)-f\left(\frac{2000}{2001}\right)}{1-\frac{2000}{2001}}=$$

$$=\frac{f(1)-f(0)}{\frac{1}{2001}}=\frac{0}{\frac{1}{2001}}=0 \ .$$

91. **Έστω συνάρτηση f:** $R \to R$ **με** $f'(x)>0$ **για κάθε** $x \in R$**. Να αποδειχθεί ότι:**

α. Ορίζεται η αντίστροφη της f.

β. Η f^{-1} **είναι ολοκληρώσιμη στο** $f(R)$**.**

γ. Αν $f(\alpha)=\beta$ **και** $f(\beta)=\alpha$**, να δειχθεί ότι:** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f^{-1}(x)\,dx=0$**.**

δ. Αν η f είναι περιττή, τότε και η f^{-1} **είναι περιττή.**

α. Έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε η f θα είναι ¨1-1¨, άρα αντιστρέφεται.
β. Επειδή η f παραγωγίζεται, είναι γνησίως αύξουσα στο R και $f'(x_0) \neq 0$ για κάθε $x_0 \in R$, (από θεώρημα) θα παραγωγίζεται και η f^{-1} στο $f(x_0)$, δηλαδή f^{-1} συνεχής (σαν παραγωγίσιμη) οπότε και ολοκληρώσιμη.
γ. Θέτουμε $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x \Rightarrow dx = \left(f^{-1}(y)\right)' dy$. Επίσης για $x = \alpha \Rightarrow y = f(\alpha) = \beta$ και για $x = \beta \Rightarrow y = f(\beta) = \alpha$ οπότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f^{-1}(x)\,dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} y\left(f^{-1}(y)\right)' dy + \int_\beta^\alpha f^{-1}(x)\,dx = \int_\beta^\alpha y\left(f^{-1}(y)\right)' dy + \int_\beta^\alpha f^{-1}(x)\,dx =$$

$$= \left[y\, f^{-1}(y)\right]_\beta^\alpha - \int_\beta^\alpha f^{-1}(y)\,dy + \int_\beta^\alpha f^{-1}(x)\,dx =$$

$$= \alpha\, f^{-1}(\alpha) - \beta\, f^{-1}(\beta) - \int_\beta^\alpha f^{-1}(y)\,dy + \int_\beta^\alpha f^{-1}(y)\,dy = \alpha\beta - \beta\alpha$$

(αφού $f(\alpha) = \beta \Rightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ και $f(\beta) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\alpha) = \beta$).
δ. Επειδή η f περιττή, έχουμε: $x \in R$, $-x \in R$ (1) και $f(-x) = -f(x)$ (2). Για να είναι η $f^{-1} : f(R) \to R$ περιττή αρκεί: για $y \in f(R)$, $-y \in f(R)$ και $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

- Έστω $y \in f(R)$. Τότε υπάρχει $x \in R$ με $f(x) = y$ ή $f^{-1}(y) = x$ (3) άρα $-y = -f(x) = (\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta})\ f(-x) \in f(R)$ (αφού $-x \in R$).
- $f^{-1}(-y) = f^{-1}\left(f(-x)\right) = -x = -f^{-1}(y)$ από (3).

92. **Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο x=1. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, την συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ και τη συνάρτηση:**

$$g(x) = 3 + h'(1)x^2 + \frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)\,dt,\ x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:
α. $3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$
β. Υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $\left(x_0, g(x_0)\right)$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
γ. $g(x_0) = 3 + f(x_0)$

α. Επειδή h συνεχής συνάρτηση σαν πολυωνυμική, το 1 εσωτερικό σημείο και η h παρουσιάζει ακρότατο στο 1, από Θεώρημα Fermat έχουμε $h'(1) = 0$ (1). Όμως $h'(x) = 3\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma$ για κάθε $x \in R$ οπότε $h'(1) = 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.
β. Επειδή $h'(1) = 0$ η συνάρτηση g γίνεται: $g(x) = 3 + \int_\alpha^x f(t)\,dt$. Όμως η f συνεχής

στο $[\alpha,\beta]$, επομένως η g παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, άρα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επίσης $g(\alpha)=3=g(\beta)$. Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$. Δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ. Έχουμε: $g(x)=3+\frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)\,dt$, $(x>0)$ ή $xg(x)=3x+\int_\alpha^x f(t)\,dt$ ή παραγωγίζοντας:
$g(x)+xg'(x)=3+f(x)$
Όμως $g'(x_0)=0$ άρα για $x=x_0$ έχουμε:
$g(x_0)+x_0g'(x_0)=3+f(x_0)$ ή $g(x_0)=3+f(x_0)$

93. **Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ με τιμές** $(0,+\infty)$**.**
α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=-x^2+\ell n f(x)$**,** $x\in\Delta$ **στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν:** $f''(x)f(x)>[f'(x)]^2+2[f(x)]^2$ **(1)**
β. Να δειχθεί ότι δεν μπορεί να είναι $f'(0)=f''(0)=0$**.**

α. Η g στρέφει τα κοίλα άνω, αν και μόνο αν $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$. Όμως:

$$g'(x)=-2x+\frac{1}{f(x)}f'(x) \text{ και } g''(x)=-2+\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2} \text{ ή}$$

$$g''(x)=\frac{-2[f(x)]^2+f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2} \text{ οπότε:}$$

$$g''(x)>0\Leftrightarrow -2[f(x)]^2+f''(x)f(x)-[f'(x)]^2>0\Leftrightarrow f''(x)f(x)>[f'(x)]^2+2[f(x)]^2$$

β. Αν ήταν $f'(0)=f''(0)=0$ από (1) θα είχαμε: $0>0+2[f(0)]^2\Leftrightarrow[f(0)]^2<0$ άτοπο.

94. **Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο** $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **που ικανοποιεί τις σχέσεις:**

$$g'(x)\sigma\varphi x+g(x)\frac{1}{\eta\mu^2x}=g(x)\sigma\varphi x \text{ **και** } g(\pi/4)=2001.$$

Η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$g'(x)\sigma\varphi x-g(x)\sigma\varphi'(x)=g(x)\sigma\varphi x\Leftrightarrow(x\in(0,\pi/2))\Leftrightarrow$$

$$\frac{g'(x)\sigma\varphi x-g(x)\sigma\varphi'(x)}{\sigma\varphi^2x}=\frac{g(x)\sigma\varphi x}{\sigma\varphi^2x}\Leftrightarrow\left(\frac{g(x)}{\sigma\varphi x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\varphi x}\Leftrightarrow$$

Οπότε: $\frac{g(x)}{\sigma\varphi x}=Ce^x$ (1), $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Η (1) για $x=\pi/4$ γίνεται: $\frac{g(\pi/4)}{\sigma\varphi\pi/4}=Ce^{\pi/4}\Leftrightarrow g(\pi/4)=Ce^{\pi/4}$

όμως $g(\pi/4)=2001$ άρα: $Ce^{\pi/4}=2001 \Leftrightarrow C=\dfrac{2001}{e^{\pi/4}}$

Οπότε η (1) γίνεται: $g(x)=\dfrac{2001}{e^{\pi/4}}e^x\sigma\varphi x$

95. **α. Να βρείτε τη συνάρτηση f:** $(0,+\infty)\to R$ **με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν** $f(1)=2001+e$**,** $f'(1)=e$ **και**

$5+\int_0^x f''(t)e^t dt = e^{2x}-\int_0^x f'(t)e^t dt$ **(1)**

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

α. Αφού f'' συνεχής στο $A=(0,+\infty)$, παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχουμε:

$f''(x)e^x=(e^{2x})'-f'(x)e^x \Leftrightarrow f''(x)e^x+f'(x)e^x=(e^{2x})' \Leftrightarrow (f'(x)e^x)'=(e^{2x})' \Leftrightarrow$

$f'(x)e^x=e^{2x}+C$, C σταθερά

Για $x=1$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$f'(1)e^1=e^2+C \Leftrightarrow e\cdot e=e^2+C \Leftrightarrow e^2=e^2+C \Leftrightarrow C=0$

Άρα $f'(x)e^x=e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x} \Leftrightarrow f'(x)=e^x \Leftrightarrow f'(x)=(e^x)' \Leftrightarrow f(x)=e^x+C_1$, C_1 σταθερά

Συνεπώς για $x=1$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$f(1)=e+C_1 \Leftrightarrow 2001+e=e+C_1 \Leftrightarrow C_1=2001$. Άρα $f(x)=e^x+2001$

β. Έχουμε $f'(x)=(e^x+2001)'=e^x>0$. Άρα η f γνησίως αύξουσα οπότε και ¨1-1¨ δηλαδή η f αντιστρέφεται και $f^{-1}:f(A)\to R$.

Για να προσδιορίσουμε το $f(A)$ θεωρούμε την εξίσωση $y=f(x)$ και αναζητούμε τις τιμές y για τις οποίες η $y=f(x)$ έχει ως προς x λύση στο $A=(0,+\infty)$.

Η $y=f(x) \Leftrightarrow y=e^x+2001 \Leftrightarrow y-2001=e^x$ (1)

Η (1) έχει λύση όταν $y-2001>0 \Leftrightarrow y>2001$ (2)

Από (1) έχουμε:

$\ell n(y-2001)=x\in A \Leftrightarrow y-2001>1 \Leftrightarrow y>2002$ (3)

Άρα $f^{-1}(y)=\ell n(y-2001)$ ή $f^{-1}(x)=\ell n(x-2001)$ και από (2), (3) $f(A)=(2002,+\infty)$.

Δηλαδή:

$f^{-1}:(2002,+\infty)\to R$ με $f^{-1}(x)=\ell n(x-2001)$

96. **Θεωρούμε τη συνάρτηση** $f(x)=\alpha x^3+3\beta x+\gamma$ **για την οποία ισχύουν:**

Α. Η C_f **διέρχεται από το σημείο Α(0,2).**

Β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f **της f στο** $x_0=1$ **είναι 4.**

Γ. $\int_1^2 f(x)dx=\dfrac{29}{4}$

α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_2^4 f^{-1}(x)\,dx$

β. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από το σημείο Α(1,1), έχει ακτίνα ρ=10 και το κέντρο του είναι σημείο της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$**.**

γ. Αν $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(x^2+y^2)t^2-14xt-18yt+30t}{|t-1|}\in R$ **(1), να αποδείξετε ότι τα x, y ανήκουν σε έναν από τους κύκλους του ερωτήματος β.**

α. Έχουμε $A(0,2)\in C_f$ άρα: $f(0)=2\Leftrightarrow\gamma=2$. Έχουμε $f'(1)=4$ αλλά

$$f'(x)=3\alpha x^2+3\beta\Leftrightarrow f'(1)=3\alpha+3\beta=4\Leftrightarrow 3\beta=4-3\alpha\Leftrightarrow\beta=\frac{4-3\alpha}{3}\ (1)$$

Άρα $f(x)=\alpha x^3+(4-3\alpha)x+2$. Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^2\left(\alpha x^3+(4-3\alpha)x+2\right)dx=\frac{29}{4}\Leftrightarrow\left[\alpha\frac{x^4}{4}+\frac{(4-3\alpha)x^2}{2}+2x\right]_1^2=\frac{29}{4}\Leftrightarrow$$

$$4\alpha+8-6\alpha+4-\frac{\alpha}{4}-\frac{8-6\alpha}{4}-2=\frac{29}{4}\Leftrightarrow 16\alpha+32-24\alpha+16-\alpha-8+6\alpha-8=29\Leftrightarrow$$

$$-3\alpha+32=29\Leftrightarrow\alpha=1$$

Οπότε η (1) γίνεται $\beta=\dfrac{1}{3}$. Άρα $f(x)=x^3+x+2$.

Έχουμε $f'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και ¨1-1¨ επομένως αντιστρέφεται. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow f(u)=x$ (2) οπότε $dx=f'(u)\,du$

Για $x=2$ η (2) γίνεται:

$$2=u^3+u+2\Leftrightarrow u^3+u=0\Leftrightarrow u(u^2+1)=0\Leftrightarrow u=0$$

Για $x=4$ η (2) γίνεται:

$$4=u^3+u+2\Leftrightarrow u^3+u-2=0\Leftrightarrow u^3+u-1-1=0\Leftrightarrow$$

$$(u^3-1)+(u-1)=0\Leftrightarrow(u-1)(u^2+u+1)+(u-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(u-1)(u^2+u+1+1)=0\Leftrightarrow(u-1)(u^2+u+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u=1\ (u^2+u+2\neq 0\ \text{αφού}\ \Delta<0)$$

Άρα: $\displaystyle\int_2^4 f^{-1}(x)\,dx=\int_0^1 f^{-1}(f(u))\,f'(u)\,du=\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 u(u^3+u+2)'du=\int_0^1 u(3u^2+1)\,du=$

$$=\left[\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{0}{4}+\frac{0}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

β. Βρήκαμε $f(x)=x^3+x+2$, άρα $f'(x)=3x^2+1$, οπότε $f(0)=2$ και $f'(0)=1$.

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=x\Leftrightarrow\varepsilon: y=x+2\ (1)$$

Έστω $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο $K(\alpha,\beta)$ και ρ=10.

Επειδή $K(\alpha,\beta)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow\beta=\alpha+2$ (2)

Επειδή $A(1,1)\in C\Leftrightarrow(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2=100$ (3)

Από (2) και (3): $(\alpha=7,\beta=9)$ ή $(\alpha=-7,\beta=-5)$.

Άρα έχουμε δύο κύκλους με εξισώσεις:

$C_1:(x-7)^2+(y-9)^2=100$
$C_2:(x+7)^2+(y+5)^2=100$

γ. Επειδή $\lim\limits_{t\to 1}|t-1|=0$ και το όριο του πηλίκου (1) είναι πραγματικός αριθμός θα ισχύει:

$\lim\limits_{t\to 1}\left[(x^2+y^2)t^2-14xt-18yt+30t\right]=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-14x-18y+30=0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-7)^2+(y-9)^2=100$ που είναι ο κύκλος C_1.

97. **α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha^2<3\beta$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει μια απλή πραγματική ρίζα και δύο μιγαδικές.**

β. Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις και ισχύει: $\int_0^x f(t)\,dt \ge \int_0^x g(t)\,dt$ για κάθε $x\in R$, να αποδειχθεί ότι: $f(0)=g(0)$.

α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Η f ως πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ στο R. Όμως: $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta>0$ για κάθε $x\in R$. Αφού α=3>0 και $\Delta=4\alpha^2-12\beta=4(\alpha^2-3\beta)<0$ (αφού $\alpha^2<3\beta \Leftrightarrow \alpha^2-3\beta<0$)
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα. Η ρίζα ρ είναι απλή, διότι αν ήταν τουλάχιστον διπλή θα είχαμε: $f(x)=(x-\rho)^2\pi(x)$ για κάθε $x\in R$ και
$f'(x)=2(x-\rho)\pi(x)+(x-\rho)^2\pi'(x)$ για κάθε $x\in R$, οπότε για
$x=\rho$: $f'(\rho)=2(\rho-\rho)\pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\pi'(\rho)=0$ άτοπο αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως η f έχει μία μόνο πραγματική ρίζα απλή και εφ' όσον είναι τρίτου βαθμού έχει στο C τρεις ρίζες, οπότε οι άλλες δύο είναι μιγαδικές.

β. Έχουμε: $\int_0^x f(t)\,dt \ge \int_0^x g(t)\,dt$ για κάθε $x\in R$, οπότε $\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt \ge 0$ για κάθε $x\in R$. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)\,dt\ge 0$, $x\in R \Leftrightarrow h(x)\ge h(0)$

αφού $h(0)=\int_0^0 f(t)\,dt-\int_0^0 g(t)\,dt=0$.

Άρα η h παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το $h(0)$. Όμως f, g συνεχείς άρα η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f(x)-g(x)$ και επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο από θεώρημα Fermat έχουμε $h'(0)=0$. Όμως $h'(x)=f(x)-g(x)$ για κάθε $x\in R$ οπότε $h'(0)=f(0)-g(0)=0$ ή $f(0)=g(0)$

98. **Εστω** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\cdot\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x-2e^x}{\frac{5}{2}x^2}=\gamma\in IR$ **και η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με** $f''(x)+f(x)=0$ $f'(1999)=f(1999)=0\Rightarrow\delta=f(2000)$ **,** αν α+β+γ+δ+ν=0 **να δείξτε ότι για την** $g(x)=(x^2-1)e^{\kappa x}$ **η εξίσωση** $g'(x)=0$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο (-ν, ν) ομόσημη του κ.**

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x-2e^x}{\frac{5}{2}x^2}=\gamma\in R$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x-2e^x)=\alpha-1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{2}x^2=0$

Αν $\alpha-1\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\Pi=\pm\infty$ ή δεν υπάρχει το όριο άρα α=1.

$\lim\limits_{x\to 0}\Pi\overset{\%}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\alpha\eta\mu 2x+2\beta\sigma\upsilon\nu 2x-3\eta\mu 3x-2e^x}{5x}$

$\lim\limits_{x\to 0}(-2\alpha\eta\mu 2x+2\beta\sigma\upsilon\nu 2x-3\eta\mu 3x-2e^x)=2\beta-2$ και $\lim\limits_{x\to 0}5x=0$

Αν $\beta\neq 1$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\Pi=\pm\infty$ δεν υπάρχει το όριο. Άρα β=1

$\lim\limits_{x\to 0}\Pi\overset{\%}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\alpha\sigma\upsilon\nu 2x-4\beta\eta\mu 2x-9\sigma\upsilon\nu 3x-2e^x}{5}=\dfrac{-4-9-2}{5}=-3=\gamma$

Είναι $f''(x)+f(x)=0\Rightarrow 2f'(x)f''(x)+2f'(x)f(x)=0\Rightarrow[(f'(x))^2]'+[f^2(x)]'=0$

$\Rightarrow[f'(x)^2+f^2(x)]'=0\Rightarrow(f')^2(x)+f^2(x)=c$ (1)

Για x=1999 η (1) $\Rightarrow$c=0 $(f'(x))^2+f^2(x)=0\Rightarrow f(x)=0$ τότε δ=0

Επειδή α+β+γ+δ+ν=0 τότε ν=1.

Είναι g(-1)=0 g(1)=0 Από Θ. Rolle υπάρχει $x_1\in(-1,1)$ $g'(x_0)=0$

$g'(x)=2xe^{\kappa x}+\kappa(x^2-1)e^{\kappa x}=e^{kx}(\kappa x^2+2x-\kappa)$, Δ=4+4κ²>0 άρα έχει δύο ρίζες x_1 ,x_2 με

$P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-1\Rightarrow x_1x_2=-1\Rightarrow x_1=\dfrac{-1}{x_2},\ |x_1|<1\Rightarrow\left|\dfrac{-1}{x_2}\right|<1\Rightarrow|x_2|>1\Rightarrow x_2\notin(-1,1)$ άρα η ρίζα μοναδική

και $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-2}{k}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{-2}{k}\Rightarrow x_1-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{-2}{k}\Rightarrow\dfrac{x_1^2-1}{x_1}=\dfrac{-2}{k}$, επειδή $x_1^2-1<0$, ο x_1 ομόσημος του κ.

99. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu^2x\ e^x+1-\eta\mu x[f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x]$ **και f(0)=2001.**

Ειναι $f'(x)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu^2x\ e^x+1-\eta\mu x[f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x]$

$\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\,f(x)=\sigma\upsilon\nu^2x\ e^x+1-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2x$

$\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\,f(x)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=e^x+1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\left[\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right]'=\left[e^x+x+\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]'$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right] = \left[e^x + x + \ln|\sigma\upsilon\nu x|\right] + c$ για x=0, $\left[\dfrac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}\right] = \left[e^0 + 0 + \ln|\sigma\upsilon\nu 0|\right] + c \Leftrightarrow$ c=2000

Τοτε $f(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x \ln|\sigma\upsilon\nu x| + 2000\sigma\upsilon\nu x$

100. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f^{2000}(x)+2f(x)-2x-1=0$ για κάθε xεR να δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της. Βρείτε τα σημαία τομής τους αν υπάρχουν των γραφικών τους παραστάσεων των f και f^{-1}, καθώς και το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.**
Αν Ω={0,1,2,3,..., 2001Ε} ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου η ευθεία ψ=2x+α να τέμνει την παραβολή $ψ^2$=2000x με αεΩ.

Έστω x_1, $x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (1)

Τότε $f^{2000}(x_1) = f^{2000}(x_2)$ και $2f(x_1) = 2f(x_2)$

Ετσι $f^{2000}(x_1) + 2f(x_1) = f^{2000}(x_2) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ Άρα f 1-1

Οπότε υπάρχει f^{-1}

Θέτω $y = f(x)$

$f^{2000}(x) + 2f(x) - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y^{2000} + 2y - 1 = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{y^{2000} + 2y - 1}{2}$. Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x^{2000} + 2x - 1}{2}$

Επειδή η f^{-1} σαν πολυωνυμική είναι συνεχής άρα και η f συνεχής.

Τα κοινά σημεία του Cf , Cf^{-1} βρίσκονται στην y=x . επειδή είναι συμμετρικά ως προς αυτή άρα από τη λύση

του συστήματος $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases}$ προκύπτει

$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^{2000} + 2x - 1}{2} = x \Leftrightarrow x^{2000} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Άρα τα κοινά σημεία (1, 1) , (-1, 1)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο του εμβαδού που περικλείεται από Cf^{-1} και y=x και επειδή δεν γνωρίζουμε ποια βρίσκεται υπεράνω της άλλης θα πάρουμε το εμβαδό απολύτως

$$E = 2\left|\int_{-1}^{1}\left[f^{-1}(x) - x\right]dx\right| = 2\left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^{2000} + 2x - 1}{2} - x\right)dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}\left(x^{2000} - 1\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^{2001}}{2001} - x\right]_{-1}^{1}\right| = \frac{4000}{2001}$$

Τότε Ω={0, 1, 1, ..., 2001E}={0, 1, 2 , ..., 4000}

Η y=2x+α πρέπει να τέμνει την y^2=2000x, αρα το σύστημα των εξισώσεων να έχει δύο λύσεις $\begin{cases} y = 2x + \alpha \\ y^2 = 2000x \end{cases}$

Τότε $(2x + \alpha)^2 = 2000x \Leftrightarrow 4x^2 + 4\alpha x + \alpha^2 - 2000x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (4\alpha - 2000)x + \alpha^2 = 0$

Ετσι $\Delta > 0 \Leftrightarrow (4\alpha - 2000)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow 4^2(\alpha - 500)^2 - 4^2\alpha^2 > 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 500^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 500 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow 500^2 > 2 \cdot \alpha \cdot 500 \Leftrightarrow \alpha < 250$ τότε $\alpha \in \{0, 1, ..., 249\}$ και η πιθανότητα $P = \frac{250}{4001}$

101.

Εστω γ,αεR με γ<α οι τετμημένες των σημείων που η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα με ψ=f(x) και $x=e^t+2t-et$, $ψ=2t^3-3t^2$, ενώ κ το ολικό ελάχιστο του γ.τ των τοπικών ακροτάτων της g με $g(x)=λe^x-x$, $λ \geq \frac{1}{e}$ και $α^x+β^x \geq 2$ για κάθε xεR.

Αν $\gamma z^2 + (\gamma - \alpha)z + (2004\kappa + \gamma) = 0$ ισχύει $h(α)z^{1821}+h(κ)z^{2004β}+2=0$, όπου h μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, τότε η γραφική παράσταση της h' και η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο (κ,α).

Ενώ υπάρχει ρε(κ,γ) : $3[P(A)-P(B)]ρ^2=2[P(B')-P(A')]ρ$, με Α,Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Αν η $Q(x) = \begin{cases} ux+4, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής τότε η παραγωγίσιμη συνάρτηση F δεν έχει τοπικά ακρότατα αν ισχύει $αF^{2004}(x)+ u\, x=2004$

$$\frac{dy}{dt} = (2t^3 - 3t^2)' = 6t^2 - 6t$$

$$\frac{dx}{dt} = (e^t + 2t - et)' = e^t + 2 - e > 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^2 - 6t}{e^t + 2 - e}$$

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f '(t)	+		-	+
f(t)	↗		↘	↗

αν t=0 τότε x=1

αν t=1 τότε x=2

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=2. Άρα γ=1 και α=2.

Είναι $g(x) = \lambda e^x - x$, $g'(x) = \lambda e^x - 1$, $\lambda e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\ln\lambda$

Αρα στο x=-lnλ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$g(-\ln\lambda) = \lambda e^{-\ln\lambda} + \ln\lambda \Rightarrow g(-\ln\lambda) = 1 + \ln\lambda$, άρα παρουσιάζει ακρότατο στο (-lnλ, 1+lnλ) και ο γ.τ αυτού του σημείου είναι Μ(x,ψ) $\begin{cases} x = -\ln\lambda \\ y = 1 + \ln\lambda \Rightarrow y = 1 - x \end{cases}$ και επειδή

$\lambda \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\lambda \geq \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$ άρα το Μ βρίσκεται σε ημιευθεία ενώ το ολικό ελάχιστο του γ.τ των τοπικών ακροτάτων της g είναι κ=0.

Θέτω: $φ(x)=α^x+β^x-2$, $\varphi'(x) = \alpha^x \ell n\alpha + \beta^x \ell n\beta$

$\left.\begin{matrix} \varphi(x) \geq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ Άρα η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=0, οπότε τοπικό ακρότατο.

Άρα από Θεώρημα Fermat είναι φ΄(0)=0

$$\Rightarrow \ell n\alpha + \ell n\beta = 0 \Rightarrow \ell n2 + \ell n\beta = 0 \Rightarrow \ell n\beta = -\ell n2 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Άρα ο $z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = z - 1 \Rightarrow z^3 = ... = -1$

Άρα έχουμε $h(\alpha)z^{1821}+h(\kappa)z^{2004\beta}+2=0 \Leftrightarrow h(2)(z^3)^{607}+h(0)(z^3)^{334}+2=0$

$\Leftrightarrow h(0)-h(2)+2=0 \Rightarrow h(2)=h(0)+2$

Για να έχει η γραφική παράσταση της h' και η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο (κ,α)=(0,2) πρέπει

$$\left.\begin{array}{l} y=h'(x) \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow h'(x)=x$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda \in (0,2)$ έτσι ώστε $h'(\lambda)=\lambda$

Θεωρώ συνάρτηση $I(x)=h(x)-\dfrac{x^2}{2}$

Η I συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη με $I'(x)=h'(x)-x$

$$\left.\begin{array}{l} I(0)=h(0) \\ I(2)=h(2)-2=h(0)+2-2=h(0) \end{array}\right\} \Rightarrow I(0)=I(2)$$

Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda \in (0,2)$ έτσι ώστε $I'(\lambda)=0 \Leftrightarrow$ $h'(\lambda)=\lambda$

Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x)=\big(P(A)-P(B)\big)x^3-\big(P'(B)-P'(A)\big)x^2$

Η φ συνεχής στο [0,1]

Η φ παραγωγίσιμη στο (0,1) με $\varphi'(x)=3\big[P(A)-P(B)\big]x^2-2\big[P'(B)-P'(A)\big]x$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0)=0 \\ \varphi(1)=0 \end{array}\right\} \varphi(0)=\varphi(1)$$

Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα $\rho \in (0,1)$ έτσι ώστε

$\varphi'(\rho)=0 \Leftrightarrow 3\big[P(A)-P(B)\big]\rho^2-2\big[P'(B)-P'(A)\big]\rho=0$

Επειδή η Q είναι συνεχής στο π.ο θα είναι και στο x=1 τότε

$$\lim_{x\to 1^-}Q(x)=\lim_{x\to 1^+}Q(x)=Q(1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}Q(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ux+4)=u+4$, $\lim\limits_{x\to 1^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=....=2$, Q(1)=u+4

Τότε u+4=2 άρα u=-2

Έστω ότι στο x_0 έχει Τ.Α. τότε $F'(x_0)=0$ $(\Sigma) \Rightarrow 2000F^{1999}(x)\,F'(x)-2=0$

Για $x=x_0$ -2=0 άτοπο. Άρα δεν έχει Τ.Α.

102. **Αν** $e^{2x}-e^x \ge \alpha^x-1 \;\; \forall\, x \in R$ **, α>0 και** $f^2(x)-g^2(x)=\alpha^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+2000$ **με f,g παραγωγίσιμες να δείξτε ότι δεν υπάρχει** $x_0 \in IR^*$ **ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία** $M(x_0, f(x_0))$ **και** $N(x_0, g(x_0))$ **να είναι παράλληλες προς την ευθεία** $y=1821$**.**

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=e^{2x}-e^x-\alpha^x+1$

Είναι $\left.\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ g(0)=0 \end{array}\right\} g(x)\ge g(0)$ Άρα στο $x=0$ η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Άρα από Θ. Fermat θα ισχύει $g'(0)=0$, $g'(x)=2e^{2x}-e^x-\alpha^x\ell n\alpha$

$g'(0)=0 \Rightarrow 2-1-\ell n\alpha=0 \Leftrightarrow 1-\ell n\alpha=0 \Leftrightarrow \ell n\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e$

Έστω ότι είναι παράλληλες οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στο x_0 στην ευθεία y=1821 θα πρέπει $f'(x_0)=0$ και $g'(x_0)=0$

Είναι $f^2(x)-g^2(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+2000 \Rightarrow 2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)=e^x-x-1$ (1)

Για x=x0 , $(1)\Rightarrow 0=e^{x_0}-x_0-1 \Leftrightarrow e^{x_0}=x_0+1$ άτοπο γιατί

Έστω η F με $F(x)=e^x-x-1$ στο R $F'(x)=e^x-1$

$\forall\ x\in R^*$ ισχύει $F(x)>F(0)=0 \Rightarrow e^x-x-1>0 \Rightarrow e^x>x+1$

Άρα άτοπο δεν υπάρχει $x_0 \in IR^*$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
F'(x)	-	+
F(x)	↘	↗

103. **Έστω η παραγωγίσιμη f στο [α,β] με f΄΄(x)>0 και F μια αρχική της f και F(α)=0 δείξτε ότι** $(\beta-\alpha)\, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le F(\beta)$

Είναι F΄(x)=f(x)

Έστω h με $h(x)=(x-\alpha)\, f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-F(x)$

$$h'(x)=f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)+(x-\alpha)f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\frac{1}{2}-F'(x)=f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)+\frac{(x-\alpha)}{2}f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-f(x) \quad (1)$$

Στο $\left[\frac{\alpha+x}{2},\, x\right]$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στη f.

$$\exists\ \kappa\in\left(\frac{\alpha+x}{2},\, x\right):\ f'(\kappa)=\frac{f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-f(x)}{\frac{\alpha+x}{2}-x}\Rightarrow f'(\kappa)\frac{\alpha-x}{2}=f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-f(x)$$

$$(1)\Rightarrow h'(x)=\frac{x-\alpha}{2}f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)+\frac{\alpha-x}{2}f'(\kappa)=\frac{x-\alpha}{2}\left[f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-f'(\kappa)\right]<0$$

γιατί $f''(x)>0\Rightarrow$ f ΄ γνησίως αύξουσα

Τότε $\frac{\alpha+x}{2}<\kappa\Rightarrow f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)<f'(\kappa)$ έτσι h γνησίως φθίνουσα

$\alpha\le x\le\beta\Rightarrow h(\alpha)\ge h(x)\ge h(\beta)\Rightarrow 0\ge h(x)\ge h(\beta)$ άρα

$h(\beta)\le 0\Rightarrow(\beta-\alpha)\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le F(\beta)$

104. **Εστω η συνάρτηση** $R(x)=\frac{x^{2005}}{2005}-\frac{21x^{1822}}{1822}+\alpha^{\beta}x^2+2x+2004$ **η οποία παρουσιάζει στο x=1 τοπικό ακρότατο**

και η φ με $\phi(\chi)=\frac{7k}{2}e^{-\frac{x+3}{14}}-\frac{7k}{4}e^{-\frac{x}{7}}+2000$ **,κ>0 που στο x=α παρουσιάζει ολικό μέγιστο και** $g(x)=(\alpha-\beta)xe^{\frac{1}{x}}$ **, ποια η πλάγια ασύμπτωτη της g στο** $+\infty$ **.**

Αν $h(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **να δείξτε ότι η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα**

στο R και $\alpha(e^{\beta}-1)<\beta(e^{\alpha}-1)$.

Είναι $R'(x)=x^{2004}-21x^{1821}+2\alpha^{\beta}x+2$ και επειδή στο x=1 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε $R'(1)=0 \Leftrightarrow 1-21+2\alpha^{\beta}+2=0 \Leftrightarrow \alpha^{\beta}=9$ (1)

$$\Phi(x)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{x+3}{14}}-\frac{7A}{4}e^{-\frac{x}{7}}+2000,\quad \Phi'(x)=\frac{7A}{28}\left[-e^{-\frac{x+3}{14}}+e^{-\frac{x}{7}}\right]$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Φ'(x)	+	-	
Φ(x)	$\nearrow$	$\searrow$	

$\Phi'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$. Άρα α=3

Τότε (1) $\Leftrightarrow 3^{\beta}=9 \Leftrightarrow \beta=2$

$$g(x)=(3-2)x e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow g(x)=x e^{\frac{1}{x}}$$

Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}=+1=\beta$$

Άρα $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow y=x+1$ η πλάγια ασύμπτωτη

Για να είναι συνεχής πρέπει $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=h(0)$,

$$\lim_{x\to0^-}h(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\overset{\%}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}=1$$

$h(0)=1$ Άρα η h συνεχής στο $x=0$

Αν $x\in R^*$ $\quad h'(x)=\frac{e^x-1-x e^x}{(e^x-1)^2}$

Έστω η $\Phi(x)=e^x-1-x e^x$ στο R,

$\Phi'(x)=e^x-e^x-x e^x=-xe^x \quad \forall\, x\in R^*$

$\Phi(x)<\Phi(0)=0 \Rightarrow e^x-1-x e^x<0 \Rightarrow h'(x)<0$ h γνησίως φθίνουσα στο R.

Είναι β=2<3=α $\Rightarrow \beta<\alpha \Rightarrow h(\beta)>h(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\beta}{e^{\beta}-1}>\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1} \Rightarrow \beta(e^{\alpha}-1)>\alpha(e^{\beta}-1)$

105. **Δίνεται η f με $f(x)=x+1+\frac{x^2}{2}-e^x$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, xx', $x=0$, $x=1$.**

$f'(x)=1+x-e^x$, $f''(x)=1-e^x$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$ άτοπο $x\in[0,+\infty)$

$\forall\ x\in[0,+\infty)$ $\quad x\geq0 \Rightarrow f'(x)\leq f'(0) \Rightarrow f'(x)\leq0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα

$\forall\ x\in[0,+\infty)$ $\quad x\geq0 \Rightarrow f(x)\leq f(0) \Rightarrow f(x)\leq0$

Τότε $E=-\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1\left(x+1+\dfrac{x^2}{2}-e^x\right)dx=-\left[\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{x^3}{6}-e^x\right]_0^1=\ldots$

106. **Αν f ορισμένη στο IR και $f'(x)-f(x)=x-1\ \ \forall\ x\in IR$ να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την C_f, xx', $x=0$, $x=1$ αν $f(0)=1$.**

Είναι

$f'(x)-f(x)=x-1\Leftrightarrow f'(x)+1=f(x)+x\Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)'=f(x)+x\Leftrightarrow f(x)+x=c\cdot e^x$

$\Leftrightarrow\ f(x)=c\cdot e^x-x$

$f(0)=1\Leftrightarrow c\cdot e^0-0=1\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=e^x-x$

$f'(x)=e^x-1$

$\forall\ x\in IR\ \ \ f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	↘		↗

Τότε $E=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (e^x-x)\,dx=\left[e^x-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=\ldots$

107. **Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(1)=5$, $f(2)=10$, $f(0)=0$, $\int_1^2 f(x)\,dx=7$ και f' γνησίως αύξουσα. Έστω η g στο $[0,+\infty)$ με $g(x)=x\cdot f'(x)-f(x)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, xx', $x=1$, $x=2$.**

Είναι $g'(x)=x\cdot f''(x)\ \ x\ge 0\ \ \forall\ x\in[0,+\infty)$, f' γνησίως αύξουσα$\Rightarrow f''(x)>0$

Τότε $g'(x)\ge 0\Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Αν $x\ge 0\Rightarrow g(x)\ge g(0)=0\cdot f'(0)-f(0)\Rightarrow g(x)\ge 0$

Τότε $E=\int_1^2 g(x)\,dx=\int_1^2\left[x\,f'(x)-f(x)\right]dx=\int_1^2 x\,f'(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx$

$=\left[x\,f(x)\right]_1^2-\int_1^2 (x)'\,f(x)\,dx-7=\left[2f(2)-1f(1)\right]-\int_1^2 f(x)\,dx-7=\left[2\cdot 10-1\cdot 5\right]-7-7=1\tau.\mu.$

108. **Έστω η $f(x)=e^x$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε) της C_f που περνά από αρχή αξόνων. Ποιο το εμβαδόν από C_f, (ε) και θετικούς ημιάξονες.**

Έστω $M(x_0,y_0)\in C_f$, (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$

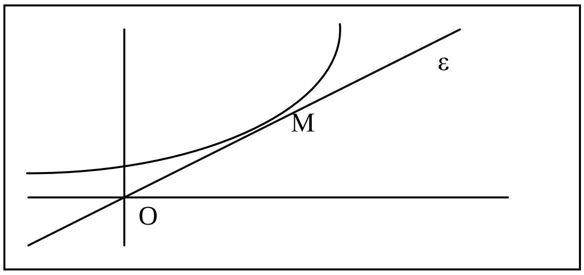
$O(0,0)\in\varepsilon\Leftrightarrow 0-e^{x_0}=e^{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow x_0=1$

$y_0=e\ \ \ M(1,e)$

ε: $y-e=e(x-1)\Leftrightarrow y=e\cdot x=g(x)$

$\forall\ x\in[0,1]\ \ \ f(x)\ge g(x)$

$E=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^1 (e^x-ex)\,dx$



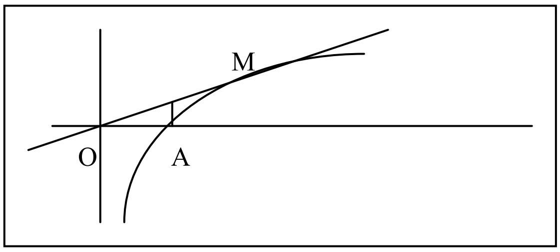
109. **Έστω η $f(x)=\ln x$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε) της C_f που περνά από αρχή αξόνων. Ποιο το εμβαδόν από C_f, (ε) και θετικούς ημιάξονες.**

Έστω $M(x_0,y_0)\in C_f$, (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$

$O(0,0)\in\varepsilon\Leftrightarrow 0-\ell n x_0=\dfrac{1}{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow x_0=e$

$y_0=1\ \ M(e,1)$

ε: $y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e}x=g(x)$



$$E=\int_0^1 g(x)\,dx+\int_1^e[g(x)-f(x)]dx=\int_0^1\frac{1}{e}x\,dx+\int_1^e\left[\frac{1}{e}x-\ell n x\right]dx$$

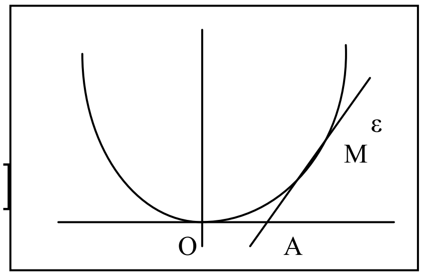
110. **Έστω η $f(x)=2x^2$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε) της C_f, εκτός από τον xx', που περνά από το $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. Ποιο το εμβαδόν από C_f, (ε) και θετικούς ημιάξονες.**

Έστω $M(x_0,y_0)\in C_f$, (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-2{x_0}^2=4x_0(x-x_0)$

$A\in\varepsilon\Leftrightarrow 0-2{x_0}^2=4x_0\left(\dfrac{1}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0 & \alpha\pi o\rho.\\ x_0=1\ \ y_0=2\ \ M(1,2)\end{cases}$

ε: $y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2=g(x)$

$$E=\int_0^{1/2}f(x)\,dx+\int_{1/2}^{1}[f(x)-g(x)]dx=\int_0^{1/2}2x^2dx+\int_{1/2}^{1}[2x^2-(4x-2)]$$



111. **Δίνεται η f με $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$ και η ευθεία (ε): $y=\lambda x+2$. Να βρεθεί ο λ>0 ώστε η C_f να τέμνεται από την (ε) σε δύο σημεία ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται να είναι 18.**

Οι συντεταγμένες των Α, Β από τη λύση του συστήματος

$\begin{cases}y=\dfrac{x^2-1}{2}\\ y=\lambda x+2\end{cases}\Leftrightarrow x^2-2\lambda x-5=0$ οι ρίζες της είναι οι τετμημένες α, β των Α, Β τότε

$S=\alpha+\beta=2\lambda$, $P=\alpha\cdot\beta=-5$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4\lambda^2+10$,

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4\lambda^2+20\Rightarrow\beta-\alpha=\sqrt{4\lambda^2+20}\Rightarrow\beta-\alpha=2\sqrt{\lambda^2+5}$. Έστω $g(x)=\lambda x+2$, $g(x)\ge f(x)\ \ \forall\ x\in[\alpha,\beta]$

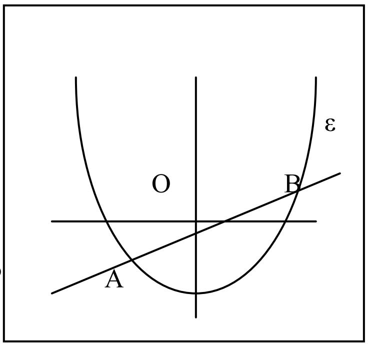
Πρέπει $E=18\Leftrightarrow\displaystyle\int_\alpha^\beta[g(x)-f(x)]dx=18\Leftrightarrow\int_a^\beta\left[\lambda x+2-\frac{x^2-1}{2}\right]dx=18$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\lambda x^2}{2}+2x-\frac{x^3-3x}{6}\right]_{\alpha}^{\beta}=18$$

$$\Leftrightarrow (\beta-\alpha)\cdot\left[\frac{\lambda}{2}(\beta+\alpha)+2-\frac{1}{6}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2-3)\right]=18$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda^2+5}\cdot(\lambda^2+5)=18\cdot 3 \Leftrightarrow (\lambda^2+5)^{3/2}=3^3 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+5}=3$$

$\Leftrightarrow \lambda^2+5=9 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$ άρα $\lambda=2$ γιατί $\lambda>0$.



112. **Αν** $f'(x)-f(x)=\eta\mu x \quad \forall\ x\in IR$**,** $f(0)=-\frac{3}{2}$ **να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=\frac{\pi}{2}$**.**

Είναι $f'(x)-f(x)=\eta\mu x \Rightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}\eta\mu x \Rightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'=e^{-x}\eta\mu x$

$$\Rightarrow \int\left(f(x)e^{-x}\right)'dx=\int e^{-x}\eta\mu x dx \Rightarrow f(x)e^{-x}=\int\left(-e^{-x}\right)'\eta\mu x dx \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow f(x)e^{-x}=-\frac{e^{-x}}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+c \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+ce^{x}$$

$f(0)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow c=-1 \quad f(x)=-\frac{1}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-e^{x}, \quad f(x)\le 0 \quad \forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Τότε $E=-\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=-\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-e^{x}\right]dx=\ldots$

113. **Αν** $f'(x)+f(x)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x$**,** $f(0)=2$ **να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_g**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=\frac{\pi}{2}$ **όπου** $g(x)=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$**.**

Είναι

$$f'(x)+f(x)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f'(x)e^{\eta\mu x}+f(x)\sigma\upsilon\nu\, e^{\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x} \Rightarrow \left[f(x)e^{\eta\mu x}\right]'=\left[e^{\eta\mu x}\right]'$$

$$\Rightarrow f(x)e^{\eta\mu x}=e^{\eta\mu x}+c \Rightarrow f(x)=1+c\cdot e^{-\eta\mu x},\ f(0)=2 \Leftrightarrow c=1,\quad f(x)=1+e^{-\eta\mu x}$$

Είναι $g(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x=(1+e^{-\eta\mu x})\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x e^{-\eta\mu x} \Rightarrow g(x)\ge 0 \quad \forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Τότε $E=\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\left(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x e^{-\eta\mu x}\right)dx=\left[\eta\mu x-e^{-\eta\mu x}\right]_0^{\pi/2}=\ldots$

114. **Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=1$**,** $x=e$ **με** $f(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ **όπου** $g'(e^x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \quad \forall\ x\in R \quad g(1)=1$**.**

Είναι

$$\left[g(e^x)\right]'=g'(e^x)(e^x)'=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)e^x=\eta\mu x e^x+\sigma\upsilon\nu x e^x=\left(e^x\eta\mu x\right)' \Rightarrow g(e^x)=e^x\eta\mu x+c$$

Για $x=0$ $g(e^0)=e^0\eta\mu 0+c \Rightarrow g(1)=c \Rightarrow c=1$, $g(e^x)=e^x\eta\mu x+1$ Θέτω

$e^x = \omega \Leftrightarrow x = \ell n\omega$

$g(\omega) = \omega\eta\mu\ell n\omega + 1$. Τότε $f(x) = \dfrac{x\eta\mu\,\ell nx + 1}{x^2} = \dfrac{1}{x}\eta\mu\ell nx + \dfrac{1}{x^2}$. Είναι $f(x) > 0\ \ \forall\ x \in [1, e]$.

$$E = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x}\eta\mu\ell nx + x^{-2}\right]dx = \left[-\sigma\upsilon\nu\ell nx - x^{-1}\right]_1^e = \ldots$$

115. **Έστω η f που σε κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ της C_f η εφαπτόμενη έχει σ.δ. $(x_0{}^2 + x_0 + 1)e^{x_0}$. Αν $f(0) = 2$ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου από C_f, xx', $x = 0$, $x = 4$.**

Στο Μ της C_f η εφαπτόμενη (ε) έχει σ.δ. $\lambda\varepsilon = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = (x_0{}^2 + x_0 + 1)e^{x_0}$ $\forall\ x_0 \in IR$

Άρα $f'(x) = (x^2 + x + 1)e^x \Rightarrow \int f'(x)\,dx = \int (x^2 + x + 1)e^x\,dx \Rightarrow$

$f(x) = \int (x^2 + x + 1)(e^x)'\,dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(x) = (x^2 - x + 2)e^x + c$

Είναι $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 0$ άρα $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$, $f(x) > 0\ \ \forall\ x \in IR$

$$E = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (x^2 - x + 2)e^x dx = \int_0^4 (x^2 - x + 2)(e^x)'dx = \ldots$$

116. **Δίνεται η f με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Δείξτε ότι παρουσιάζει δύο σημεία τοπικών ακροτάτων και ένα σημείο καμπής και ότι τα τρία σημεία είναι συνευθειακά. Αν ε η ευθεία που ορίζουν τότε να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από (ε) και C_f.**

Π.Ο. f A=R, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$

Άρα η f παρουσιάζει Τ.Α. στα Κ(0,4), λ(2,0) και Σ.Κ. στο Μ(1,2)

$\lambda_{K\Lambda} = \dfrac{y_K - y_\Lambda}{x_K - x_\Lambda} = \dfrac{4 - 0}{0 - 2} = -2$, $\lambda_{KM} = \dfrac{y_K - y_M}{x_K - x_M} = \dfrac{4 - 2}{0 - 1} = -2$, ΚΛ παράλληλη ΚΜ$\Rightarrow$

Κ, Λ, Μ συνευθειακά

ε: $y - y_K = \lambda_{K\Lambda}(x - x_K) \Leftrightarrow y - 4 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 4$, $g(x) = -2x + 4$

Έστω η h με $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

	0		1		2	
-		+		-		+

$$E = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx - \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \ldots$$

117. **Δίνεται η f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ ώστε η γραφική παράσταση C_f εφάπτεται στον xx' έχει σημείο καμπής στο $x = 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου από C_f, xx', $x = -3$, $x = 2$.**

-3		-2		2
	-		+	

Π.Ο. f A=R, $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$, $f''(x) = 6x + 2\alpha$

Στο $x = 0$ Σ.Κ. άρα $f''(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Έστω $M(x_0, 0)$ της C_f που εφάπτεται στον xx' τότε

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^3+\beta x_0+2=0 \\ 3{x_0}^2+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

Άρα $f(x)=x^3-3x+2$, $\quad E=-\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

118. **Έστω η f με** $f(x)=-x^4+\alpha x^2+\beta x+3$ **με** $f(x)\le f(1)\ \forall\ x\in IR$ **και στο** $x=0$ **παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου από** C_f**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=2$**.**

Π.Ο. f A=R, $f'(x)=-4x^3+2\alpha x+\beta$

Στο $x=0$ Τ.Α. άρα $f'(0)=0\Leftrightarrow \beta=0$

Αν $f(x)\le f(1)$ στο $x=1$ έχει μέγιστο άρα $f'(1)=0\Leftrightarrow -4+2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=2$,

$f(x)=-x^4+2x^2+3$, $\quad E=\int_{0}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{2} f(x)\,dx$

119. **Αν** $(x-2)\cdot f'(x)=f(x)\ \forall\ x\in R-\{2\}$**,** $f(0)=-4$ **να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=1$**.**

Είναι

$$(x-2)\,f'(x)=f(x)\Leftrightarrow (x-2)\,f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{(x-2)\,f'(x)-f(x)}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-2}\right)'=(c)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,(x-2)\quad f(0)=-4\Leftrightarrow c=2\quad f(x)=2\,(x-2)$$

Είναι $f(x)<0\ \forall\ x\in[0,1]$, $E=-\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1 2\,(x-2)\,dx=\ldots$

120. **Αν** $(2-x)\cdot f'(x)=f(x)\ \forall\ x\in R-\{2\}$**,** $f(3)=2$ **να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=3$**,** $x=4$**.**

Είναι $(2-x)\,f'(x)=f(x)\Leftrightarrow (2-x)\,f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow (2-x)\,f'(x)+(2-x)'\,f(x)=0\Leftrightarrow$

$$\left[f(x)(2-x)\right]'=(c)'\Leftrightarrow f(x)(2-x)=c\Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{2-x}\quad f(3)=2\Leftrightarrow c=-2$$

$$f(x)=\frac{-2}{2-x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x-2}$$

Είναι $f(x)>0\ \forall\ x\in[3,4]$ $E=\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4 \frac{2}{x-2}\,dx=\left[2\cdot \ell n|x-2|\right]_3^4=\ldots$

121. **Αν** $2001\cdot f'(x)=f(x)\ \forall\ x\in R$**,** $f(x)>0$**,** $f(0)=1$ **να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=1$**.**

Είναι $2001\cdot f'(x)= f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2001} \Leftrightarrow \left[\ell n f(x)\right]'=\left[\dfrac{1}{2001}x\right]' \Leftrightarrow \ell n f(x)=\dfrac{1}{2001}x+c$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2001}x+c} \quad f(0)=1 \Leftrightarrow e^{c}=1 \Leftrightarrow c=0 \quad f(x)=e^{\frac{1}{2001}x} \quad f(x)>0 \ \ \forall\ x\in R$

$E=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^{\frac{x}{2001}}dx=\left[2001 e^{\frac{x}{2001}}\right]_0^1=...$

122. **Αν** $f'(x)-f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \ \ \forall\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$**,** $f(0)=2$**, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_f**,** xx'**,** $x=0$**,** $x=\dfrac{\pi}{2}$**.**

Είναι

$f'(x)-f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x)-\eta\mu x= f(x)+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left[f(x)+\sigma\upsilon\nu x\right]' = f(x)+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$
$f(x)+\sigma\upsilon\nu x=c\,e^{x} \Leftrightarrow f(x)=c\,e^{x}-\sigma\upsilon\nu x \quad f(0)=2 \Leftrightarrow c=3$ άρα $f(x)=3e^{x}-\sigma\upsilon\nu x$. Είναι
$f(x)>0 \ \ \forall\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα $E=\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\int(3e^{x}-\sigma\upsilon\nu x)\,dx=\left[3e^{x}-\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}=...$

123. **Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την** C_g**,** $x=0$**,** $x=\pi/2$**,** xx' **αν** $g'(x)-g(x)=e^{x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$**,** $g(0)=1$**.**

Είναι

$g'(x)-g(x)=e^{x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)-g(x)}{e^{x}}=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)e^{x}-g(x)e^{x}}{(e^{x})^{2}}=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{g(x)}{e^{x}}\right)'=(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)' \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{e^{x}}=-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+c \Leftrightarrow g(x)=e^{x}(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+c)$
$g(0)=1 \Leftrightarrow c=2$ άρα $g(x)=e^{x}(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+2)$ Είναι $g(x)\ge 0 \ \ \forall\ x\in\left[0,\pi/2\right]$
$E=\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\left[-(e^{x}\sigma\upsilon\nu x+e^{x}\eta\mu x)+2e^{x}\right]dx=\left[-(e^{x}\eta\mu x)+2e^{x}\right]_0^{\pi/2}=...$

124. **Αν** $f'(x)\cdot\eta\mu x-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x= f(x)e^{x}\eta\mu x \ \ \forall\ x\in(0,\pi)$**,** $f(x)>0$**,** $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{e^{\pi/2}}$**, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από** C_g**,** xx'**,** $x=\dfrac{\pi}{3}$**,** $x=\dfrac{\pi}{4}$**, όπου** $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{e^{x}}}$**.**

Είναι $f'(x)\cdot\eta\mu x-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x= f(x)e^{x}\eta\mu x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\cdot\eta\mu x-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{2}x}=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}e^{x}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x}e^x \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)'}{\frac{f(x)}{\eta\mu x}} = e^x \Leftrightarrow \left[\ell n\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right]' = (e^x)' \Leftrightarrow \ell n\frac{f(x)}{\eta\mu x} = e^x + c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = e^{e^x + c}$$

$\Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot e^{e^x + c}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{e^{\pi/2}} \Leftrightarrow e^c = 1$ άρα $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{e^x}$, τότε $g(x) = \eta\mu x$, $g(x) > 0 \;\; \forall \; x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

άρα $E = \int_{\pi/4}^{\pi/3} g(x)\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \ldots$

125. **Έστω f συνεχής στο** $[0,\alpha]$**, α>0 με** $f(x) \ge 0 \;\; \forall x \in [0,\alpha]$ **και** $f(x) + f(\alpha - x) = \beta > 0$**. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από** C_f**,** xx'**,** $x = 0$**,** $x = \alpha$**.**

Είναι $E = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ (1) και

$f(x) + f(\alpha - x) = \beta \Rightarrow \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(\alpha - x)dx = \int_0^{\alpha} \beta\,dx = \beta(\alpha - 0) = \alpha\beta$ (2)

Θέτω $\alpha - x = \omega$, $d\omega = -dx \Rightarrow dx = -d\omega$, $x = 0 \to \omega = \alpha \quad x = \alpha \to \omega = 0$

$\int_0^{\alpha} f(\alpha - x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} f(\omega)(-d\omega) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$, $(2) \Rightarrow 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha\beta \overset{(1)}{\Rightarrow} E = \frac{\alpha\beta}{2}$

126. **Έστω f συνεχής συνάρτηση f:** $R \to R^+$ **με** $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta > 0$ $\forall \; x \in R$**, Α>0. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από** C_f**,** xx'**,** $x = 0$**,** $x = 2\alpha$**.**

Είναι f: $R \to R_+$ άρα $f(x) \ge 0 \;\; \forall \; x \in R$ άρα $E = \int_0^{2\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx$ (1)

Θέτω $\alpha - t = x \Leftrightarrow t = a - x \quad dx = -dt$, $x = 0 \to t = \alpha$, $x = \alpha \to t = 0$

$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} f(\alpha - t)(-dt) = \int_0^{\alpha} f(\alpha - x)\,dx$

Θέτω $x = \alpha + t \quad dx = dt \quad x = \alpha \to t = 0$, $x = 2\alpha \to t = \alpha$

$\int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(\alpha + t)\,dt = \int_0^{\alpha} f(\alpha + x)\,dx$

$(1) \Rightarrow E = \int_0^{\alpha} f(\alpha - x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(\alpha + x)\,dx = \int_0^{\alpha} \left[f(\alpha - x) + f(\alpha + x)\right]dx$

$$=\int_0^{\alpha} 2\beta\, dx = 2\beta(\alpha-0) = 2\alpha\beta \;\Rightarrow E = 2\alpha\beta$$

127. **Έστω η f με** $f(x)>0\ \ \forall\ x\in(0,+\infty)$**. Να βρεθεί ο τύπος της f αν περνά από το σημείο (1,1) και η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο** $(x_0\,,y_0)$ **αυτής τέμνει τον** Ox **στο σημείο** $\left(\dfrac{x_0}{4},0\right)\ \ \forall\ x_0\in(0,+\infty)$**.**

Η εφαπτόμενη στο τυχαίο σημείο $(x_0\,,y_0)$, ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Το $\left(\dfrac{x_0}{4},0\right)\in E \Leftrightarrow 0-f(x_0)=f'(x_0)\left(\dfrac{x_0}{4}-x_0\right)\Leftrightarrow -f(x_0)=-\dfrac{3}{4}x_0 f'(x_0)$

$\Leftrightarrow f(x_0)=\dfrac{3}{4}x_0 f'(x_0)\Leftrightarrow \dfrac{4}{3x_0}=\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\ \ \forall\ x_0\in(0,+\infty)$

Άρα $\forall\ x_0\in(0,+\infty)$

$\dfrac{4}{3x}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\left[\dfrac{4}{3}\ell nx\right]'=\left[\ell nf(x)\right]'\Rightarrow\dfrac{4}{3}\ell nx+c=\ell nf(x)\Rightarrow f(x)=e^{\frac{4}{3}\ell nx+c}$

Το $(1,1)\in C_f\ \Leftrightarrow f(1)=1\Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}\ell n1+c}=1\Rightarrow e^c=1\Rightarrow c=0$. Τότε $f(x)=e^{\frac{4}{3}\ell nx}\ \Rightarrow f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

128. **Να βρεθεί η f αν** $f'(x)=\dfrac{1-x\cdot\ell nx}{xe^x}$ **και** $f(1)=0$

Είναι $f'(x)=\dfrac{1-x\cdot\ell nx}{xe^x}=\dfrac{1}{e^x}\dfrac{1-x\ell nx}{x}=\dfrac{1}{e^x}\left(\dfrac{1}{x}-\ell nx\right)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ell nx}{e^x}=\dfrac{\frac{1}{x}e^x-\ell nx\, e^x}{(e^x)^2}=\left(\dfrac{\ell nx}{e^x}\right)'$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{\ell nx}{e^x}+c$, $f(1)=0\Rightarrow c=0$. Άρα $f(x)=\dfrac{\ell nx}{e^x}$.

129. **Έστω η συνεχής f στο Δ και** $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Delta$ **δείξτε ότι:**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\gamma^\delta f(x)dx+\int_\alpha^\gamma f(x)dx\cdot\int_\delta^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\delta f(x)dx\cdot\int_\beta^\gamma f(x)dx=0$$

Α μέλος=

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\gamma^\delta f(x)dx+\left[\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx\right]\cdot\int_\delta^\beta f(x)dx+\left[\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx\right]\cdot\int_\beta^\gamma f(x)dx$$

$$=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\gamma^\delta f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\delta^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx\cdot\int_\delta^\beta f(x)dx+$$

$$+\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\beta^\gamma f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx\cdot\int_\beta^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx\cdot\int_\beta^\gamma f(x)dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\cdot\left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx+\int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx\right]+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx\cdot\left[\int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx\right]$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\cdot\int_{\gamma}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx\cdot\int_{\delta}^{\delta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\cdot 0+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx\cdot 0=0$$

130. **Να υπολογιστεί το** $\int_{1}^{10} f(x)\,dx$ **αν** $f(x)+f'(x)\ell n x^x=1\ \ \forall\ x>0$

Είναι $f(x)+f'(x)\ell n x^x=1\Rightarrow f(x)+f'(x)\cdot x\ell n x=1\overset{:x}{\Rightarrow}\dfrac{f(x)}{x}+f'(x)\ell n x=\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow\left[f(x)\ell n x\right]'=\left[\ell n x\right]'\Rightarrow f(x)\cdot\ell n x=\ell n x+c$. Για $x=1$ $f(1)\cdot\ell n1=\ell n1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(x)\cdot\ell n x=\ell n x\Rightarrow f(x)=1$ $\int_{1}^{10} f(x)\,dx=\int_{1}^{10}1dx=\ldots$

131. **Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν** $\forall\ x\in IR$ $\int_{0}^{x} f(t)\,dt+f(x)=e^x$

Είναι $\left[\int_{0}^{x} f(t)\,dt+f(x)\right]'=(e^x)'\Rightarrow f(x)+f'(x)=e^x\Rightarrow f'(x)\cdot e^x+f(x)e^x=e^x\cdot e^x$

$\Rightarrow\left[f(x)e^x\right]'=e^{2x}\Rightarrow\left[f(x)e^x\right]'=\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)'\Rightarrow f(x)e^x=\dfrac{1}{2}e^{2x}+c$

Για $x=0$ $(\Sigma)\Rightarrow\int_{0}^{0} f(t)\,dt+f(0)=e^0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$ άρα $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

132. **Να βρεθεί η f με** $e+\int_{1}^{x} f(t)\,dt=\dfrac{f(x)}{x}$**,** $x>0$**,** $f(x)>0$**, f παραγωγίσιμη.**

Έχουμε $\left(e+\int_{1}^{x} f(t)\,dt\right)'=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\Rightarrow f(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}\Rightarrow x^2 f(x)=f'(x)\cdot x-f(x)$

$\Rightarrow(x^2+1)\,f(x)=x\,f'(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow\left[\ell n f(x)\right]'=\left[\dfrac{x^2}{2}+\ell n x\right]'\Rightarrow\ell n f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ell n x+c$

$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+\ell n x+c}\Rightarrow f(x)=x\cdot e^c\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

Για $x=1$ $(\Sigma)\Rightarrow e+\int_{1}^{1} f(t)\,dt=\dfrac{f(1)}{1}\Rightarrow f(1)=e\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$

Άρα $f(x)=x\cdot e^{\frac{x^2+1}{2}}$

133. **Αν** $x\cdot f'(x)+(x-1)\,f(x)=0$**,** $f(x)>0\ \ \forall\ x>0$ **και** $f(1)=\dfrac{1}{e}$ **να υπολογιστεί το** $\int_1^e f(x)\,dx$**.**

Είναι

$$x\cdot f'(x)+(x-1)\,f(x)=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1\Rightarrow\left[\ell nf(x)\right]'=\left[\ell nx-x\right]'\Rightarrow\ell nf(x)=\ell nx-x+c$$

Για $x=1$ $\ell nf(1)=\ell n1-1+c\Rightarrow\ell n\dfrac{1}{e}=-1+c\Rightarrow c=0$ τότε $\ell nf(x)=\ell nx-x$

$$f(x)=e^{\ell nx-x}\Rightarrow f(x)=x\cdot e^{-x}\quad\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e x\,e^{-x}dx=\int_1^e x(-e^{-x})'dx=...$$

134. **Αν** $\forall\ x\in IR\ \ \int_{-x}^{x}f(t)\,dt=0$ **τότε δείξτε ότι η f περιττή.**

Είναι $\forall\ x\in IR\ \ \int_{-x}^{x}f(t)\,dt=0\Rightarrow\int_{-x}^{0}f(t)\,dt+\int_{0}^{x}f(t)\,dt=0\Rightarrow-\int_{0}^{-x}f(t)\,dt+\int_{0}^{x}f(t)\,dt=0$

$$\Rightarrow\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{-x}f(t)\,dt\quad(1)$$

Θέτω $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, $g'(x)=f(x)$

Τότε $(1)\Rightarrow g(x)=g(-x)\Rightarrow g'(x)=g'(-x)\cdot(-x)'\Rightarrow f(x)=f(-x)(-1)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$
άρα η f περιττή.

135. **Να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{1}{x}(1+\eta\mu t)^{\frac{1}{t}}dt$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{1}{x}(1+\eta\mu t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\int_0^x(1+\eta\mu t)^{\frac{1}{t}}dt\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(1+\eta\mu t)^{\frac{1}{t}}dt}{x}$

$$\overset{\%}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left[\int_0^x(1+\eta\mu t)^{\frac{1}{t}}dt\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\eta\mu x)^{\frac{1}{x}}}{1}=\lim_{x\to0}e^{\ell n(1+\eta\mu x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ell n(1+\eta\mu x)}=e^1=e$$

γιατί $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ell n(1+\eta\mu x)}{x}\overset{\%}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\ell n(1+\eta\mu x)\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}{1}=1$

136. **Να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x (t^t - t)\,dt}{\int_1^x (\ell nt - t + 1)\,dt}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (t^t - t)\,dt}{\int_1^x (\ell nt - t + 1)\,dt} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\left(\int_1^x (t^t - t)\,dt\right)'}{\left(\int_1^x (\ell nt - t + 1)\,dt\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{\ell nx - x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ell nx + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \overset{\%}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ell nx + 1)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

137. **Να βρεθούν τα όρια** $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \frac{1}{x}\cdot\frac{e^t + e^{-t} - t^2 - 2}{\eta\mu^2 t - t^2}\,dt$ **και** $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{1}{x}\cdot\frac{e^t + e^{-t} - t^2 - 2}{\eta\mu^2 t - t^2}\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{e^t + e^{-t} - t^2 - 2}{\eta\mu^2 t - t^2}\,dt}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \frac{e^t + e^{-t} - t^2 - 2}{\eta\mu^2 t - t^2}\,dt\right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\eta\mu^2 x - x^2} \overset{\%}{=} -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \overset{\%}{=} \ldots = \frac{1}{2}$$

138. **Να βρεθούν τα όρια** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (8^t - 2^t)\,dt}{2x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu 2t - \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu^2 t}\,dt}{x}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t + 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (8^t - 2^t)\,dt}{2x^2} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x (8^t - 2^t)\,dt\right)'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{8^x - 2^x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{(8^x - 2^x)'}{(4x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x \ell n8 - 2^x \ell n2}{4} = \frac{\ell n8 - \ell n2}{4} = \frac{\ell n2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu 2t - \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu^2 t}dt}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int \frac{\sigma\upsilon\nu 2t - \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu^2 t}dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

$$\overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu^2 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu 2x + \eta\mu x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(-2\eta\mu 2x + \eta\mu x)'}{(\eta\mu 2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu 2x} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t + 3t)^{\frac{1}{t}}dt}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x (e^t + 3t)^{\frac{1}{t}}dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0} e^{\ell n(e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}} = e^4$$

γιατί $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ell n(e^x + 3x)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ell n(e^x + 3x)}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[\ell n(e^x + 3x)\right]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x + 3x}(e^x + 3)}{1} = 4$

139. **Έστω η f με** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$**,** $x > 1$**, δείξτε ότι** $\lim_{x\to +\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Έστω $x > e$ $t \in [x, x+1] \Rightarrow x \le t \le x+1 \Rightarrow f(x) \ge f(t) \ge f(x+1)$

$\Rightarrow \frac{\ln x}{x} \ge f(t) \ge \frac{\ln(x+1)}{x+1} \Rightarrow \int_x^{x+1}\frac{\ln x}{x}dt \ge \int_x^{x+1} f(t)\,dt \ge \int_x^{x+1}\frac{\ln(x+1)}{x+1}dt$

$\Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \frac{\ln x}{x}$ (1)

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\ln(x+1)\right]'}{(x+1)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$, όμοια $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ell n x}{x} = 0$

Τότε από το κριτήριο παρεμβολής λόγω (1) $\lim_{x\to +\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$

140. **Αν** $f'(x) \ge 5\cdot f(x)$ $\forall\, x \in R$ $f(0) = 1$ **όπου f μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση τότε** $\int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 e^{5x}dx$

Έστω η g με $g(x) = f(x)\cdot e^{-5x}$ ορισμένη στο R, $g'(x) = f'(x)\cdot e^{-5x} - 5f(x)\cdot e^{-5x} \ge 0 \Rightarrow g$ αύξουσα

$x \ge 0 \Rightarrow g(x) \ge g(0) = f(0)\cdot e^{-5\cdot 0} = 1 \Rightarrow g(x) \ge 1 \Rightarrow f(x)\cdot e^{-5x} \ge 1 \Rightarrow f(x) \ge e^{5x}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 e^{5x}dx$$

141. **Έστω η f με** $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ **, δείξτε ότι** $f(t)\le \frac{x^2}{e^x}$ $\forall\ t\in[x,x+1]$**,** $x>2$**.**

Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

$f'(x)=e^{-x}x(2-x)<0 \Rightarrow f\downarrow\ \ \forall\ x>2$

$t\in[x,x+1]\Rightarrow x\le t\le x+1\Rightarrow f(x)\ge f(t)\ge f(x+1)$ (1)

Άρα $f(t)\le f(x)\Rightarrow f(t)\le \frac{x^2}{e^x}$

Είναι $(1)\Rightarrow f(x+1)\le f(t)\le f(x)\Rightarrow \int_x^{x+1} f(x+1)\,dt\le \int_x^{x+1} f(t)\,dt\le \int_x^{x+1} f(x)\,dt$

$\Rightarrow (x+1)^2e^{-(x+1)}\le \int_x^{x+1} f(t)\,dt\le x^2e^{-x}$ (2)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{-(x+1)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{(e^{x+1})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{e^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[2(x+1)\right]'}{(e^{x+1})'}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x+1}}=0$, όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$, τότε $(2)\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

142. **Να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t^2(1-e^{-3t})\,dt}{\int_0^x (4t-2\eta\mu 2t)\,dt}$

Έστω η f με $f(x)=\int_0^x t^2(1-e^{-3t})\,dt$. Είναι η $[t^2(1-e^{-3t})]$ συνεχής άρα η f παραγωγίσιμη οπότε η f συνεχής άρα

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=\int_0^0 t^2(1-e^{-3t})\,dt=0\Rightarrow \lim_{x\to0}\left[\int_0^x t^2(1-e^{-3t})\,dt\right]=0$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x (4t-2\eta\mu 2t)\,dt=0$

Τότε $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t^2(1-e^{-3t})\,dt}{\int_0^x (4t-2\eta\mu 2t)\,dt}\overset{\%}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left[\int_0^x t^2(1-e^{-3t})\,dt\right]'}{\left[\int_0^x (4t-2\eta\mu 2t)\,dt\right]'}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1-e^{-3x})}{4x-2\eta\mu 2x}\overset{\%}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[x^2(1-e^{-3x})\right]'}{\left[4x-2\eta\mu 2x\right]'}=\lim_{x\to0}\frac{2x+e^{-3x}(3x^2-2x)}{4-4\sigma\upsilon\nu 2x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left[2x+e^{-3x}(3x^2-2x)\right]'}{(4-4\sigma\upsilon\nu 2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-3x}(12x-9x^2-2)}{8\eta\mu 2x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}(27x^2-54x+18)}{16\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$$

143. **Δείξτε ότι η** $f(x)=\int_x^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt$ **είναι σταθερή.**

Είναι $f(x)=\int_x^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt=\int_x^{0} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt+\int_0^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt=-\int_0^{x} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt+\int_0^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt$

$f'(x)=-e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}+e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi(x+1)}(x+1)'=-e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}+e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi x+2\pi)}$

$=-e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}+e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}=0\Rightarrow f(x)=c$

144. **Δείξτε ότι:** $\int_1^{\varepsilon\varphi x}\frac{dt}{1+t^2}+\int_1^{\sigma\varphi x}\frac{dt}{1+t^2}=0$

Έστω η F με $F(x)=\int_1^{\varepsilon\varphi x}\frac{dt}{1+t^2}+\int_1^{\sigma\varphi x}\frac{dt}{1+t^2}$

$F'(x)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot(\varepsilon\phi\chi)'+\frac{1}{1+\sigma\varphi^2 x}\cdot(\sigma\phi\chi)'=...=0\Rightarrow F(x)=c$

Τότε $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=c\Rightarrow ...\Rightarrow 0=c$. Άρα $F(x)=0\Rightarrow ...$

145. **Δείξτε ότι η παράσταση** $\int_\alpha^x f(t)(x-t)\,dt-\int_\alpha^x\left(\int_\alpha^t f(\omega)\,d\omega\right)dt$ **είναι σταθερή στο R, όπου f συνεχής στο** IR**.**

Έστω η F με

$F(x)=\int_\alpha^x f(t)(x-t)\,dt-\int_\alpha^x\left(\int_\alpha^t f(\omega)\,d\omega\right)dt=x\int_\alpha^x f(t)\,dt-\int_\alpha^x t\,f(t)\,dt-\int_\alpha^x\left(\int_\alpha^t f(w)dw\right)dt$

Έστω η $g(t)=\int_\alpha^t f(\omega)\,d\omega$ τότε $F(x)=x\int_\alpha^x f(t)\,dt-\int_\alpha^x t\,f(t)\,dt-\int_\alpha^x g(t)\,dt$

$F'(x)=(x)'\int_\alpha^x f(t)\,dt+x\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)'-\left(\int_\alpha^x t\,f(t)\,dt\right)'-\left(\int_\alpha^x g(t)\,dt\right)'$

$=\int_\alpha^x f(t)\,dt+x\,f(x)-x\,f(x)-g(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt-g(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt-\int_\alpha^x f(\omega)\,d\omega=0$

$\Rightarrow F'(x)=0\Rightarrow F(x)=ct$, άρα η αρχική παράσταση σταθερή.

146. **Έστω f:** $[0,\alpha]\to R_+^*$ **μια αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση .**

Δείξτε ότι η g αύξουσα με $g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{x}dt$ **.**

Είναι $g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{x}dt \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'$

$$\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{-\int_0^x f(t)\,dt+x\,f(x)}{x^2}$$

Έστω η h με $h(x)=-\int_0^x f(t)\,dt+x\,f(x)$, $h'(x)=-f(x)+f(x)+x\,f'(x)\Rightarrow h'(x)=x\,f'(x)$

f αύξουσα$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(x)\ge 0 \\ x\ge 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow h'(x)\ge 0\Rightarrow h$ αύξουσα

$x\ge 0\Rightarrow h(x)\ge h(0)=-\int_0^0 f(t)\,dt+0\,f(0)=0$

$\Rightarrow h(x)\ge 0\Rightarrow -\int_0^x f(t)\,dt+x\,f(x)\ge 0\Rightarrow g'(x)\ge 0\Rightarrow g$ αύξουσα

147. **Έστω f συνεχής στο** $(0,+\infty)$ **με** $xf(x)-1=\int_e^x \frac{t\,f(t)}{x}dt$ **. Δείξτε ότι** $f(x)\le\frac{1}{e}$

Είναι $xf(x)-1=\frac{1}{x}\int_e^x t\,f(t)\,dt\Rightarrow x^2f(x)-x=\int_e^x t\,f(t)\,dt$ (1)

$\Rightarrow\left[x^2f(x)-x\right]'=\left(\int_e^x t\,f(t)\,dt\right)'\Rightarrow 2x\,f(x)+x^2f'(x)-1=x\,f(x)\Rightarrow x\,f(x)+x^2f'(x)=1$

$\Rightarrow f(x)+x\,f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\left[x\,f(x)\right]'=\left[\ell nx\right]'\Rightarrow x\,f(x)=\ell nx+c$

Για $x=e$ $(1)\Rightarrow e^2f(e)-e=0\Rightarrow e\,f(e)=1\Rightarrow c=0$ άρα $f(x)=\frac{\ell nx}{x}$

$\forall\ x\in(0,+\infty)\quad f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{e}$

148. **Να βρεθεί η παραγωγίσιμη f στο** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **αν**

$f(x)\cdot\eta\mu x+f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=e^{-x}\sigma\upsilon\nu^3x$ **και** $f(0)=-1/2$ **.**

Είναι

$$f(x)\eta\mu x+f'(x)\sigma\upsilon\nu x=e^{-x}\sigma\upsilon\nu^3x\Rightarrow\frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right]'=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right]' dx = \int e^{-x}\sigma\upsilon\nu x dx \Rightarrow \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \int (-e^{-x})'\sigma\upsilon\nu x\, dx \Rightarrow ...$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x + e^{-x}\eta\mu x - \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} + c \Rightarrow 2\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = e^{-x}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c$$

$f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = 0$ Άρα $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot e^{-x}}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$

149. **Έστω f συνεχής στο R και α, β, γ θετικοί διάφοροι του ένα. Αν ισχύει** $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3 + \int_0^x f(t)\,dt \quad \forall\ x \in IR$ **δείξτε ότι** $e^{f(0)} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

Έστω η h με $h(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x - \int_0^x f(t)\,dt$ είναι $h(0) = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - \int_0^0 f(t)\,dt = 3$

Από υπόθεση $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3 + \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow \alpha^x + \beta^x + \gamma^x - \int_0^x f(t)\,dt \geq 3 \Rightarrow h(x) \geq h(0)$

$\forall\ x \in R$ Άρα στο $x_0 = 0$ η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και επειδή η h παραγωγίσιμη με $h'(x) = \alpha^x \ell n\alpha + \beta^x \ell n\beta + \gamma^x \ell n\gamma - f(x)$ θα είναι

$h'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ell n\alpha + \beta^0 \ell n\beta + \gamma^0 \ell n\gamma - f(0) = 0 \Rightarrow \ell n\alpha + \ell n\beta + \ell n\gamma = f(0) \Rightarrow$

$\ell n(\alpha\beta\gamma) = f(0) \Rightarrow e^{f(0)} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

150. **Να βρεθεί ο** $\alpha \in (0,\pi)$ **αν** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} \frac{\eta\mu x\, dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2} = \ell n\frac{3}{2}$

Θέτω $y = \sigma\upsilon\nu x$, $dy = -\eta\mu x\, dx$, $x = \frac{\pi}{3} \to y = \frac{1}{2}$, $x = \alpha \to y = \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\int_{\pi/3}^{\alpha} \frac{\eta\mu x\, dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma\upsilon\nu\alpha} \frac{-dy}{y^2 - 3y + 2}$ (1). Είναι $y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$

Εστω α,κεR: $\frac{-1}{y^2 - 3y + 2} = \frac{a}{y-1} + \frac{k}{y-2} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = -1 \end{cases}$

$$(1) = \int_{1/2}^{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{-1}{y-2}\right)dy = \left[\ln|y-1| - \ln|y-2|\right]_{1/2}^{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \left[\ln\left|\frac{y-1}{y-2}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2}\right| - \ln\frac{1}{3}$$

Πρέπει $\ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2}\right| - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2}$.

151. **Ένα Golf αυτοκίνητο στοιχίζει καινούργιο 5000000 δρχ και η αξία του μειώνεται μετά από χρόνο t με ρυθμό μεταβολής** $\frac{6000}{(t+2)^2}$ **χιλλιάδες δρχ. Να βρεθεί η αξία του μετά από 4 χρόνια και μετά από πολλά χρόνια.**

Εστω Π(t) η αξία του αυτοκινήτου σε χρόνο t τότε:

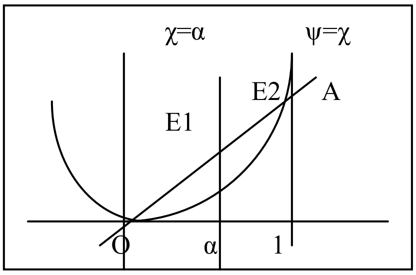
$$\Pi'(t)=\frac{-6000}{(t+2)^2}\Rightarrow\int\Pi'(t)dt=\int\frac{-6000}{(t+2)^2}dt\Rightarrow\Pi(t)=\frac{6000}{t+2}+a$$

Είναι Π(0)=5000 $\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow a=2000$, $\Pi(t)=\dfrac{6000}{t+2}+2000$, $\Pi(4)=\dfrac{6000}{4+2}+2000=3000$ χιλ.δρχ.

και $\lim\limits_{t\to+\infty}\Pi(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\{\dfrac{6000}{t+2}+2000\}=2000$ χιλ.δρχ μετά από πολλά χρόνια.

152. **Για ποια τιμή του αεR η ευθεία x=α χωρίζει το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των γραμμών με εξισώσεις ψ=x, ψ= x^2 σε δύο ισεμβαδικά μέρη.**

Τα κοινά σημεία των καμπυλών έχουν συντεταγμένες από την λύση του συστήματος $\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, απορριπτεται \\ \chi=1\Rightarrow y=1 \end{cases}$ άρα Α(1, 1)



Πρέπει $E_1=E_2\Leftrightarrow\int_0^a(x-x^2)dx=\int_a^1(x-x^2)dx\Leftrightarrow...\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

153. **Εστω f συνεχής στο R με f(ημx)+f(συνx)=1 για κάθε xεR, δείξτε ότι $\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu\chi)dx=\frac{\pi}{4}$.**

Από την δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\int_0^{\pi/2}[f(\eta\mu\chi)+f(\sigma\upsilon\nu\chi)]dx=\int_0^{\pi/2}1dx\Rightarrow\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu\chi)dx+\int_0^{\pi/2}f(\sigma\upsilon\nu\chi)dx=\frac{\pi}{2}(1)$$

Θέτουμε $\chi=\frac{\pi}{2}-y$, dx=-dy, x=0$\Rightarrow$ψ=$\frac{\pi}{2}$, x=$\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ψ=0

$$\int_0^{\pi/2}f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx=\int_{\pi/2}^{0}f\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right](-dy)=\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu y)\,dy=\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu x)\,dx$$

Τότε (1)$\Rightarrow 2\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{\pi/2}f(\eta\mu x)\,dx=\frac{\pi}{4}$

154. **Να βρεθεί ο $\alpha\in N^*$ ώστε $\int_0^{\pi/2}\eta\mu 2x\cdot\eta\mu^{\alpha}x\,dx=\frac{1}{6}$**

Είναι $\int_0^{\pi/2}\eta\mu 2x\cdot\eta\mu^{\alpha}x\,dx=\int_0^{\pi/2}2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^{\alpha}x\,dx=\int_0^{\pi/2}2\eta\mu^{\alpha+1}x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$ (1)

Θέτω $y=\eta\mu x$, $dy=\sigma\upsilon\nu x\,dx$, $x=0\to y=0$, $x=\frac{\pi}{2}\to y=1$

Τότε $(1)=\int_0^1 2y^{\alpha+1}dy=2\left[\frac{y^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1=2\frac{1}{\alpha+2}=\frac{2}{\alpha+2}$

Πρέπει $\frac{2}{\alpha+2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \alpha+2=12\Leftrightarrow \alpha=10$

155. **Να βρεθεί ο $\nu\in N$ ώστε $\int_0^1 x(1-x)^{\nu}\,dx=\frac{1}{56}$**

Θέτω $1-x=y$, $dy=-dx\Rightarrow dx=-dy$, $x=0\to y=1$, $x=1\to y=0$

$$\int_0^1 x(1-x)^{\nu}\,dx=\int_1^0(1-y)\,y^{\nu}(-dy)=\int_0^1(y^{\nu}-y^{\nu+1})\,dy=\left[\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1}-\frac{y^{\nu+2}}{\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}$$

Πρέπει $\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}=\frac{1}{56}\Leftrightarrow\frac{1}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}=\frac{1}{56}\Leftrightarrow \nu^2+3\nu-54=0\Leftrightarrow\begin{cases}\nu=6 & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\\ \nu=-9 & \alpha\pi o\rho.\end{cases}$

156. **Η πλευρά τετραγώνου είναι $10m$. Ξαφνικά η πλευρά του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{\sigma\upsilon\nu t}{8+\sigma\upsilon\nu^2 t}m/s$ σε χρόνο t sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου την χρονική στιγμή $t_0=\frac{3\pi}{4}$.**

Έστω την χρονική στιγμή t είναι η πλευρά $\alpha(t)$ και το εμβαδόν $E(t)$.

Τότε $\alpha'(t)=\frac{\sigma\upsilon\nu t}{8+\sigma\upsilon\nu^2 t}\Rightarrow\int\alpha'(t)\,dt=\int\frac{\sigma\upsilon\nu t}{8+1-\eta\mu^2 t}dt\Rightarrow\alpha(t)=\int\frac{\sigma\upsilon\nu t\,dt}{9-\eta\mu^2 t}$ (1)

Θέτω $y=\eta\mu t$, $dy=\sigma\upsilon\nu t\,dt$ $(1)\Rightarrow\alpha(t)=\int\frac{dy}{9-y^2}=\int\frac{dy}{(3-y)(3+y)}$ (2)

Έστω $\alpha,\beta\in IR:\frac{1}{(3-y)(3+y)}=\frac{\alpha}{3-y}+\frac{\beta}{3+y}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1/6\\ \beta=1/6\end{cases}$

$$(2)\Rightarrow\alpha(t)=\int\left(\frac{1/6}{3+y}+\frac{1/6}{3-y}\right)dy=\int\left(\frac{1/6}{y+3}-\frac{1/6}{y-3}\right)dy=\frac{1}{6}\left[\ell n|y+3|-\ell n|y-3|\right]+c$$

$$\Rightarrow\alpha(t)=\frac{1}{6}\ell n\left|\frac{y+3}{y-3}\right|+c\Rightarrow\alpha(t)=\frac{1}{6}\ell n\left|\frac{\eta\mu t+3}{\eta\mu t-3}\right|+c\Rightarrow\alpha(t)=\frac{1}{6}\ell n\frac{3+\eta\mu t}{3-\eta\mu t}+c$$

Είναι $\alpha(0)=10\Leftrightarrow\frac{1}{6}\ell n\frac{3+\eta\mu 0}{3-\eta\mu 0}+c=10\Leftrightarrow\frac{1}{6}\ell n1+c=10\Leftrightarrow c=10$

Τότε $\alpha(t)=\frac{1}{6}\ell n\frac{3+\eta\mu t}{3-\eta\mu t}+10$, $E(t)=\alpha^2(t)=\left[\frac{1}{6}\ell n\frac{3+\eta\mu t}{3-\eta\mu t}+10\right]^2$

Είναι $E'(t)=...$ άρα $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)=...$

157. **Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(x)\geq 0\ \ \forall\ x\in[0,+\infty)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx', $x=0$, $x=t$ με $t\geq 0$**

δίνεται από τη σχέση $\left[f(t) - \frac{t^2}{2} + t - 1 \right]$ $\forall\ t \geq 0$. **Ποιος ο τύπος της f;**

Είναι $E = \int_0^t f(t)\,dt$ αλλά και $E = f(t) - \frac{t^2}{2} + t - 1 \ \ \forall\ t \in [0, +\infty)$

Άρα $\int_0^t f(x)\,dx = f(t) - \frac{t^2}{2} + t - 1 \Rightarrow \left[\int_0^t f(x)\,dx \right]' = \left[f(t) - \frac{t^2}{2} + t - 1 \right]'$

$\Rightarrow f(t) = f'(t) - t + 1 \Rightarrow f(t) + t = f'(t) + 1 \Rightarrow f(t) + t = [f(t) + t]' \Rightarrow f(t) + t = ce^t$

$f(t) = ce^t - t$, για t=0

$\int_0^0 f(x)\,dx = f(0) - \frac{0^2}{2} + 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c = 1, \ \ \alpha\rho\alpha \ \ f(x) = e^x - x$.

158. **Η αυξηση του πληθυσμού N(t) σε εκατομμύρια βακτηρίδια αυξάνει με ρυθμό** te^{4t} **ανα λεπτό. Ποια η αυξηση του πληθυσμού από τα 20 sec έως τα 80 sec.**

Είναι $N'(t) = te^{4t} \Rightarrow \int N'(t)dt = \int te^{4t}dt \Rightarrow N(t) = \int t\left(\frac{e^{4t}}{4}\right)' dt \Rightarrow \ldots \Rightarrow N(t) = \frac{t}{4}e^{4t} - \frac{e^{4t}}{16} + c$

$A = N(80) - N(20) = [\frac{80}{4}e^{480} - \frac{e^{480}}{16} + c] - [\frac{20}{4}e^{420} - \frac{e^{420}}{16} + c] = ...$

159. **Ο πληθυσμός P(t) βακτηριδίων αυξάνει με ρυθμό ανάλογο του τριπλάσιο του πληθυσμού εκείνης της χρονικής στιγμής. Αν ο πληθυσμός διπλασιάζεται σε 50 μέρες σε πόσες μέρες θα τετραπλασιασθεί.**

Είναι $P'(t) = 3P(t) \Rightarrow P'(t) - 3P(t) = 0 \Rightarrow P'(t)e^{-3t} - 3P(t)e^{-3t} = 0 \Rightarrow \left[P(t)e^{-3t}\right]' = 0$

$P(t)e^{-3t} = c \Rightarrow P(t) = c\,e^{3t}$, P(50)=2P(0) $\Rightarrow c = \frac{2}{e^{150}}P(0)$

Πρέπει $P(t) = 4P(0) \Rightarrow .... \Rightarrow t =$

160. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με** $f^3(x) + \int_1^x f^2(t)\,dt = 2\lambda \int_1^x f(t)\,dt + \int_x^1 (2\lambda^2 - \lambda + 3)\,dt \ \ \forall\ x \in IR$. **Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα** $\forall\ \lambda \in IR$.

Έχουμε $f^3(x) + \int_1^x f^2(t)\,dt = 2\lambda \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x (2\lambda^2 - \lambda + 3)\,dt$, παραγωγίζω τη σχέση

$3f^2(x)\,f'(x) + f^2(x) = 2\lambda\, f(x) - (2\lambda^2 - \lambda + 3)$ (1)

Έστω ότι στο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ η f παρουσιάζει ακρότατο τότε $f'(x_0) = 0$

Θέτω $x = x_0$ (1)

$\Rightarrow 3f^2(x_0)\, f'(x_0) + f^2(x_0) = 2\lambda f(x_0) - (2\lambda^2 - \lambda + 3) \Rightarrow f^2(x_0) - 2\lambda f(x_0) + 2\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$

Τριώνυμο ως προς $f(x_0)$, $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(2\lambda^2 - \lambda + 3) = -4\lambda^2 + 4\lambda - 12 < 0$ γιατί $\Delta' < 0$

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

161. **Έστω η παραγωγίσιμη f με** $f^2(x) + \int_1^x \left[e^t + f'(t)\right]dt = -x^6 \quad \forall\, x \in R$**, δείξτε ότι η** C_f **όχι σημεία καμπής.**

Έστω ότι στο $M(x_0, f(x_0))$ παρουσιάζει σημείο καμπής τότε $f''(x_0) = 0$, παραγωγίζουμε δύο φορές τη δοσμένη και έχουμε:

$2f(x)\, f'(x) + e^x + f'(x) = -6x^5 \Rightarrow$

$2f'(x)\, f'(x) + 2f(x)\, f''(x) + e^x + f''(x) = -30x^4$ Θέτω $x = x_0$ τότε

$2\left[f'(x_0)\right]^2 + 2f(x_0)\, f''(x_0) + e^{x_0} + f''(x_0) = -30{x_0}^4 \Rightarrow 2\left[f'(x_0)\right]^2 + e^{x_0} = -30{x_0}^4$

αδύνατη, άρα η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

162. **Δείξτε ότι** $\forall\, x > 0$ **ισχύει** $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ **και** $\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\nu\, dx = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\kappa\, dx$**,** $\kappa, \nu \in N^*$**.**

Θέτω όπου $t = \frac{1}{y}$, $dt = \left(\frac{1}{y}\right)' dy \Rightarrow dt = -\frac{1}{y^2}dy$

Για $t = x \to x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$, $t = 1 \to 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\frac{y^2+1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{y^2+1}dy = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$$

Θέτω $x = 1 - y$, $dx = (1-y)'dy \Rightarrow dx = -dy$

Για $x = 0 \to 0 = 1 - y \Leftrightarrow y = 1$

$x = 1 \to 1 = 1 - y \Leftrightarrow y = 0$

$$\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\nu\, dx = \int_1^0 (1-y)^\kappa \left[1-(1-y)\right]^\nu (-dy) = -\int_0^1 (1-y)^\kappa y^\nu (-dy) = \int_0^1 (1-y)^\kappa y^\nu dy = \int_0^1 (1-x)^\kappa x^\nu dx$$

163. **Έστω f συνεχής στο [α,β] με μ ελάχιστη, Μ μέγιστη τιμή της f στο [α,β]. Δείξτε ότι:** $\mu\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta \left[\int_\alpha^x f(t)\,dt\right]dx \le \mathrm{M}\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$**.**

Είναι $\mu \le f(t) \le M$ (1) $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$

$$(1) \Rightarrow \int_{\alpha}^{x} \mu\, dt \le \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \le \int_{\alpha}^{x} M\, dt \Rightarrow \mu(x-\alpha) \le \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \le M\,(x-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x-\alpha)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right]dx \le \int_{\alpha}^{\beta} M\,(x-\alpha)\,dx \Rightarrow ...$$

164. **Έστω f συνεχής στο R με** $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(-x) = x \cdot e^{-x}$ **,** $\alpha+\beta \ne 0$ **υπολογίστε το** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ **.**

Θέτω $x=-y$, $dx=-dy$, $x=-1 \to y=1$, $x=1 \to y=-1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-y)(-dy) = -\int_{-1}^{1} f(-y)(-dy) = \int_{-1}^{1} f(-y)\,dy \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(-x)\,dx$$

Είναι $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(-x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \alpha\, f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} \beta\, f(-x)\,dx = \int_{-1}^{1} x e^{-x} dx$

$$\Rightarrow \alpha \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \beta \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(-e^{-x})'\,dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{-1}^{1} x(-e^{-x})'\,dx = ... = \frac{-2e^{-1}}{\alpha+\beta}$$

165. **Έστω f συνεχής στο [α,β], α>0,** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ **και η g με** $g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{x} f(t)\,dt$ **.**

Δείξτε ότι εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την g στο [α,β] και $\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta): \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\,dt = \gamma\, f(\gamma)$ **.**

Είναι $g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{x} f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$. Είναι η g συνεχής σαν γινόμενο συνεχών.

Είναι η g παραγωγίσιμη με $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right]' = -\frac{1}{x^2}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{x} f(x)$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0,\quad g(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 0,\quad g(\alpha) = g(\beta)$$

Εφαρμόζεται για την g στο [α,β] το Θ. Rolle, $\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta): g'(\gamma) = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\gamma^2}\int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\,dt + \frac{1}{\gamma} f(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\,dt = \gamma\, f(\gamma)$$

166. **Εστω η f συνεχής στο** $[0,+\infty)$ **με f(x)>0 και η h με** $h(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$**, x>0.**

Δείξτε ότι η h είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$ **.**

Είναι $h'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\ \ f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\dfrac{f(x)[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\ ]}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$ (1)

Εστω η g με $g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$

Είναι $g'(x)=(x)'\int_0^x f(t)dt+x(\int_0^x f(t)dt)'-(\int_0^x tf(t)dt)'=\int_0^x f(t)dt>0$

Γιατί $f(t)>0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt>0\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow$

Και $x>0\Rightarrow g(x)>g(0)=0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow$

167. **Αν f παραγωγίσιμη στο R με** $f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$**, να βρεθεί η f.**

Θέτω x-t=w, dt=-dw, $t=0\to w=x$, $t=x\to w=0$

Τότε $\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt=\int_x^0 e^{w-x}f(w)(-dw)=\int_0^x e^w e^{-x}f(w)dw=e^{-x}\int_0^x e^w f(w)dw$

Τότε $f(x)=x^2+e^{-x}\int_0^x e^w f(w)dw\Rightarrow\dfrac{f(x)-x^2}{e^{-x}}=\int_0^x e^w f(w)dw$

$\Rightarrow\{e^x[f(x)-x^2]\}'=\{\int_0^x e^w f(w)dw\}'$

$\Rightarrow\ldots\Rightarrow f'(x)=x^2+2x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+c$, για x=0 (Σ)$\Rightarrow$f(0)=0$\Rightarrow$c=0$\Rightarrow$

$f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2$.

168. **Να βρεθεί η ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και διαιρεί το επίπεδο χωρίου που περιέχεται από την** $f(x)=-x^2+4x$ **του xx' σε δύο ισοδύναμα μέρη.**

Έστω ε: y=αx η ζητούμενη ευθεία και $g(x)=\alpha\cdot x$.

$$M:\begin{cases} y=\alpha x \\ y=-x^2+4x \end{cases} \rightarrow M\left(4-\alpha,\ -\alpha^2+4\alpha\right)$$

Πρέπει

$$E_1+E_2=E_{ολ}=\int_0^4 f(x)\,dx \Leftrightarrow 2E_1=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx \Leftrightarrow 2\int_0^{4-\alpha}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{4-\alpha}\left[-x^2+4x-\alpha x\right]dx=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx \Leftrightarrow 2\cdot\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-\frac{\alpha x^2}{2}\right]_0^{4-\alpha}=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4 \Leftrightarrow ...\alpha$$

169. **Δίνεται f(x)=x² και οι ημιευθείες y=λx,** $x \ge 0$**,** $y=-\frac{1}{\lambda}x$**,** $x \le 0$**,** $\lambda \in R_+^*$**. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) που περικλείεται από την C_f και τις παραπάνω ημιευθείες. Για ποια τιμή του λ το εμβαδό γίνεται ελάχιστο.**

Θα βρούμε τις τετμημένες των Α, Β αντίστοιχα:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-\frac{1}{\lambda}x \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{\lambda} \qquad \begin{cases} y=x^2 \\ y=\lambda x \end{cases} \Rightarrow x=\lambda$$

$$E(\lambda)=\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{0}\left(-\frac{1}{\lambda}x-x^2\right)dx+\int_0^{\lambda}(\lambda x-x^2)\,dx=...=\frac{\lambda^6+1}{6\lambda^3}$$

Έστω η g με $g(x)=\frac{x^6+1}{6x^3}$, x>0 τότε $g'(x)=\frac{x^6-1}{2x^4}$

Για x=1 η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, άρα και η ισοδύναμή της Ε(λ) για λ=1 γίνεται ελάχιστη.

170. **Η γραφική παράσταση C_f της f με** $f(x)=6x-x^2$ **τέμνει τον xx΄ στα O και A. Οι εφαπτόμενες της C_f στο O και A τέμνονται στο B. Να δειχθεί ότι η C_f χωρίζει το εμβαδόν του τριγώνου OAB σε δύο μέρη που έχουν λόγο 2.**

Π.Ο. f A=R $f'(x)=6-2x$. Η C_f τέμνει τον xx΄ στα O(0,0), A(6,0).

Εξίσωση εφαπτομένης στο Ο: ε_1: $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=6x$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Α: ε_2: $y-f(6)=f'(6)(x-6) \Leftrightarrow y=-6(x-6)$

Οι συντεταγμένες του Β: $\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}:\begin{cases} y=6x \\ y=-6x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=15 \end{cases}$ B(3,18)

$$E_{OAB}=\frac{1}{2}(OA)\cdot \upsilon=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 18=54$$

$$E_2=\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6(6x-x^2)\,dx=\left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6=18 \quad E_1=E_{0AB}-E_2=36$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{36}{18}=2$$

171. **Έστω η f με** $f(x)=\eta\mu x$ **ορισμένη στο [0,π] και η πολυωνυμική δευτέρου βαθμού συνάρτηση g που έχει με την f το ίδιο ακρότατο και τέμνει τον xx΄ στα ίδια σημεία. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από αυτές.**

Έστω $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \alpha,\beta,\gamma\in R\ ,\ \alpha\neq 0\ ,\ g'(x)=2\alpha x+\beta$

Η C_f τέμνει τον xx΄ στα (0,0), (π,0) και έχει μέγιστο στο $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Τα ίδια ισχύουν και για την C_g, δηλαδή:

$g(0)=0\Leftrightarrow \gamma=0\ ,\ g(\pi)=0\Leftrightarrow \alpha\pi^2+\beta\pi+\gamma=0\Leftrightarrow \beta=-\alpha\pi\ ,\ g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow \beta=-\alpha\pi$ ισχύει

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow \alpha\frac{\pi^2}{4}+\beta\frac{\pi}{2}=1\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \alpha=-\frac{4}{\pi^2}\ ,\ \beta=\frac{4}{\pi}\ ,\ g(x)=-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=...=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Άρα η C_g βρίσκεται λόγω συμμετρίας υπεράνω της C_f στο [0,π].

$E=\int_0^{\pi}[g(x)-f(x)]dx=...$

172. **Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της** $f(x)=\int_x^{11-2x}\sqrt{t^2-4}\,dt$

Η συνάρτηση g με $g(t)=\sqrt{t^2-4}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ άρα για να ορίζεται η f πρέπει:

$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ (1)

$(11-2x)\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\ \begin{cases}11-2x\le -2\\ 11-2x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{13}{2}\\ x\le 3\end{cases}$ (2)

άρα $x\in(-\infty,-2]\cup[2,3]\cup\left[\frac{13}{2},+\infty\right]=A$.

173. **Να βρεθεί ο** $\nu\in N^*$ **όταν** $\int_1^e\frac{dx}{x^{\nu+1}+x}=1+\ell n\sqrt[5]{\frac{2}{e^5+1}}$

Είναι $\int_1^e\frac{dx}{x^{\nu+1}+x}=\int_1^e\frac{dx}{x(x^{\nu+1})}=\int_1^e\frac{x^{\nu-1}dx}{x^\nu(x^\nu+1)}$ (1)

Θέτω $y=x^\nu \quad dy=\nu x^{\nu-1}dx\Rightarrow\frac{dy}{\nu}=x^{\nu-1}dx$

x=1 $\rightarrow$ y=i

x=e $\rightarrow$ y=e^ν

(1)= $\int_1^{e^\nu}\frac{\frac{1}{\nu}dy}{y(y+1)}=\frac{1}{\nu}\int_1^{e^\nu}\frac{1}{y(y+1)}dy=\frac{1}{\nu}\int_1^{e^\nu}\frac{(y+1)-y}{y(y+1)}dy=\frac{1}{\nu}\int_1^{e^\nu}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right]dy$

$$=\frac{1}{\nu}\left[\ell n|y|-\ell n|y+1|\right]_1^{e^\nu}=\frac{1}{\nu}\left[\ell n\left|\frac{y}{y+1}\right|\right]_1^{e^\nu}=\frac{1}{\nu}\left[\ell n\frac{e^\nu}{e^\nu+1}-\ell n\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{\nu}\ell n\frac{\frac{e^\nu}{e^\nu+1}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\nu}\ell n\frac{2e^\nu}{e^\nu+1}$$

Πρέπει $\frac{1}{\nu}\ell n\frac{2e^\nu}{e^\nu+1}=1+\ell n\sqrt[5]{\frac{2}{e^5+1}}\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{2e^\nu}{e^\nu+1}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\ell ne+\ell n\sqrt[5]{\frac{2}{e^5+1}}\Leftrightarrow \ell n\sqrt[\nu]{\frac{2e^\nu}{e^\nu+1}}=\ell n\sqrt[5]{\frac{2e^5}{e^5+1}}$

$\Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{2e^\nu}{e^\nu+1}}=\sqrt[5]{\frac{2e^5}{e^5+1}}\Leftrightarrow \nu=5$.

174. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο** $[1,+\infty)$ **με** $f(x)=\int_1^x te^{t-f(t)}dt$**. Να βρεθεί η f.**

Είναι $f(x)=\int_1^x te^{t-f(t)}dt\Rightarrow f'(x)=\left(\int_1^x te^{t-f(t)}dt\right)'\Rightarrow f'(x)=x\cdot e^{x-f(x)}$

$\Rightarrow f'(x)=xe^xe^{-f(x)}\Rightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}=xe^x\Rightarrow \int f'(x)e^{f(x)}dx=\int xe^xdx$

$\Rightarrow \int[e^{f(x)}]'dx=\int x(e^x)'dx\Rightarrow e^{f(x)}=xe^x-\int(x)'e^xdx\Rightarrow e^{f(x)}=xe^x-e^x+c$

$f(x)=\ell n(xe^x-e^x+c)$

Για x=1 $(\Sigma)\Rightarrow f(1)=\int_1^1 te^{t-f(t)}dt\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow c=1$

Τότε $f(x)=\ell n(xe^x-e^x+1)$

175. **Έστω η f συνεχής στο** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$**, με** $\int_{\frac{1}{2}}^{\eta\mu x} f(t)dt=\sqrt{3}\frac{x^2}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{36}$**.**

Να βρεθεί το $f\left(\frac{1}{2}\right)$**.**

$f'(\eta\mu x)\cdot(\eta\mu x)'=\left[\sqrt{3}\frac{x^2}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{36}\right]'\Rightarrow f(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{3}\,x\ (1)$

Για $x=\frac{\pi}{6}$ $f\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

176. **Αν** $G(x)=\int_1^x f(t)dt$**,** $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$**, x>0, t>0. Να βρείτε το** $G''(1)$**,**

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cdot G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$

$$G(x)=\int_1^x f(t)\,dt \Rightarrow G'(x)=f(x)=\int_1^{3x}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$$. Έστω $h(x)=\int_1^x \frac{e^u}{\sqrt{u}}du \Rightarrow h'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow G''(x)=3\cdot h'(3x)=3\frac{e^{3x}}{\sqrt{3x}}=\frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}},\ G''(1)=\sqrt{3}\cdot e^3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cdot G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3}e^{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sqrt{3}e^{3x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=6\sqrt{3}$$

177. **Δείξτε ότι** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt}{x}=\frac{16}{9}$

Έστω η f με $f(x)=\int_x^{2x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt=\int_x^{0}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt+\int_0^{2x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}=\int_0^{2x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt-\int_0^{x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt\ \ (1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4t}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3t}dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{\%}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 8x}{\ell n\sigma\upsilon\nu 6x}-\frac{\ell n\sigma\upsilon\nu 4x}{\ell n\sigma\upsilon\nu 3x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{(\ell n\sigma\upsilon\nu 8x)'}{(\ell n\sigma\upsilon\nu 6x)'}-\frac{(\ell n\sigma\upsilon\nu 4x)'}{(\ell n\sigma\upsilon\nu 3x)'}\right]=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\frac{-8\eta\mu 8x}{\sigma\upsilon\nu 8x}}{-6\frac{\eta\mu 6x}{\sigma\upsilon\nu 6x}}-\frac{\frac{-4\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu 4x}}{-3\frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu 3x}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8}{3}\frac{\sigma\upsilon\nu 6x}{\sigma\upsilon\nu 8x}\frac{\eta\mu 8x}{\eta\mu 6x}-\frac{4}{3}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu 4x}\frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 3x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8}{3}\frac{\sigma\upsilon\nu 6x}{\sigma\upsilon\nu 8x}\cdot\frac{8\sigma\upsilon\nu 8x}{6\sigma\upsilon\nu 6x}-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu 4x}\cdot\frac{4\sigma\upsilon\nu 4x}{3\sigma\upsilon\nu 3x}\right]=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{8\cdot 1}{6\cdot 1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{4\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{32}{9}-\frac{16}{9}=\frac{16}{9}.$$

178. **Σε μια λίμνη ο πληθυσμός των ψαριών A(t) αυξάνει με ρυθμό 20% σε χρόνο** $t\in[0,10]$ **έτη. Δίνεται ότι αρχικά ρίξαμε στη λίμνη 10.000 ψάρια. Να βρεθεί ο πληθυσμός στα 10 χρόνια.**

Είναι $A'(t)=\frac{20}{100}\cdot A(t)\Rightarrow A'(t)=0{,}2A(t)\Rightarrow\frac{A'(t)}{A(t)}=0{,}2\Rightarrow[\ell nA(t)]'=(0{,}2t)'$

$\Rightarrow \ell nA(t)=0{,}2t+c\Rightarrow A(t)=e^{0{,}2t+c}$

Είναι $A(0)=10.000\Rightarrow e^c=10.000$ τότε $A(t)=10.000e^{0{,}2t}$

Τότε $A(10)=10.000\cdot e^2$ ψάρια θα βρίσκονται στα 10 χρόνια.

179. **Έστω f, g συνεχής συναρτήσεις στο R, δείξτε ότι:**

$$\int_{1-\alpha}^{\alpha}f(x)\cdot g(1-x)\,dx=\int_{1-\alpha}^{\alpha}f(1-x)g(x)\,dx$$

Θέτω όπου x=1-y, $dx=(1-y)'dy\Rightarrow dx=-dy$

Για $x=1-\alpha\Rightarrow 1-\alpha=1-y\Rightarrow y=\alpha$

$x=\alpha \Rightarrow \alpha=1-y \Rightarrow y=1-\alpha$

$$\int_{1-\alpha}^{\alpha} f(x)g(1-x)dx=\int_{\alpha}^{1-\alpha} f(1-y)g\big(1-(1-y)(-dy)\big)=-\int_{1-\alpha}^{\alpha} f(1-y)g(y)(-dy)=\int_{1-\alpha}^{\alpha} f(1-x)g(x)dx\,.$$

180. **Δείξτε ότι** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$

Θέτω $x=\dfrac{\pi}{2}-y$, $dx=\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)' dy \Rightarrow dx=-dy$

Για $x=0 \to 0=\dfrac{\pi}{2}-y \Leftrightarrow y=\dfrac{\pi}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-y \Leftrightarrow y=0$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_{\pi/2}^{0} f\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)(-dy)=-\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu y)(-dy)=\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx$$

Θέτω x=π-y, $dx=(\pi-y)'dy \Rightarrow dx=-dy$

Για $x=0 \to 0=\pi-y \Leftrightarrow y=\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}=\pi-y \Leftrightarrow y=\dfrac{\pi}{2}$

$$I=\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx=\int_{\pi}^{\pi/2} f\big(\eta\mu(\pi-y)\big)(-dy)=-\int_{\pi/2}^{\pi} f(\eta\mu y)(-dy)=\int_{\pi/2}^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

$$=\int_{\pi/2}^{0} f(\eta\mu x)dx+\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx=-\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx+\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx \Rightarrow I=-I+\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx \Rightarrow \ldots$$

181. **Δείξτε ότι** $\int_0^{\pi} x\cdot f(\eta\mu x)dx=\dfrac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$ **. Υπολογίστε το** $\int_0^{\pi}\dfrac{x\cdot\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$ **.**

Θέτω x=π-y, dx=-dy, x=0 $\to y=\pi$, $x=\pi \to y=0$

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-y)f\big(\eta\mu(\pi-y)\big)(-dy)=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx-\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx \Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx=\int_0^{\pi} x\cdot\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \overset{y=\sigma\upsilon\nu x}{=} \frac{\pi}{2}\cdot\int_1^{-1}\frac{dy}{4-y^2}=\ldots$$

182. **Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και** $\forall\, x\in IR$ **είναι** $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta \quad \forall \alpha,\beta\in R$ **. Δείξτε ότι** $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)dx=\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$ **.**

Θέτω x=-y, dx=-dy x=-α $\to$y=α, x=α$\to$y=-α

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(\alpha+y)(-dy) = -\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+y)(-dy) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)\,dx$

Θέτω y=α+x, dy=dx, x=-α $\to$y=0, x=α $\to$y=2α

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)dx = \int_{0}^{2\alpha} f(y)dy = \int_{0}^{2\alpha} f(x)dx$

Είναι

$f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2\beta dx \Rightarrow 2\int_{0}^{2\alpha} f(x)dx = 2\beta(\alpha-(-\alpha))$

$\int_{0}^{2\alpha} f(x)dx = 2\alpha\beta$.

183. **Δείξτε ότι** $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du$

Έστω η F με $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du - \int_0^x g(u)du$, όπου $g(u) = \int_0^u f(t)dt$

Τότε $F(x) = \int_0^x f(u)x\,du - \int_0^x f(u)u\,du - \int_0^x g(u)du$

$\Rightarrow F(x) = x\cdot\int_0^x f(u)du - \int_0^x u\cdot f(u)du - \int_0^x g(u)du$

Εύκολα $F'(x)=0 \Rightarrow F(x)=c$ τότε $F(0)=0 \Rightarrow c=0$ άρα $F(x)=0$ …

184. **Έστω η f:** $R \to R_+^*$ **με** $2f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad \forall\, x,y\in IR$**, αν f'(0)=4, δείξτε ότι η f παραγωγίσιμη με** $f'(x)=2f(x)$**. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου από C_f, xx', x=0, x=1.**

Για x=y=0 (Σ) $2f(0+0)=f(0)\cdot f(0) \Rightarrow 2f(0)=f^2(0) \overset{f:R\to R_+^*}{\underset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow}} f(0)=2$

Είναι $f'(0)=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=4$ (1)

Έστω $x\in R$, $h\neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)\cdot f(h)}{2}-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-2f(x)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot[f(h)-2]}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)}{2}\cdot\frac{f(h)-2}{h} \overset{(1)}{=} \frac{f(x)}{2}\cdot 4 = 2f(x) \Rightarrow f'(x)=2f(x) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)}=2$$

$\Rightarrow [\ell n f(x)]' = 2 \Rightarrow \ell n f(x) = 2x+c \Rightarrow f(x)=e^{2x+c}$

$f(0)=2 \Rightarrow e^c=2$ τότε $f(x)=e^{2x}\cdot e^c \Rightarrow f(x)=2\cdot e^{2x}$

$E=\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2e^{2x}dx = [e^{2x}]_0^1 = e^2-1$ τ.μ.

185. **Έστω f συνεχής στο** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **τότε** $\exists\,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$**:** $\int_0^g f(t)dt = f(\gamma)\cdot\sigma\varphi\gamma$

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x)\cdot \sigma\varphi x \underset{g'(x)=f(x)}{\overset{g(x)=\int_0^x f(t)\,dt}{\Rightarrow}} g(x) = g'(x)\sigma\phi x \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sigma\phi x} \Rightarrow (\ell ng(x))' = (-\ell n\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$\Rightarrow \ell ng(x) = \ell n(\sigma\upsilon\nu x)^{-1} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot g(x) = 1$$

Έστω η F με $F(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \int_0^x f(t)\,dt$ ορισμένη και συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Είναι η F παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $F'(x) = -\eta\mu x \cdot \int_0^x f(t)\,dt + \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)$

$F(0) = \sigma\upsilon\nu 0 \cdot \int_0^0 f(t)\,dt = 0 = 0$ $\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = 0$ $\quad F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Εφαρμόζεται για την F στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ το Θ. Rolle, άρα $\exists\, \gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $F'(\gamma) = 0$

$$\Rightarrow -\eta\mu\gamma\int_0^\gamma f(t)\,dt + \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot f(\gamma) = 0 \Rightarrow \int_0^\gamma f(t)dt = \sigma\varphi\gamma \cdot f(\gamma)$$

186. **Έστω f συνεχής στο [1,3] με $\int_1^3 f(x)dx = -\frac{4}{\pi}$.**

Δείξτε ότι $\exists\, \gamma \in (1{,}3)$: $f(\gamma) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi\gamma}{2}$

Έστω η g με $g(x) = \int_1^x f(t)dt - \frac{2}{\pi}\eta\mu\frac{\pi x}{2}$ ορισμένη στο [1,3].

Είναι η g συνεχής στο [1,3] παραγωγίσιμη στο (1,3) με $g'(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}$

και $g(1) = -\frac{2}{\pi}$, $g(3) = -\frac{2}{\pi}$, τότε g(0)=g(3)

άρα εφαρμόζεται για την g στο [1,3] το Θ.Rolle $\exists\, \gamma \in (1{,}3)\ g'(\gamma) = 0 \ldots\ldots f(\gamma) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi\gamma}{2}$

187. **Έστω f συνεχής στο [0,1] με $1821\cdot\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι $\exists\, \gamma \in (0{,}1)$:** $f(\gamma) = \gamma^{1820}$

Έστω η g με $g(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{1821}x^{1821}$ ορισμένη στο [0,1].

Είναι $1821\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1821}$ (1)

Είναι η g συνεχής στο [0,1] παραγωγίσιμη στο (0,1) με $g'(x) = f(x) - x^{1820}$

και $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, τότε g(0)=g(3)

άρα εφαρμόζεται για την g στο [0,1] το Θ.Rolle $\exists\, \gamma \in (0,)\ g'(\gamma) = 0 \ldots\ldots f(\gamma) = \gamma^{1820}$

188. **Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το** $I_\nu=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx$ **με το $I_{\nu-2}$.**

$$I_\nu=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x(\eta\mu x)'dx=\left[\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x)'\eta\mu x dx$$

$$=\left[\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}0\cdot\eta\mu 0\right]-\int_0^{\pi/2}(\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x dx=-(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x(-\eta\mu x)\eta\mu x dx$$

$$=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\,dx=(\nu-1)\cdot\int_0^{\pi/2}[\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x-\sigma\upsilon\nu^\nu x]dx$$

$$=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx-(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

$$\Rightarrow I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu\Rightarrow \nu I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}\Rightarrow I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$$

189. **Δίνεται η f ορισμένη και συνεχής στο R και περιττή. Δείξτε ότι η συνάρτηση g με** $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ **είναι άρτια.**

Είναι $g(-x)=\int_\alpha^{-x}f(t)dt=\int_\alpha^x f(t)dt+\int_x^{-x}f(t)dt=\int_\alpha^x f(t)dt+0=g(x)$ άρα g άρτια

γιατί $\int_x^{-x}f(t)dt=\int_x^0 f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=-\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=-\int_0^x f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=0$

γιατί αν θέσω t=-y, dt=-dy $t=0\to y=0\quad t=-x\to y=x$

$$\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^x f(-y)(-dy)\overset{f\ \pi\varepsilon\rho.}{=}\int_0^x -f(y)(-dy)=\int_0^x f(t)dt$$

190. **Έστω η f συνεχής στο [α,β] με f(α)>α², $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}$. Δείξτε ότι** $\exists\,\gamma\in(\alpha,\beta)$**:** $f(\gamma)=\gamma^2$**.**

Έστω η $g(x)=f(x)-x^2$ ορισμένη στο [α,β], τότε $g(a)=f(a)-a^2>0$

Εστω ότι για κάθε xε[α,β] g(x)>0$\Rightarrow\int_\alpha^\beta g(x)dx>0\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}$

που είναι άτοπο, άρα δεν είναι πάντα θετική η g.

Αρα υπάρχει κε[α,β] g(κ)<0 και επειδή g(α)>0 τότε κε(α,β] g(κ)<0

Εφαρμόζεται το Θ. Bolzano για την g στο [α,κ], τότε $\exists\,\gamma\in(\alpha,\kappa)\subseteq(\alpha,\beta)$:

$g(\gamma)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow f(\gamma)=\gamma^2$

191. **Δίνεται η F με** $F(x)=\int_e^x(\ln t-\ln(\ln t))dt$**, x>1. Να μελετηθεί ως προς μονοτονία, σημεία καμπής.**

Είναι $F'(x)=\ln x-\ln(\ln x)$

$F(x)''=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ell nx-1}{\ell nx}$

$\forall\ x>1\ \ F'(x)\geq F'(e)=1>0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα

Άρα η F στο x=e παρουσιάζει σημεία καμπής.

192. **Δίνεται η F με $F(x)=\int_1^x\left(\sqrt{\ln t}-\ln\sqrt{t}\right)dt$, x>1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα σημεία καμπής.**

Είναι $F'(x)=\sqrt{\ln x}-\ln\sqrt{x}$

$F''(x)=\frac{1}{2^x}\cdot\frac{1-\sqrt{\ln x}}{\sqrt{\ln x}}$

Θέτω $F'(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}-\ln\sqrt{x}>0\Leftrightarrow x<e^4$

$F''(x)>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x<e$

193. **Έστω η f ορισμένη στο IR με f'' συνεχή, παρουσιάζει Τ.Α. στο x_0=2 και η C_f περνά από το Α(0,1). Αν $\int_0^2[xf''(x)+3f'(x)]dx=-\frac{8}{3}$ να βρεθεί το f(2).**

Είναι $A(0,1)\in C_f\Leftrightarrow f(0)=1$, η f στο x_0=2 Τ.Α. $\Rightarrow f'(2)=0$

Έχουμε $\int_0^2[xf''(x)+3f'(x)]dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 xf''(x)dx+3\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow[xf'(x)]_0^2-\int_0^2(x)'f'(x)dx+3\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 2\cdot\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow[f(x)]_0^2=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow f(2)-f(0)=-\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow f(2)-1=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow f(2)=-\frac{1}{3}$

194. **Έστω η συνεχής στο IR συνάρτηση f. Να αποδείξετε ότι**

$2\int_0^x[f(t)\int_0^t f(z)dz]dt=[\int_0^x f(w)dw]^2$

Έστω F μία παράγουσα της f. Τότε είναι $2\int_0^x[F'(t)\int_0^t F'(z)dz]dt=2\int_0^x[F'(t)[F(z)]_0^t]dt$

$=2\int_0^x[F'(t)\left(F(t)-F(0)\right)]dt=\int_0^x 2F'(t)\,F(t)\,dt-2\int_0^x F(0)\,F'(t)\ dt$

$=\left[(F(t))^2\right]_0^x-2F(0)[F(t)]_0^x=F^2(x)-F^2(0)-2F(0)\left(F(x)-F(0)\right)=F^2(x)-2F(0)F(x)+F^2(0)$

$=\left(F(x)-F(0)\right)^2=\left[[F(w)]_0^x\right]^2=\left[\int_0^x f(w)dw\right]^2$

195. **Έστω η $f(x)=2\ln x-\ln(\ln x)$ και έστω α που παρουσιάζει ακρότατο και β σημείο καμπής η f.**
Δίνεται η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] και g(x)>0 για κάθε x$\in$

[α,β].
g(β)=g΄(β)=0 τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) \neq 0$.

Για το Π.Ο. x>0, $\ell nx > 0 \Leftrightarrow x > 1$ άρα το $A = (1,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 1}{x\ln x}, \quad f''(x) = \frac{-2\ln^2 x + \ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

Άρα στο $\alpha = \sqrt{e}$ παρουσιάζει ελάχιστο και στο β=e σημείο καμπής.
Έστω ότι: $g''(x) = 0$ για κάθε $x \in (\sqrt{e}, e)$
Τότε g΄(x)=c (c: σταθερά) για κάθε $x \in (\sqrt{e}, e)$
Επειδή g΄(x)=c και η g είναι παραγωγίσιμη στο $(\sqrt{e}, e)$, με συνεχή g΄ έπεται ότι: c=g΄(e)=0
Άρα g΄(x)=0, για κάθε $x \in [\sqrt{e}, e]$
δηλαδή g(x)=k (k: σταθερά) για κάθε $x \in [\sqrt{e}, e]$.
Αλλά για $x = e$, g(e)=0=k
οπότε g(x)=0 για κάθε $x \in [\sqrt{e}, e]$, άτοπο αφού g(x)>0 για κάθε $x \in [\sqrt{e}, e]$.
Επομένως υπάρχει $x_0 \in (\sqrt{e}, e)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) \neq 0$.

196. **Θεωρούμε τη συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R και τις εξισώσεις**
$z^2 - (f'(x)+1)z + [f'(x)]^2 = 0$
$z^2 + 2f'(x)z + 1 = 0$, $z \in C$
Αν οι ρίζες τους είναι καθαροί μιγαδικοί για κάθε $x \in IR$ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $[f(x)]^{2001} + 2004 f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο R.

$z^2 - (f'(x)+1)z + [f'(x)]^2 = 0$

Είναι: $\Delta = (f'(x)+1)^2 - 4(f'(x)) < 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -3(f'(x))^2 + 2f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \left(f'(x) < -\frac{1}{3} \text{ ή } f'(x) > 1 \right)$

$z^2 + 2f'(x)z + 1 = 0$

Είναι $\Delta = 4(f'(x))^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < f'(x) < 1$

Άρα $-1 < f'(x) < -\frac{1}{3}$ για κάθε $x \in IR$.
Συνεπώς η f είναι γνήσια φθίνουσα στο R.
Και: $(f(x))^{2001} + 2004 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left[(f(x))^{2000} + 2004\right] = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
που προφανώς έχει το πολύ μία ρίζα στο R, αφού f γνησίως φθίνουσα.

197. **Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,3π], για την οποία ισχύει f(πx)=πf(x) για κάθε $x \in [0,3\pi]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma \in (0,3\pi)$ ώστε $f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) = f(3)$.**

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στα [0,π], [π,2π], [2π,3π].

Υπάρχει α∈(0,π) ώστε $f'(\alpha) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0}$

Υπάρχει $\beta \in (\pi, 2\pi)$ ώστε $f'(\beta) = \frac{f(2\pi) - f(\pi)}{2\pi - \pi}$

Υπάρχει $\gamma \in (2\pi, 3\pi)$ ώστε $f'(\gamma) = \frac{f(3\pi) - f(2\pi)}{3\pi - 2\pi}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) = \frac{f(\pi) - f(0) + f(2\pi) - f(\pi) + f(3\pi) - f(2\pi)}{\pi} = \frac{f(3\pi) - f(0)}{\pi}$$

Όμως $f(\pi x) = \pi f(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{για } x = 0: f(0) = \pi \cdot f(0) \\ \text{για } x = 3: f(3\pi) = \pi \cdot f(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(3\pi) = \pi f(3) \end{cases}$

Άρα $f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) = \frac{\pi f(3) - 0}{\pi} = f(3)$

198. **Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση** $2^x + 3^x + 4^x = 3(2x+1)$ **έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β στο R.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x = 3(2x+1)$ η οποία είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R (με συνεχείς παραγώγους).

Είναι $f(0) = 2^0 + 3^0 + 4^0 - 3(0+1) = 3 - 3 = 0$

$f(1) = 2 + 3 + 4 - 3(2+1) = 9 - 9 = 0$

Θα δείξουμε ότι η f(x)=0 δεν έχει άλλες ρίζες στο R.

Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 τρεις ρίζες της f με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Τότε η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (ρ_1,ρ_2), (ρ_2,ρ_3) με $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.

Άρα υπάρχουν: $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(x_1)=0$, $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε $f'(x_2)=0$

Επίσης η συνάρτηση $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - 6$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2^x (\ln 2)^2 + 3^x (\ln 3)^2 + 4^x (\ln 4)^2 = 0$, άτοπο, αφού $2^x (\ln 2)^2 + 3^x (\ln 3)^2 + 4^x (\ln 4)^2 > 0$ για κάθε $x \in R$.

Επομένως η f(x)=0 (άρα και η εξίσωση) έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R.

199. **Δίνεται η εξίσωση** $1821^x + 2002^x = 1819^x + 2004^x$**,** $x \in IR$

α. Να λυθεί.

β. Αν ρ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης τότε να βρεθεί, αν υπάρχει σημείο καμπής της συνάρτησης f: IR$\to$IR με

$$f(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\sqrt{|x - \rho|} - e^{\lambda(\rho - x)} \cdot \sqrt[3]{|x - \rho|}}{e^{\lambda(\rho - x)} + 1}$$

α. $1821^x + 2002^x = 1819^x + 2004^x \Leftrightarrow 1821^x - 1819^x = 2004^x - 2002^x \Leftrightarrow$

$$\frac{1821^x-1819^x}{1821-1819}=\frac{2004^x-2002^x}{2004-2002} \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση f(y)=y^x τότε f΄(y)=xy^{x-1} και εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. για την f στα διαστήματα [1819,1821] και [2002,2004] θα έχουμε ότι $\exists\ \xi_1\in(1819,1821)$ και $\xi_2\in(2002,\ 2004)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{1821^x-1819^x}{1821-1819}$ και

$f'(\xi_2)=\frac{2004^x-2002^x}{2004-2002}$. Λόγω της (1) έχουμε f΄(ξ_1)=f΄(ξ_2).

Από εφαρμογή του Θ. Rolle στο διάστημα [ξ_1,ξ_2] για την f΄ έχουμε ότι $\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0\Rightarrow x(x-1)\xi^{x-2}=0\Rightarrow x=0$ ή $x=1$.

Άρα οι λύσεις της δεδομένης εξίσωσης είναι δύο οι: x=0 ή x=1.

β. p=1 άρα $f(x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\sqrt{|x-1|}-e^{\lambda(1-x)}\cdot\sqrt[3]{|x-1|}}{e^{\lambda(1-x)}+1}$ (2)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $1-x>0\Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda\cdot(1-x)}=+\infty$

Η (2) γίνεται $f(x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{\lambda\cdot(1-x)}}\sqrt{|x-1|}-\sqrt[3]{|x-1|}}{1+\frac{1}{e^{\lambda\cdot(1-x)}}}=\frac{0-\sqrt[3]{1-x}}{1+0}\Leftrightarrow f(x)=-\sqrt[3]{1-x}$

- Αν $1-x<0\Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda\cdot(1-x)}=0$, άρα η (2) γίνεται

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x-1|}-0}{0+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x-1}$$

- Αν x=1 τότε η (2) γίνεται $f(x)=\frac{0}{1+1}\Leftrightarrow f(x)=0$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{1-x} & \text{αν}\ \ x<1\\ 0 & \text{αν}\ \ x=1\\ \sqrt{x-1} & \text{αν}\ \ x>1\end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο IR.

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα στο x_0=1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-\sqrt[3]{1-x}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(1-x)}{(x-1)\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1 αλλά δέχεται στο σημείο Α(1,0) εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση ε: x=1

Επίσης $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} & \text{αν}\ \ x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{αν}\ \ x>1\end{cases}$ και $f''(x)=\begin{cases}\frac{2}{9\sqrt[3]{(1-x)^5}} & \text{αν}\ \ x<1\\ \frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^3}} & \text{αν}\ \ x>1\end{cases}$

Επειδή η f δέχεται εφαπτομένη στο Α(1,0) και αλλάζει το πρόσημο της $f''(x)$

εκατέρωθεν του x_0=1 τότε το Α(1,0) είναι το ζητούμενο σημείο καμπής.

200. **Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο** IR_+^* **και για κάθε x>0 ισχύει η ισότητα:** $x^2\ln x + f'(x) = x^2e^x - xf''(x)$ **(1).**
α. Αν η f παρουσιάζει στο x_0>0 τοπικό ακρότατο δείξτε $f''(x_0) > 0$**.**
β. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f΄(x) για κάθε x>0.

α. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και παρουσιάζει στο x_0>0 τοπικό ακρότατο τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat ισχύει: f΄(x_0)=0.
Η (1) για x=x_0 γίνεται:

$$x_0^2\ln x_0 + f'(x_0) = x_0^2e^{x_0} - x_0f''(x_0) \Leftrightarrow x_0f''(x_0) = -x_0^2\ln x_0 + x_0^2\cdot e^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$f''(x_0) = x_0(-\ln x_0 + e^{x_0}) \Leftrightarrow f''(x_0) = x_0(\ln e^{e^{x_0}} - \ln x_0) \Leftrightarrow f''(x_0) = x_0\ln\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0}$$

Γνωρίζουμε ότι x_0>0. Θα δείξω ότι $\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0} > 1 \quad \forall\, x_0 > 0$.

$\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0} > 1 \Leftrightarrow e^{e^{x_0}} - x_0 > 0$. Θεωρώ $g(x) = e^{e^x} - x$, x>0 και $g'(x) = e^xe^{e^x} - 1$

Ισχύει $e^xe^{e^x} - 1 > 0$ γιατί ισοδύναμα έχουμε:
$e^xe^{e^x} > 1 \Leftrightarrow e^{e^x} > e^{-x} \Leftrightarrow e^x > -x$ αληθής $\forall\, x > 0$. (e^x γνησίως αύξουσα)
Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε x>0 δηλαδή g γνησίως αύξουσα και $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow$

$e^{e^x} - x > e > 0$ άρα $e^{e^{x_0}} - x_0 > 0 \quad \forall\, x_0 > 0$. Επομένως $\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0} > 1 \Leftrightarrow \ln\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0} > 0 \Leftrightarrow$

$x_0\ln\frac{e^{e^{x_0}}}{x_0} > 0 \Leftrightarrow f''(x_0) > 0$. Επομένως η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

β. $x^2\ln x + f'(x) = x^2e^x - xf''(x) \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) = x^2e^x - x^2\ln x \Leftrightarrow$

$$(xf'(x))' = x^2e^x - x^2\ln x \Rightarrow \int (xf'(x))'dx = \int x^2(e^x)'dx - \int \ln x\left(\frac{x^3}{3}\right)'dx \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) = x^2e^x - 2\int xe^xdx - \frac{x^3}{3}\ln x + \int\frac{x^2}{3}dx \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - \frac{x^3}{3}\ln x + \frac{1}{9}x^3 + c \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = xe^x - 2e^x + 2\frac{e^x}{x} - \frac{x^2}{3}\ln x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{c}{x}$$, c σταθερά, x>0

201. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{\mu^2}{2}x^2 - 2\mu^3x + 40\mu$**,** $\mu \in IR$
α. Να βρεθούν οι τιμές του $k \in IR$ **ώστε η εξίσωση f(x)=k να έχει για κάθε** $\mu \in IR$ **λύση στο IR.**

$f'(x)=x^3+\mu^2x-2\mu^3,\ x\in IR$

$f'(x)=x^3+\mu^2x-2\mu^3=(x-\mu)(x^2+\mu x+2\mu^2)$

Ισχύει $(x^2+\mu x+2\mu^2)\ge 0$ για κάθε $x\in IR$ επειδή $\Delta=-7\mu^2\le 0$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=\mu$ ελάχιστο το $f(\mu)=\frac{\mu^4}{4}+\frac{\mu^4}{2}-2\mu^4+40\mu=-\frac{5}{4}\mu^4+40\mu$,

$\mu\in IR$. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(\mu)=-\frac{5}{4}\mu^4+40\mu$, $\mu\in IR$ τότε

$g'(\mu)=-5\mu^3+40=-5(\mu^3-8)=-5(\mu-2)(\mu^2+2\mu+4)$, $\mu\in IR$ και κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της g έχουμε:

Η g παρουσιάζει μέγιστο το g(2)=60.

Συνεπώς για κάθε $\mu\in IR$ ισχύει $g(\mu)\le g(2)\Rightarrow -(5/4)\mu^4+40\mu\ \le\ 60$ (1).

Αλλά για κάθε $x\in IR$ ισχύει $f(x)\ge f(\mu)\Rightarrow f(x)\ge -(5/4)\mu^4+40\mu$

Το σύνολο τιμών της g(μ) είναι το διάστημα $(-\infty,60]$ και συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει το ελάχιστο της f είναι το 60.

Επειδή για κάθε $x\in IR$ ισχύει $f(x)\in[-(5/4)\mu^4+40\mu,+\infty)$, για να έχει λύση στο IR η εξίσωση f(x)=k για κάθε πραγματική τιμή του $\mu\in IR$ πρέπει $k\in[60,+\infty)$.

202. **Έστω $z=2-\sqrt{3}+i$ και α=Argz και η συνάρτηση f ορισμένη στο [-2,2] με $x^2+f^2(x)=\frac{5\pi}{3\alpha}$. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0.**

Να δείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2).

Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που σχηματίζει με xx΄ γωνία $\frac{\pi}{4}$ αν $f(1)=\sqrt{3}$.

Τότε υπάρχει $\rho\in(0,1)$: ρ+ρf(ρ)=f(ρ).

Είναι $z=2-\sqrt{3}+i=2-2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right]=2-2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{6}+i\eta\mu\frac{-\pi}{6}\right]$

$=2\left[1-\sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{6}-i\eta\mu\frac{-\pi}{6}\right]=2\left[1-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{12}+i\eta\mu\frac{2\pi}{12}\right]=2\left[1-\left(1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\right)+2i\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right]$

$=2\left[2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}+2i\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right]=4\eta\mu\frac{\pi}{12}\left[\eta\mu\frac{\pi}{12}+i\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right]$

$=4\eta\mu\frac{\pi}{12}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=4\eta\mu\frac{\pi}{12}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}+i\eta\mu\frac{5\pi}{12}\right]$ άρα $\alpha=\frac{5\pi}{12}$

Τότε $x^2+f^2(x)=\frac{5\pi}{3\alpha}\Leftrightarrow x^2+f^2(x)=4$ (1)

Αν κ μια ρίζα της f(x)=0, f(κ)=0 με $\kappa\in[-2,2]$

Για x=κ η (1) $\Rightarrow \kappa^2+f^2(\kappa)=4\Leftrightarrow \kappa^2=4\Leftrightarrow \kappa=\pm 2$

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2) τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(-2,2)$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)f(x_2)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\lambda\in(x_1,x_2)\subseteq(-2,2)$ άρα $\lambda\in(-2,2)$: f(λ)=0

Για x=λ η (1) $\lambda^2+f^2(\lambda)=4\Leftrightarrow \lambda^2=4\Leftrightarrow \lambda=\pm 2$ άτοπο άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2)

Τότε $f^2(x)=4-x^2 \Leftrightarrow f(x)=\pm\sqrt{4-x^2}$ επειδή $f(1)=\sqrt{3}>0$ τότε $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

Έστω M(x_0,y_0)$\in$$C_f$ και (ε) η εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ τότε

$\lambda\varepsilon=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f'(x_0)=1 \Leftrightarrow ... \ x_0=-\sqrt{2}$

άρα ε: $y-f(-\sqrt{2})=f'(-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Έστω η h με $h(x)=x+xf(x)-f(x)$ στο [0,1]

Η h συνεχής h(0)=-f(0)=-2, h(1)=1, h(0)h(1)<0

από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(0,1)$: h(ρ)=0$\Leftrightarrow$ρ+ρf(ρ)=f(ρ).

203. **Εστω η παραγωγίσιμη συάρτηση** $f:[0,1]\to R_+$ **και ισχύει** $f(0)\sqrt{e}=f(1)$**. Να δείξτε ότι υπάρχει ρε(0,1) : f'(ρ)=ρf(ρ) και κε(0,1) :** $e^{\frac{f'(k)}{f(k)}}=\sqrt{e}$**.**

Εστω η συνάρτηση h με $h(x)=f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ορισμένη στο [0,1] συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}-xf(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$

Είναι h(0)=f(0), h(1)=…..=f(0)=h(0).

Εφαρμόζεται στη h το Θ.Rolle στο [0,1], άρα υπάρχει ρε(0,1) : h'(ρ)=0 …………f'(ρ)=ρf(ρ).

Εστω η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$ ορισμένη στο [0,1] παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Εφαρμόζεται στη g το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ στο [0,1], άρα υπάρχει κε(0,1) :

$g'(k)=\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} \Leftrightarrow \dfrac{f'(k)}{f(k)}=\ln f(1)-\ln f(0) \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(k)}{f(k)}=\ln\dfrac{f(1)}{f(0)}=\ln\sqrt{e} \Leftrightarrow e^{\frac{f'(k)}{f(k)}}=\sqrt{e}$.

204. **Έστω η συνεχής και παραγωγίσιμη f:** $[0,1]\to[0,1]$ **με** $f(0)=0$**,** $f(1)=1$**. Να δείξτε ότι υπάρχουν** $\alpha,\beta\in[0,1]$ $\alpha\neq\beta$ **με** $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$**.**

Παρατηρώ ότι η $y=1-x$ τέμνει την γραφική παράσταση της f. Έστω η $g(x)=f(x)-1+x$ στο [0,1].

Στο [0,1] για g Θ. Bolzano $\exists\ \rho\in(0,1)$: $g(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=1-\rho$

Στο $[0,\rho]$ Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \alpha\in(0,\rho)$: $f'(\alpha)=\dfrac{f(\rho)-f(0)}{\rho-0}=\dfrac{1-\rho}{\rho}$

Στο $[\rho,1]$ Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\ \beta\in(\rho,1)$: $f'(\beta)=\dfrac{f(1)-f(\rho)}{1-\rho}=\dfrac{\rho}{1-\rho}$

Τότε $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$.

205. **Έστω η παραγωγίσιμη f:** $R\to R$ **και** $f'(x)=f(-x)$**. Να δείξτε ότι η** $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)+2000$ **είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της αν** $f(0)=1$**.**

Θέτω στη σχέση $f'(x)=f(-x)$ όπου x το –x. Τότε $f'(-x)=f(x)$.

Έχουμε $g'(x)=2f(x)f'(x)+2f(-x)f'(-x)(-x)'+(2000)'=2f(x)f'(x)+2f'(x)f(x)(-1)$

$=2f(x)f'(x)-2f'(x)f(x)=0$

άρα $g(x)=c$. Τότε $g(0)=c\ \Leftrightarrow\ f^2(0)+f^2(-0)+2000=c$

$\Leftrightarrow 1+1+2000=c$

$\Leftrightarrow 2002=c$ άρα $g(x)=2002$.

206. **Έστω** $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[1-\sigma\upsilon\nu x]{1+x^2e^x}$ **και οι μιγαδικοί** $z=f(\alpha)f'(\beta)+\sqrt{3}+\kappa i$**,** $w=f(\beta)f'(\beta)+(e^2-1)i$**,** $\alpha<\beta$ **με** $Arg(z-w)=\dfrac{\pi}{6}$ **και f δύο φορές παραγωγίσιμη** $f(x)\neq 0$**,** $f'(x)\neq 0$ **τότε υπάρχουν** $\rho,t\in(\alpha,\beta)$**:** $f(\rho)f''(\rho)+f(t)f''(t)>0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[1-\sigma\upsilon\nu x]{1+x^2e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ell n(1+x^2e^x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=e^2$

άρα $k=e^2$ τότε $z-w=f(\alpha)f'(\beta)-f(\beta)f'(\alpha)+\sqrt{3}+i$

$\varepsilon\varphi Arg(z-w)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{f(\alpha)f'(\beta)-f(\beta)f'(\alpha)+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow f(\alpha)f'(\beta)-f(\beta)f'(\alpha)=0$ (1)

Έστω η g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ στο [α,β] εφαρμόζεται Θ. Rolle υπάρχει $\rho\in(\alpha,\beta)$

$g'(\rho)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{[f'(\rho)]^2-f''(\rho)f(\rho)}{[f'(\rho)]^2}=0$

$\Leftrightarrow[f'(\rho)]^2=f''(\rho)f(\rho)>0$

Όμοια στην $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ εφαρμόζεται Θ. Rolle στο [α,β] υπάρχει $t\in(\alpha,\beta)$

$h'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(t)f(t)-[f'(t)]^2}{[f(t)]^2}=0$

$\Leftrightarrow [f'(t)]^2 = f''(t)f(t)>0$

Τότε $f''(\rho)f(\rho)+f''(t)f(t)>0$.

207. **Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=a+\beta i$ και $z_2=\beta+\alpha i$, με α,βεR και $Arg(z_1)=20^o$.**

α) Να βρείτε το $Arg(z_2)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών 0, z_1 και z_2 είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου, του οποίου να βρείτε τις γωνίες.

γ) Να βρείτε τον μικρότερο νεN* ,ώστε ο μιγαδικός $w=\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^\nu$ να είναι πραγματικός.

δ) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό u=1+$\dfrac{z_2}{z_1}$.

α)Αν $|Z_1|=\rho$, τότε $Z_1=\rho(\text{συν}20^0+i\text{ημ}20^0)$, άρα α=ρσυν$20^0$ και β=ρημ20^0. Επομένως Z_2=β+αi=ρημ20^0+iρσυν20^0=ρ(ημ20^0+iσυν20^0)$\Leftrightarrow Z_2$=ρ(συν70^0 +iημ70^0) δηλαδή Arg(Z_2)=70^0

β)Αποδεικνύουμε ότι $|Z_1|=|Z_2|$ και επειδή Arg $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=50^0$,η γωνία της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου είναι 50^0.

γ) Επειδή w=(συν50^0+iημ50^0)$^\nu$ =συν$\dfrac{5\nu\pi}{18}$+iημ$\dfrac{5\nu\pi}{18}$ τότε $\dfrac{5\nu\pi}{18}$=κπ, κ$\in$N*$\Leftrightarrow$ ν=$\dfrac{18k}{5}$,κ$\in$N*,

άρα με κ=5 βρίσκουμε το μικρότερο ν=18.

δ) w=1+συν50^0 +iημ50=1+2συν$^2 25^0$-1+2iημ25^0.συν25^0

άρα w=2συν$25^0\cdot$(συν25^0 +iημ25^0).

208. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[0;2]\to$R και ο μιγαδικός z= $\sqrt{3}$[f(1)-f(2)]+ ι [f(2)-f(0)] με Arg$(z)=\dfrac{\pi}{6}$. Να αποδείξετε ότι**

α) $f(2)\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον χο ε $(0,1)$τέτοιο , ώστε f(x)=f(2)

γ) η εξίσωση f'(x)=0 έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα (0,2),

δ)υπάρχουν x_1, x_2 του διαστημάτος (0,2) με $x_1<x_2$ τέτοια,ώστε f'(x_1)+2f'(x_2)=0

α)Ο z σε τριγωνομετρική μορφή γράφεται z=ρ(συν$\dfrac{\pi}{6}$+iημ$\dfrac{\pi}{6}$),όπου$|z|$=ρ>0.

Άρα ισχύει $\sqrt{3}$ [f(1)-f(2)]+ ι [f(2)-f(0)] =ρσυν$\frac{\pi}{6}$+iημ$\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}$ [f(1)-f(2)]=ρ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και [f(2)-f(0)] =ρ. $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ f(2)-f(0)=f(1)-f(2)=ρ. $\frac{1}{2}$ >0 (1)

οπότε f(2)= $\frac{f()) + f(1)}{2}$.

β)Από τη σχέση (1) του ερωτήματος (α) έχουμε:
f(2)-f(0)>0 καιf(1)-f(2)>0 $\Leftrightarrow$ f(2)>f(0)καιf(1)>f(2),άρα f(1)>f(2)>f(0).
Συνεπώς από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και από την βρίσκουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0ε(0,1), ώστε f(x_0) =f(2).

γ)Προκύπτει από το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα [x_0 ,2]του ερωτήματος (β).

δ)Από το ερώτημα (α) βρίσκουμε διαδοχικά:

f(2)= $\frac{f(0) + f(1)}{2}$ $\Leftrightarrow$ 2f(2)=f(0)+f(1) $\Leftrightarrow$ 2(f(2)-f(1))=f(0)-f(1) $\Leftrightarrow$ 2. $\frac{f(2) - f(1)}{2-1}$ = - $\frac{f(1) - f(0)}{1-0}$

$\Leftrightarrow$ 2f’ (x_2)=-f’(x_1) ,με $0<x_1<1<x_2<2$

$\Leftrightarrow$ f’(x_1)+2f’(x_2)=0 ,με $x_1<x_2$

209. **Έστω η συνάρτηση f : (0 +∞) $\rightarrow$R δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞) και υπάρχουν**
α, β, γ > 0 με α < β < γ τέτοια ώστε f (α) = α , f (β) = β και f (γ) = γ.
α) Δείξτε ότι υπάρχει κ $\in$ (α, β) : f (κ) = κ f’ (κ) και ότι υπάρχει λ $\in$ (β , γ) : f (λ) = λ f’ (λ).
β) Αν η ευθεία που περνά από τα σημεία Α (κ , f (κ)), Β (λ , f (λ)) περνά από την αρχή των αξόνων δείξτε ότι υπάρχει x_0 > 0 τέτοιο ώστε f’’ (x_0) = 0.

Σκέπτομαι να θέσω το ζητούμενο, θεωρώντας το κ μεταβλητή τότε γίνεται:

f (κ) = κ. f’ (κ) $\Leftrightarrow$ 0 = f’ (κ) . κ – f (κ) $\Leftrightarrow$ 0 = f’ (κ) . κ – f (κ) . κ’ $\Leftrightarrow$

0 = $\frac{f'(\kappa).\kappa - f(\kappa)\kappa'}{\kappa^2}$ $\Leftrightarrow$ 0 = ($\frac{f(\kappa)'}{\chi}$) x=κ

Έστω η συνάρτηση g (x) = $\frac{f(x)}{x}$/{$[a,\beta]$.

Είναι g συνεχής στο $[a,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

g παραγωγίσιμη στο (α, β) με g’ (x) = $\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ και

g (α) = $\frac{f(a)}{a}=1$, g (β) = $\frac{f(\beta)}{\beta}=1$

Άρα από Θ.Rolle υπάρχει κ $\in$ (α , β) : g’ (κ) = 0 $\Leftrightarrow$ f’ (κ) κ = f (κ).
Ομοίως από Θ . Rolle για την g στο $[\beta,\gamma]$ έχουμε ότι υπάρχει λ $\in$ (β, γ) :f’ (λ) . λ = f (λ).

Η ευθεία ΑΒ έχει την εξίσωση (f (κ) – f (λ))x – (κ-λ) y + κ f (λ) – f (κ) λ = 0
0 (0,0) $\in$ AB $\Leftrightarrow$ κ f (λ) – f (κ) λ = 0 $\Leftrightarrow$ κ λ f’ (λ) – κ f’ (κ) λ = 0 $\Leftrightarrow$ f’ (λ) = f’ (κ).
Είναι f’ συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$ διότι f’ παραγωγίσιμη , f’ παραγωγίσιμη στο (κ, λ) και f’ (κ) = f’ (λ).
Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in$ (κ , λ): f’’ (x_0) = 0.

210. **Δίνεται συνάρτηση f : $[0,+\infty)$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι f’ (x) > 0 για κάθε**
x $\in$ $[0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Έστω F (x) = $\int_0^x f(t)dt$ μία αρχική συνάρτηση της f.
Δείξτε ότι: α) $\frac{1}{x}F(x)<F'(x)$ για κάθε x $\in(0,+\infty)$,
β) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$

α) Έστω x > 0. F συνεχής στο $[0,x]$ F παραγωγίσιμη στο (0, x)
με F’ (x) = $(\int_0^x f(t)dt)'$ = f (x).
Αρα από Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_0 \in (0,x)$: F' (x_0) = $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} \Leftrightarrow F'(x_0)=\frac{F(x)-0}{x-0} \Leftrightarrow F'(x_0)=\frac{F(x)}{x}$ (1)
αφού $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$
Είναι F’(x) = f(x) άρα (F’ (x))’ = f’ (x) > 0 για x $\in[0,+\infty)$
Άρα F’ γνησίως γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
Είναι $x_0 \in(0,x)$ άρα x_0 < x $\Rightarrow$ F’(x_0) < F’(x) (2)
από (1) και (2) έχουμε ότι : $\frac{F(x)}{x}<F'(x)$ για κάθε x > 0.
β) Από (α) έχουμε ότι: $\frac{F(x)}{x}<F'(x)$ για κάθε x > 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{F(x)}{x}<f(x)$ $\Leftrightarrow$ F (x) < x f (x)
με $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=+\infty(-\infty)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$.

211. **Έστω η f: $[0,+\infty)\to R$ με $f(x)e^{f(x)}=x$ τότε η f γνησίως αύξουσα,**
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ell nx}=1$.

Έστω η f γνησίως φθίνουσα τότε αν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)}>e^{f(x_2)}$

Έστω $f(x)e^{f(x)} = x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

Έτσι $f(x_1)e^{f(x_1)} > f(x_2)e^{f(x_2)} \Rightarrow x_1 > x_2$ άτοπο.

Έστω ότι υπάρχει $\ell > 0$ που για κάθε $x \in [0, +\infty)$ $f(x) < \ell \Rightarrow e^{f(x)} < e^{\ell}$ τότε $f(x)e^{f(x)} < \ell e^{\ell} \Rightarrow x < \ell e^{\ell}$ άτοπο, γιατί ο x τυχαίος. Άρα δεν υπάρχει πραγματικός που να φράζει από πάνω την f τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Είναι $f(x)e^{f(x)} = x \Rightarrow \ell n[f(x)e^{f(x)}] = \ell nx$

$\Rightarrow \ell nf(x) + \ell ne^{f(x)} = \ell nx$

$\Rightarrow \ell nf(x) + f(x) = \ell nx$

$\Rightarrow \dfrac{\ell nf(x)}{f(x)} + 1 = \dfrac{\ell nx}{f(x)}$

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell nf(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\ell nf(x)}{f(x)} + 1\right] = 0 + 1 = 1$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell nf(x)}{f(x)} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ell ny}{y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{y} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ell nx} = 1$.

212. **Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: [0,+∞)$\to$ R με f(0)=f ''(0)=0,για την οποία ισχύει f'''(x)>f'(x) για κάθε x $\in [0,+\infty)$.**
Να αποδείξετε ότι:
α)η συνάρτηση h:$[0,+\infty)\to$R,με τύπο h(x)=f '(x)e^{-x},είναι γνησίως αύξουσα,
β) Να δείξτε ότι f''(x)>0 για κάθε x>0.
γ) η συνάρτηση f^2 είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ δ) f($\frac{1}{2}$)<$\frac{f(1)}{\sqrt{2}}$ ε) lim f(x)=+∞

α)Από την υπόθεση έχουμε : f'''(x) >f'(x) $\Leftrightarrow$ f'''(x)-f'(x)>0 (f''(x)-f(x))'>0 .
Άρα η συνάρτηση g(x)=f''(x)-f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για κάθε x>0 ισχύει g(x)>g(0) $\Leftrightarrow$ f''(x) –f(x)>f'(0)-f(0)=0 $\Leftrightarrow$ f''(x) >f(x) (1)
Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$και για κάθε x>0 είναι
h'(x) =f''(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=(f'(x)-f(x))e^{-x}>0
άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
β)Από το ερώτημα (α) βρίσκουμε για κάθε x>0:
h(x)>h(0) $\Leftrightarrow$ f'(x)e^{-x} >f(0)e^{-0} $\Leftrightarrow$ f'(x)e^{-x} >0 $\Leftrightarrow$ f'(x)>0
αρα η f γνησίως αυξουσα στο $[0,+\infty)$
x>0 $\Leftrightarrow$ f(x)>f(0)=0 $\Leftrightarrow$ f(x)>0 (2)
Άρα από την υπόθεση, τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε
για κάθε x>0: f'' (x) >f' (x)>f(x)>0 (3).
γ) Τώρα, για να αποδείξουμε ότι η f^2 είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, η οποία είναι συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει (f^2 (x))'' >0 για κάθε x>0.
Πράγματι, για κάθε x>0 ισχύει
(f^2(x))'' = $[(f^2$ (x))' $]$'=(2f(x)f'(x))'=2$[$ (f'(x))^2 +f(x)f''(x) $]$ > 0
δ) Με ισοδυναμίες βρίσκουμε:

f($\frac{1}{2}$)< $\frac{f(1)}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow$ f² ($\frac{1}{2}$)< $\frac{f^2(1)}{2}$ $\Leftrightarrow$2f²($\frac{1}{2}$)<f²(1)$\Leftrightarrow$f² ($\frac{1}{2}$) –f² (0)<f²(1)-f²($\frac{1}{2}$)$\Leftrightarrow$

$$\frac{f^2(\frac{1}{2})-f^2(0)}{\frac{1}{2}-0} < \frac{f^2(1)-f^2(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Η σχέση (4) όμως ισχύει, διότι από το Θ.Μ.Τ. το 1_0 μέλος είναι $(f^2)'(\xi_1)$, με $0<\xi_1<\frac{1}{2}$,

και το 2_0 μέλος είναι $(f^2)'(\xi_2)$, με $\frac{1}{2}<\xi_2<1$,

όπου προφανώς $(f^2)'(\xi_1)<(f^2)'(\xi_2)$, αφού η $(f^2)'$ είναι γνησίως αύξουσα από το ερώτημα (β).

δ) Αν x>1 ,τότε από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$=f' (ξ)>f'(1) (από τη σχέση (3),αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα).

Άρα f(x) >(x-1)f'(1)+f(1) (5). Και επειδή $\lim_{x\to+\infty}[(x-1)f'(1)+f(1)]=+\infty$,

από (3), η σχέση (5) δίνει lim f(x) = $+\infty$.

213. **Έστω η συνάρτηση f: $[0,4]\to$ R με f(2) <0, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,4]$, και ο μιγαδικός αριθμός z=f(2)+ $\frac{f(0)+f(4)}{2}$i για τον οποίο ισχύει $(z-1)^{2000}=(z-i)^{2000}$**

α)Να αποδείξετε ότι f(2)= $\frac{f(0)+f(4)}{2}$

β)Να βρείτε το Arg(z).

γ)Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in$(0,4) , για το οποίο ισχύει f'' (x_0)=0.

α)Αν z = α +βi, όπου α = f(2) και β = $\frac{f(0)+f(4)}{2}$,βρίσκουμε : $(z-1)^{2004}=(z-i)^{2004}$,

$$\left|(z-1)^{2000}\right|=\left|(z-i)^{2000}\right| \Leftrightarrow |z-1|^{2000}=|z-i|^{2000} \Leftrightarrow |z-1|=|z-i| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z-i|^2$$

$\Leftrightarrow$ (α-1)²+β² = α² +(β-1)² $\Leftrightarrow$ α²-2 α+1+β² =α² +β² –2β +1 $\Leftrightarrow$ α=β $\Leftrightarrow$ f(2)= $\frac{f(0)+f(4)}{2}$

β)Από το ερώτημα (α) έχουμε: z=f(2)+if(2)=-f(2) (-1-i) = -f(2)$\sqrt{2}$ (συν $\frac{5\pi}{4}$ +iημ $\frac{5\pi}{4}$

αφού Arg(-1-i)= π+$\frac{\pi}{4}$= $\frac{5\pi}{4}$, κι επειδή f(2)<0,το Arg(z)= $\frac{5\pi}{4}$.

γ) Από το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

f(2)= $\frac{f(0)+f(4)}{2}$ $\Leftrightarrow$2f(2)=f((0)+f(4) $\Leftrightarrow$ f(2) − f(0) =f(4) –f(2)

$\Leftrightarrow$ $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$ $\Leftrightarrow$ f' (ξ_1) =f' (ξ_2), με $0<\xi_1<2<\xi_2<4$

Εφαρμόζουμε θ.Rolle και έχουμε $f''(x_0) = 0$, με $0<\xi_1<x_0<\xi_2<4$.

214. **Αν η f:R →R είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, ώστε $f''(x) = -2f^{2001}(x)$ για κάθε x∈R,να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$**

Ισχύει $f''(x) = -2f^{2001}(x)$, άρα $\Leftrightarrow f'(x)f''(x) = -2f'(x)f^{2001}(x)$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(f'(x))^2}{2}+\frac{(f(x))^{2002}}{1001}\right]'=0 \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{2}+\frac{(f(x))^{2002}}{1001}=c\ ,\ c\in R \text{ σταθερά}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{2}=c-\frac{(f(x))^{2002}}{1001}\geq 0 \Leftrightarrow (f(x))^{2002}\leq 1001c \Leftrightarrow |f(x)|\leq \sqrt[2002]{1001c}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[2002]{1001c}\leq f(x)\leq \sqrt[2002]{1001c}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt[2002]{1001c}}{x}\leq \frac{f(x)}{x}\leq \frac{\sqrt[2002]{1001c}}{x}.$$

Και με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής παίρνουμε : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

215. **Αν ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^{2003}}=2004$,να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-10x]$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{2004}}$.**

Ισχύει $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f'(x)}{x^{2003}}x^{2003}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^{2003}}\cdot\lim_{x\to+\infty}x^{2003} = 2004(+\infty) = +\infty$.

Άρα $f'(x) > 11$ για κάθε $x > x_0$, οπότε $(f(x)-11x)' > 0$, με $x>x_0$,

άρα η $(f(x)-11x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$,

οπότε $f(x) - 11x > f(x_0) - 11x_0$,

δηλαδή $f(x) > 11x + f(x_0) - 11x_0$

Και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.

Επίσης $f(x)-10x > x + f(x_0) - 11x_0$

Και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-10x] = +\infty$.

Επίσης είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{2004}}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(x^{2004})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{2004x^{2003}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{20004}\frac{f'(x)}{x^{2003}}\right]=1=$

216. **Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R → R.Να αποδειχθεί ότι :**

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(y)dy\right)dx$$

Ξέρουμε ότι $\left(\int_0^t f(y)dy\right)' = f(t)$ (I) οπότε έχουμε διαδοχικά

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x (xf(t)-tf(t))dt = \int_0^x xf(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t(\int_0^t f(y)dy)'dt = x\int_0^x f(t)dt - \left\{\left[t\int_0^t f(y)dy\right]_0^x - \int_0^x (t)'\int_0^t f(y)dydt\right\} =$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \left[t\int_0^t f(y)dy\right]_0^x + \int_0^x (\int_0^t f(y)dy)dt =$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \left[x\int_0^x f(y)dy - 0.\int_0^0 f(y)dy\right] + \int_0^x (\int_0^t f(y)dy)dt =$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - x\int_0^x f(y)dy + \int_0^x (\int_0^t f(y)dy)dt =$$

$$= \int_0^x (\int_0^t f(y)dy)dt$$

217. **Δίνεται η f/R δις παραγωγίσιμη με f’’ > 0 στο R.**
α) Αν α<β τότε να αποδειχθεί ότι για κάθε x $\in [\alpha,\beta]$
ισχύει ότι: f(x)- f(α) < (x –α)f’ (x)
β) Να αποδειχθεί ότι $2\int_\alpha^\beta f(x)dx < (\beta-\alpha)^2 f'(\beta) + 2(\beta-\alpha)f(a)$

α) Είναι η f συνεχής στο [α,β]
Είναι η f παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε υπάρχει ξ$\in$(α.x) με f’(ξ) = $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (I)
Αφού η f’’>0 η f΄ είναι γνήσια αύξουσα, οπότε για ξ < x συμπεραίνουμε ότι f’ (ξ)< f’ (x) (II).
Από τις (I) και (I) έχουμε ότι:
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ < f’ (x) $\Leftrightarrow$ f(x) – f(α) < (x-α) f ‘ (x) , γιατί x>α x-α > 0

β) Θέλουμε $2\int_\alpha^\beta f(x)dx < (\beta-\alpha)^2 f'(\beta) + 2(\beta-\alpha)f(a)$

$$\Leftrightarrow 0 < (\beta-\alpha)^2 f'(\beta) + 2(\beta-\alpha)f(\alpha) - 2\int_\alpha^\beta f(x)dx)$$

Ορίζουμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

g(x)=(x – α)^2 f’ (x) + 2 (x – α)f(α) - 2$\int_\alpha^\chi f(t)dt$ με παράγωγο:

g’ (x) = [(x – α)^2 f’ (x) + 2 (x – α) f(α) -2$\int_\alpha^\chi f(t)dt$]'=

= 2 (x –α)f’(x) + (x – α)^2 f’’ (x) + 2 f (α) – 2 f (x)=
=(x – α)^2 f’’ (x) + 2 ((x – α) f’ (x) + f(α) – f (x))=

=(x – α)^2 f'' (x) + 2 ((x – α) f' (x) + f (α) – f (x))

Έχουμε από το α) f(x) – f(α) < (x-α) f' (x)
x$\in$ (α,β), άρα (x – α)^2 >o
από υπόθεση f'' (x) > 0
τότε 0 < (x – α) f' (x) + f (α) – f (x) και 0 <(x – α)^2 f'' (x)
και βγάζουμε τελικά το συμπέρασμα ότι g' (x) > 0 με g γνήσια αύξουσα στο $[a,\beta]$
.
Από τα παραπάνω έχουμε ότι:
α < β $\Leftrightarrow$ g (α) < g (β) $\Leftrightarrow$

(α – α)^2 f' (α) – 2 (α – α) f (α) –2 $\int_{\alpha}^{a} f(t)dt$ <(β–α)^{2}f' (β)–2(β – α) f (α)–2 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

$\Leftrightarrow$ 2 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < (\beta-\alpha)^2 f'(\beta) + 2(\beta-\alpha)f(a)$

218. **Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R με ιδιότητα f(x)=** $\frac{e^{x+1}}{2} + \int_{-x}^{0} e^t f(x+t)dt.$

Να βρεθεί η f. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{e}{2}$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον xx' τον ψψ' και τη x = 1.

Είναι f(x)= $\frac{e^{x+1}}{2} + \int_{-x}^{0} e^t f(x+t)dt \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x+1}}{2} + \int_{0}^{x} e^{y-x} f(y)(y-x)'dy$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x+1}}{2} + \int_{0}^{x} e^{-x}e^{-y} f(y)dy \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x+1}}{2} + \frac{1}{e^x}\int_{0}^{x} e^{y} f(y)dy$

$= \Leftrightarrow f(x) - \frac{e^{x+1}}{2} = \frac{1}{e^x}\int_{0}^{x} e^{y} f(y)dy \Leftrightarrow e^x f(x) - \frac{e^{2x+1}}{2} = \int_{0}^{x} e^{y} f(y)dy$

Παραγωγίζοντας τη τελευταία σχέση παίρνουμε:

$(\int_{0}^{x} e^{y} f(y)dy)' =$ = (e^x f(x) - $\frac{e^{2x+1}}{2}$)' $\Leftrightarrow$ e^x f (x) = e^x f (x) + e^x f' (x) – e^{2x+1}

$\Leftrightarrow$ e^x f' (x) = e^{2x+1} $\Leftrightarrow$ f' (x) = e^{x+1} $\Leftrightarrow$ f' (x) = e^{x+1}+c

Ξέρουμε ότι f (0) = $\frac{e^{0+1}}{2} + \frac{1}{e^0}\int_{0}^{0} e^{y} f(y)dy = \frac{e}{2},$

οπότε $\frac{e}{2} = f(0) = e^{0+1} + c \Leftrightarrow c = -\frac{e}{2}$

Από τα παραπάνω τελικά έχουμε ότι f (x) = e^{x+1} - $\frac{e}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x+1} - \frac{e}{2}\right) = -\frac{e}{2}$

Ο άξονας yy' είναι x = 0 , οπότε : 1>x>0 $\Leftrightarrow$ x + 1 > 1 $\Leftrightarrow$ e^{x+1} > e^1> $\frac{e}{2}$

$\Rightarrow$ e^{x+1} > $\frac{e}{2}$ $\Leftrightarrow$ $e^{x+1}-\frac{e}{2}>0$

E = $\int_0^1\left|e^{x+1}-\frac{e}{2}\right|dx=\int_0^1(e^{x+1}-\frac{e}{2})dx=\left[e^{x+1}-\frac{e}{2}x\right]_0^1$ = e^{2+1} - $\frac{e}{2}$. 2 – e^{1+0} + $\frac{e}{2}$. 0

= e^3 – e – e = e^3 – 2 e τ.μ.

219. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο** $(0,+\infty)$ **με** $f(1)=-1$**,** $f(2)=3$ **και** $\int_1^2 f\left(\frac{t}{x}\right)dt\ge\int_1^2 f(t)\,dt$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$**.**

Να δείξτε ότι:

α. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(1,2)$**:** $f(\alpha)=1$

β. υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(1,2)$ **με** $\kappa<\lambda$**:** $2f(\kappa)+f(\lambda)=12$

γ. υπάρχει $\gamma\in(1,2)$**:** $f(\gamma)=7$**.**

Έστω η $g(x)=\int_1^2 f\left(\frac{t}{x}\right)dt-\int_1^2 f(t)\,dt\ge 0=g(1)$ άρα από Fermat $g'(1)=0$. Θέτω $\frac{t}{x}=\omega$,

$dt=xd\omega$, $g(x)=...=-x\int_1^{\frac{1}{x}} f(\omega)d\omega+x\int_1^{\frac{2}{x}} f(\omega)d\omega-\int_1^2 f(\omega)d\omega$

Τότε $g'(x)=...$

$=-\int_1^{\frac{1}{x}} f(\omega)d\omega+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)+\int_1^{\frac{2}{x}} f\omega)d\omega-\frac{2}{x}f\left(\frac{2}{x}\right)$

$g'(1)=0...$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(\omega)d\omega=2f(2)-f(1)=2\cdot3-(-1)=7$ (1)

Επειδή $f(1)=-1<1<3=f(2)$ από το Θ. Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $\alpha\in(1,2)$ $f(\alpha)=1$.

Στο [1,α] Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\kappa\in(1,\alpha)$: $f'(\kappa)=\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}=\frac{1-(-1)}{\alpha-1}=\frac{2}{\alpha-1}$

Στο [α,2] Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. $\exists\lambda\in(\alpha,2)$:

$f'(\lambda)=\frac{f(2)-f(\alpha)}{2-\alpha}=\frac{3-1}{2-\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$

Τότε $2f'(\kappa)+f'(\lambda)=...=2\frac{3-\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)}$

Παρατηρώ ότι για $\alpha=\frac{3}{2}\in(1,2)$ $2f'(\kappa)+f'(\lambda)=12$.

Έστω η h με $h(x)=\int_1^x f(t)dt-7x$ στο $(0,+\infty)$, $h'(x)=f(x)-7$ $h(1)=-7$

$h(2)=\int_1^2 f(t)dt-14\overset{(1)}{=}7-14=-7$

Άρα $h(1)=h(2)$ τότε στο [1,2] για h το Θ. Rolle $\exists\gamma\in(1,2)$ $h'(\gamma)=0\Leftrightarrow f(\gamma)=7$.

220. **Έστω η παραγωγίσιμη f: $R\to R$ για την οποία ισχύει για κάθε $x\in R$ $f'(x)>x^{2002}-\alpha x^{1001}+1001\beta$ με $\alpha^2<2\beta$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.**

Το $x^{2002}-\alpha x^{1001}+\beta$ τριώνυμο ως προς x^{1001}, $\Delta=\alpha^2-4\beta<0$ γιατί $\alpha^2<2\beta$ άρα β>0 και $\alpha^2<2\beta<4\beta\Rightarrow\alpha^2-4\beta<0\Rightarrow\Delta<0$ άρα $x^{2002}-\alpha x^{1001}+\beta>0\Rightarrow f'(x)>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο IR και δεν έχει ακρότατα.

Έχουμε $f'(x)>x^{2002}-\alpha x^{1001}+\beta$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{x^{2003}}{2003}+\frac{\alpha x^{1002}}{1002}-\beta x\right]'>0$$

Έστω η g με $g(x)=f(x)-\frac{x^{2003}}{2003}+\frac{\alpha x^{1002}}{1002}-\beta x$ ορισμένη στο IR. Είναι $g'(x)>0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο IR.

Έστω $x<0\Rightarrow g(x)<g(0)=f(0)\Rightarrow f(x)-\frac{x^{2003}}{2003}+\frac{\alpha x^{1002}}{1002}-\beta x<f(0)$

$$\Rightarrow f(x)<\frac{x^{2003}}{2003}-\frac{\alpha x^{1002}}{1002}+\beta x+f(0)\ (1)$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^{2003}}{2003}-\frac{\alpha x^{1002}}{1002}+\beta x+f(0)\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2003}\left(\frac{1}{2003}-\frac{\alpha}{1002x^{1001}}+\frac{\beta}{x^{2002}}+\frac{f(0)}{x^{2003}}\right)\right]$$

$=-\infty$

Τότε λόγω της (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

221. **Εστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με f(0)=0, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, f'(x)≥0 για κάθε xε$[0,+\infty)$. Να δείξτε ότι η f είναι σταθερή.**

Στο [0,x] εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.Δ.Λ τότε υπάρχει ρε(0,x) :

$$f'(p)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow f(x)=xf'(p)\ (1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ από (1) θα είναι f’ (ρ)=0,

άρα f’(x)=0 για κάθε xε$(0,+\infty)$, άρα f(x)=c .

Επειδή f(0)=0 , c=0, άρα f(x)= 0.

222. **Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ **και ισχύει**

$$f(x)+\frac{-2-x^2}{x}=\int_0^1\left(\int_1^x \frac{2\omega\cdot f(t)}{x}dt\right)d\omega$$ **να βρεθεί η f.**

Είναι $f(x)+\frac{-2-x^2}{x}=\int_0^1\frac{2\omega}{x}\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)d\omega$ (συνάρτηση του x)

$\Rightarrow f(x)+\frac{-2-x^2}{x}=\frac{1}{x}\cdot\int_1^x f(t)\,dt\cdot\int_0^1 2\omega\,d\omega$ $\left(\int_0^1 2\omega\,d\omega=\left[\omega^2\right]_0^1=1^2-0^2=1\right)$

$\overset{\cdot x}{\Rightarrow} x\cdot f(x)-2-x^2=\int_1^x f(t)\,dt$ (1)

Παραγωγίζω την

$(1)\Rightarrow x f'(x)+f(x)-2x=f(x)$

$\Leftrightarrow x\cdot f'(x)-2x=0\Leftrightarrow x f'(x)=2x$

$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)=2\Rightarrow f(x)=2x+c$

$(1)\Rightarrow f(1)-2-1=0\Leftrightarrow f(1)=3\Leftrightarrow 2+c=3\Leftrightarrow c=1$

Άρα $f(x)=2x+1$.