σειρά σου τώρα...

1. Αν $A\hat{O}B, B\hat{O}\Gamma, \Gamma\hat{O}\Delta$ είναι διαδοχικές γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές και Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}B, \Gamma\hat{O}\Delta$ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι:
$$x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$$

2. Από σημείο O ευθείας x′x φέρνουμε ημιευθεία Oy και τη διχοτόμο Oδ της $x\hat{O}y$

i. αν μια ημιευθεία Oz περιέχεται στην $x'\hat{O}y$, να αποδείξεις ότι: $z\hat{O}\delta = \frac{z\hat{O}x + z\hat{O}y}{2}$

ii. αν μια ημιευθεία Oz περιέχεται στην $y\hat{O}\delta$, να αποδείξεις ότι: $z\hat{O}\delta = \frac{z\hat{O}x - z\hat{O}y}{2}$

3. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $x\hat{O}y$ και τις ημιευθείες OA και OB με $OA \perp Ox$ και $OB \perp Oy$ οι οποίες περιέχονται στην $x\hat{O}y$. Να αποδείξεις ότι οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $A\hat{O}B$ έχουν κοινή διχοτόμο και είναι παραπληρωματικές

4. Να υπολογίσεις την γωνία ω της οποίας η παραπληρωματική γωνία είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής της

5. Τέσσερις ημιευθείες OA, OB, OΓ και OΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B, B\hat{O}\Gamma$ $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$ οι οποίες έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4.
Να υπολογίσεις τις γωνίες αυτές

6. Θεωρούμε δύο αντικείμενες ημιευθείες Ox, Oy και φέρνουμε τις ημιευθείες OA, OB έτσι ώστε οι γωνίες $x\hat{O}A, A\hat{O}B$ και $B\hat{O}y$ να είναι διαδοχικές. Αν OK, OΛ είναι οι διχοτόμοι των $x\hat{O}A, y\hat{O}B$ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι $A\hat{O}B = 90^\circ$ αν και μόνο αν $K\hat{O}\Lambda = 135^\circ$

7. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB, BΓ και ΓA ισοπλεύρου τριγώνου ABΓ θεωρούμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο KΛM είναι ισόπλευρο

8. Αν Α, Ζ είναι σημεία της διχοτόμου AΔ τριγώνου ABΓ, τέτοια ώστε $AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$, να αποδείξεις ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$

9. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών BA και ΓA ισοσκελούς τριγώνου ABΓ θεωρούμε ίσα τμήματα AΔ, AE αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο MΔE είναι ισοσκελές

10. Δίνεται κύκλος κέντρου O και μια χορδή του AB. Προεκτείνουμε την AB εκατέρωθεν κατά ίσα τμήματα AΓ και BΔ. Να αποδείξεις ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$

✍**11.** Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και κατασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος της ε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΕ. Να αποδείξεις ότι ΑΗ = ΓΖ

✍**12.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ΜΔ = ΑΜ. Να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα

✍**13.** Να αποδείξεις ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

✍**14.** Αν ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ είναι διάμετροι κύκλου, να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα

✍**15.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά ΑΕ=ΔΒ.
Να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ΔΑΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή

✍**16.** Να αποδείξεις ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα

✍**17.** Να αποδείξεις ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:
i. από τη βάση
ii. από τις ίσες πλευρές

✍**18.** Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξεις ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα

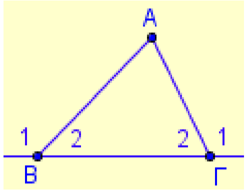
✍**19.** Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξεις ότι:
i. το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου
ii. η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές

✍**20.** Δίνεται ορθογώνιο ($\hat{A} = 90°$) τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρνουμε ΔΕ⊥ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές

✍**21.** Δίνεται κύκλος (Ο, R), δύο ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ, ΟΛ αντιστοίχως. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ, ΔΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξεις ότι:
i. τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα
ii. ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ

✍**22.** Έστω ε, ε΄ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Αν Μ΄ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ΄΄ το συμμετρικό του Μ΄ ως προς ε΄, να αποδείξεις ότι:
i. ΟΜ = ΟΜ΄΄
ii. τα σημεία Μ και Μ΄΄ είναι συμμετρικά ως προς Ο

23. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξεις ότι $\hat{B}_1 > 90^o$



24. Να αποδείξεις ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \dfrac{\gamma}{3}$ και $\beta = \dfrac{3\gamma}{5}$

25. Αν Μ είναι σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξεις ότι: $AM < AB$

26. Σε ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^o$) τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την ΑΒ στο Δ.
Να αποδείξεις ότι: $A\Delta < \Delta B$

27. Να αποδείξεις ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\mu_\alpha \leq, > \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} \geq, < \hat{B} + \hat{\Gamma}$

28. Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, να αποδείξεις ότι: $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$

29. Αν ΑΜ είναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, να αποδείξεις ότι:
i. $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$
ii. $\dfrac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta + \gamma}{2}$
iii. $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

30. Να αποδείξεις ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν ομοίως άνισες χορδές και αντιστρόφως

31. Έστω Δ, Ε σημεία των καθέτων πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
Να αποδείξεις ότι: i. $\Delta E < EB$ και ii. $\Delta E < B\Gamma$

32. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξεις ότι όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό κύκλο είναι ίσες

33. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μία διάμετρος του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα Α και Β. Αν μία τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα σημεία Γ και Δ, να αποδείξεις ότι: $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^o$

34. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξεις ότι: $M\hat{A}P = M\hat{B}P$

35. Να προσδιορίσεις τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) όταν:
i. ΚΛ = ρ/2 ii. ΚΛ = ρ iii. ΚΛ = 2ρ iv. ΚΛ = 3ρ v. ΚΛ = 4ρ

36. Ένας κύκλος κέντρου Κ είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ.
Μία κοινή εξωτερική και μία κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξεις ότι: $K\hat{P}\Lambda = 90°$

37. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξεις ότι: ΟΑ = ΟΒ

38. Έστω ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της πλευράς ΑΒ.
Αν ο κύκλος (Δ, ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξεις ότι: ΔΕ // ΑΓ

39. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντιστοίχως τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξεις ότι: ΔΕ // ΒΓ

40. Έστω ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ.
Να αποδείξεις ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$

41. Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξεις ότι: ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ

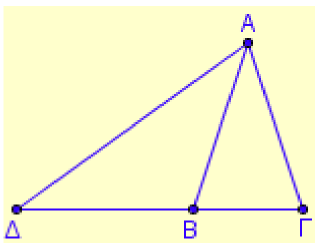
42. Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι: ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ

43. Από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Γ του ΑΒ και στις Αx, Βy τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξεις ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή

44. Σε ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να υπολογίσεις τη γωνία $B\hat{I}\Gamma$

45. Να αποδείξεις ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow AB = A\Gamma$

46. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ = ΒΔ και ΔΑ = ΔΓ.
Να υπολογίσεις τις γωνίες όλων των τριγώνων που βλέπεις



47. Στην κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε $A\Delta \perp AB$ με ΑΔ = ΑΒ και $AE \perp A\Gamma$ με ΑΕ = ΑΓ.
Να αποδείξεις ότι i. ΔΓ = ΒΕ και ii. $\Delta\Gamma \perp BE$

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ύψος του ΑΔ. Αν η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}\Gamma$ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε, να αποδείξεις ότι: $EB = AB$

49. Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$
Να αποδείξεις ότι: $\hat{A} = 2E\hat{\Delta}\Gamma$

50. Αν ΑΔ, ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος αντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$,
να αποδείξεις ότι: $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

51. Αν ΑΔ είναι διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, να αποδείξεις ότι:
i. $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$
ii. $A\hat{\Delta}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

52. Πόσες πλευρές έχει ένα κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 900°;

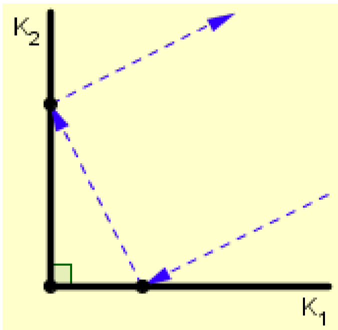
53. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε
Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές

54. Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς ($AB = A\Gamma$) τριγώνου ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΑ πάρουμε τμήμα $AE = A\Delta$, να αποδείξεις ότι: $\Delta E \perp B\Gamma$

55. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και οι διχοτόμοι του ΒΚ και ΓΛ. Αν η διχοτόμος της $B\hat{K}\Gamma$ τέμνει τη ΓΛ στο Δ και τη ΒΓ στο Η, να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΓΔΗ είναι ισοσκελές

56. Στην προέκταση της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και προς το μέρος του Β παίρνουμε τμήμα $BE = AB$. Στο Γ φέρουμε ευθεία κάθετη στη ΒΓ και πάνω σε αυτή και στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$.
Να αποδείξεις ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά

57. Να αποδείξεις ότι μία ακτίνα φωτός μετά την διπλή ανάκλασή της σε σύστημα δύο καθέτων επιπέδων κατόπτρων K_1, K_2 όπως στο διπλανό σχήμα, ακολουθεί πορεία παράλληλη με την αρχική



58. Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ είναι σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντιστοίχως, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξεις ότι το ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο

✍59. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξεις ότι οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν

✍60. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξεις ότι: $ΑΕ = ΒΖ$

✍61. Από τυχαίο σημείο Μ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ίσες πλευρές που τις τέμνουν στα σημεία Δ και Ε. Να αποδείξεις ότι: $ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ$

✍62. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντιστοίχως, ώστε $ΔΗ = ΒΔ$ και $ΖΕ = ΓΕ$. Να αποδείξεις ότι:
i. $ΑΗ = ΑΖ$
ii. τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά

✍63. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΔΓ και ΔΑ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήματα $ΓΕ = ΔΓ$ και $ΑΖ = ΔΑ$ αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά

✍64. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήματα $ΒΕ = ΒΓ$ και $ΔΖ = ΔΓ$ αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά

✍65. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και στην ημιευθεία ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξεις ότι $Ζ\hat{Γ}Ε = 90°$

✍66. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΒΔ = 2ΑΓ$ και Ο το κέντρο του. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο

✍67. Να αποδείξεις ότι οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου, αν δεν συντρέχουν, σχηματίζουν ορθογώνιο

✍68. Να αποδείξεις ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες

✍69. Σε ρόμβο ΑΒΓΔ κέντρου Ο παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε $ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ$. Να αποδείξεις ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο

✍70. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ θεωρούμε αντιστοίχως τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν ώστε $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$. Να αποδείξεις ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο

✍71. Έστω Μ το μέσο της διχοτόμου ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξεις ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος

✍**72.** Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξεις ότι: i. $AZ = \Delta E$ και ii. $AZ \perp \Delta E$

✍**73.** Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντιστοίχως ορθογωνίου ΑΒΓΔ, Η το σημείο τομής των ΑΖ, ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ, ΓΕ, να αποδείξεις ότι το τετράπλευρο ΕΘΖΗ είναι ρόμβος

✍**74.** Να αποδείξεις ότι:

i. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό
(δηλαδή το ίδιο ανεξαρτήτως της επιλογής του σημείου)

ii. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό
(δηλαδή το ίδιο ανεξαρτήτως της επιλογής του σημείου)

✍**75.** Αν Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξεις ότι: $\Gamma H = \dfrac{A\Gamma}{4}$

✍**76.** Αν Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξεις ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ

✍**77.** Αν Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξεις ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ

✍**78.** Αν Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ και η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να αποδείξεις ότι: $AE = \dfrac{E\Gamma}{2}$

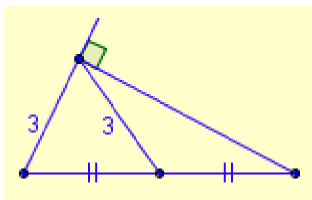
✍**79.** Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $BE = AB$. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξεις ότι: i. $BZ = Z\Gamma$ και ii. $\Gamma H = \dfrac{AH}{2}$

✍**80.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στην ΑΔ, να αποδείξεις ότι:

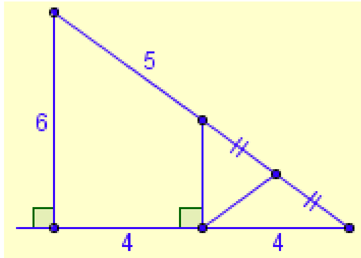
i. $EM \parallel A\Gamma$ ii. $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$ iii. $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$

✍**81.** Να αποδείξεις ότι κάθε τρίγωνο που έχει δύο ίσες διαμέσους είναι ισοσκελές

✍**82.** Να υπολογίσεις όλες τις γωνίες των τριγώνων του διπλανού σχήματος



83. Να υπολογίσεις τα μήκη όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που βλέπεις στο διπλανό σχήμα



84. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{Α}=90°$) κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε κάθετο στη ΒΓ η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Η και την ΑΔ στο Ε.
Να αποδείξεις ότι: $ΓΕ \perp ΔΒ$

85. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90°$) με $\hat{Β}=30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ αντιστοίχως, προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ=ΕΔ. Να αποδείξεις ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος

86. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90°$) με ύψος ΑΔ.
i. αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι: $Ε\hat{Δ}Ζ = \hat{Α}$
ii. αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξεις ότι: $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{4}$

87. Αν ΑΔ είναι ύψος τριγώνου ΑΒΓ, Ε είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΕ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξεις ότι: $Α\hat{Ζ}Ε = \hat{Β} - \hat{Γ}$

88. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90°$) με $\hat{Β}=30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξεις ότι:
i. $ΜΔ = ΑΔ$ και ii. $ΜΔ = \frac{ΑΒ}{3}$

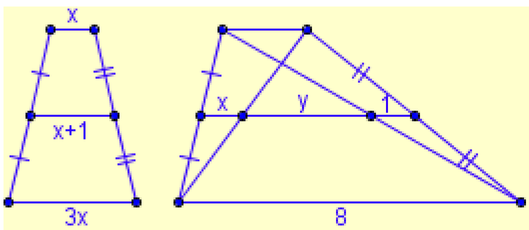
89. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 45°$, Μ το μέσο της ΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη του τριγώνου.
Να αποδείξεις ότι: $ΔΜ \perp ΜΕ$

90. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε της ΒΓ τέτοιο ώστε $ΒΕ = \frac{ΒΓ}{4}$

Αν Μ είναι το μέσο της διαμέσου ΒΔ, να αποδείξεις ότι: $ΕΜ // ΑΒ$ και $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{4}$

91. Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{Β}$ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι:
i. το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο
ii. η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ

92. Να υπολογίσεις τα μήκη x και y στα διπλανά σχήματα



93. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο

94. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΗ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο

95. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο

96. Αν ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ, να αποδείξεις ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο ή ορθογώνιο

97. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε η οποία δεν τέμνει το τρίγωνο. Αν ΒΒ′, ΓΓ′ είναι οι αποστάσεις των Β, Γ από την ε, Μ το μέσο της Β′Γ′ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ, να αποδείξεις ότι: $\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$

98. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη διάμεσο ΕΖ στο Η. Να αποδείξεις ότι: $\text{Β}\hat{\text{Η}}\text{Γ} = 90^\circ$

99. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς (ΑΒ = ΑΓ) τριγώνου ΑΒΓ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Ζ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξεις ότι: ΓΗ = ΑΖ

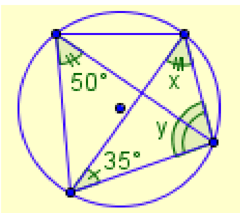
100. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ του οποίου η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξεις ότι: $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Δ} = 90^\circ$

101. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξεις ότι οι διαγώνιοι τριχοτομούν τη διάμεσο

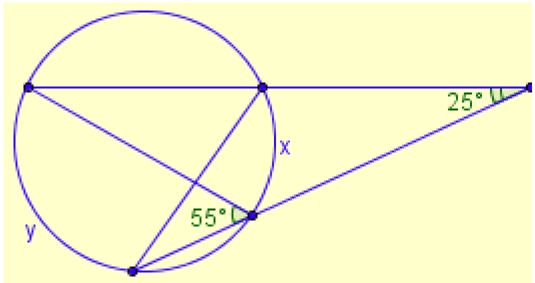
102. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο;

103. Αν Α′,Β′,Γ′,Δ′ και Κ′ είναι αντιστοίχως οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σε μία ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξεις ότι: ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ + ΔΔ′ = 4ΚΚ′

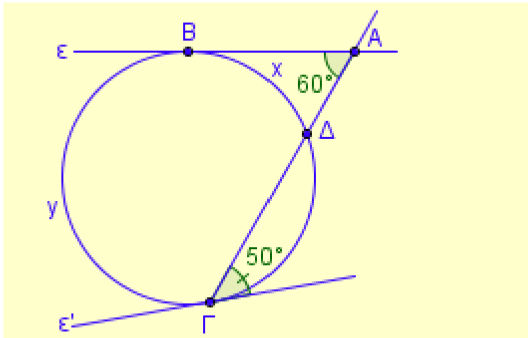
104. Να υπολογίσεις τις γωνίες x και y που βλέπεις στο διπλανό σχήμα



105. Να υπολογίσεις τα μέτρα των τόξων x και y που βλέπεις στο διπλανό σχήμα



106. Να υπολογίσεις τα μέτρα των τόξων x και y που βλέπεις στο διπλανό σχήμα, όπου οι ε και ε′ εφάπτονται στον κύκλο



107. Αν A, B, Γ είναι τρία σημεία σε κύκλο, M είναι το μέσο του τόξου ΒΓ και ΜΔ είναι χορδή του κύκλου παράλληλη στην ΑΓ, να αποδείξεις ότι AB = ΔΜ

108. Να αποδείξεις ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου στο μέσο ενός τόξου χορδής AB είναι παράλληλη στην AB

109. Έστω A, B τα σημεία τομής δύο κύκλων. Αν Γ, Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να αποδείξεις ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το B

110. Δύο κάθετες χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξεις ότι η διάμεσος PM του τριγώνου PBΓ είναι κάθετη στην ΑΔ

111. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά (να εξετάσεις δύο περιπτώσεις) σε ένα σημείο A και δύο ευθείες ε και ε′ που διέρχονται από το A τέμνουν τον έναν κύκλο στα σημεία B και B′ και τον άλλον στα σημεία Γ και Γ′ αντιστοίχως.
Να αποδείξεις ότι: BB′ // ΓΓ′

112. Έστω ε η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A. Από ένα σημείο P της ε φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}Γ$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο σημείο Δ, να αποδείξεις ότι: PΔ = PA

113. Να αποδείξεις ότι κάθε περιγράψιμο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου

114. Από τα σημεία τομής A, B δύο κύκλων φέρουμε δύο ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Γ, Γ′ και τον άλλο στα σημεία Δ, Δ′. Να αποδείξεις ότι ΓΓ′ // ΔΔ′

115. Ένας κύκλος διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου στο σημείο Α

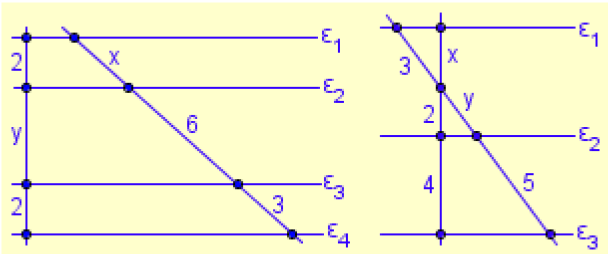
116. Να αποδείξεις ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ

117. Να αποδείξεις ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο καθέτων χορδών ενός κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο

118. Αν τα σημεία Μ και Ν είναι συζυγή αρμονικά των σημείων Α και Β, να αποδείξεις ότι:

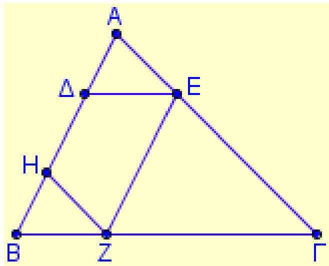
$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB}$$

119. Να βρεις τα μήκη x, y στα ακόλουθα σχήματα (όπου $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$):



120. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ, ΕΖ // ΑΒ και ΖΗ // ΓΑ. Να αποδείξεις ότι:

i. $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{HB}{HA}$ και ii. ΔΑ = ΗΒ



121. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, τη ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Να αποδείξεις ότι:

i. $\frac{AZ}{AH}=\frac{AB}{\Delta H}$ και ii. $AE^2 = EZ \cdot EH$

122. Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξεις ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ

123. Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι: ΜΔ = ΜΕ

✍**124.** Έστω ΒΔ, ΓΕ οι διάμεσοι ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Μία ευθεία παράλληλη στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΒΔ, ΓΕ και ΑΓ στα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι αντιστοίχως.
Να αποδείξεις ότι: ΖΗ = ΘΙ

✍**125.** Έστω σημεία Δ, Ε της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ τέτοια ώστε: ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ.
Από τα Δ, Ε φέρουμε παράλληλες προς τη ΒΓ που τέμνουν την ΑΓ στα σημεία Ζ, Η αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι: ΒΓ = ΕΗ + ΔΖ

✍**126.** Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Δ, Ε σημεία της ΒΓ τέτοια ώστε ΔΜ = ΜΕ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ζ και από το Ε παράλληλη προς την ΑΒ η ποία τέμνει την ΑΓ στο Η.
Να αποδείξεις ότι: ΖΗ // ΒΓ

✍**127.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ, Η είναι οι προβολές του σημείου Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι: ΖΗ // ΒΓ

✍**128.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.
Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ. Να αποδείξεις ότι:
i. το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του ΑΒΓ.
ii. ΚΕ // ΑΓ

✍**129.** Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ).
Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΒΓ που τέμνουν τη ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως. Να αποδείξεις ότι: ΔΕ = ΓΖ

✍**130.** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{M}B$ και $A\hat{M}\Gamma$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι: ΔΕ // ΒΓ

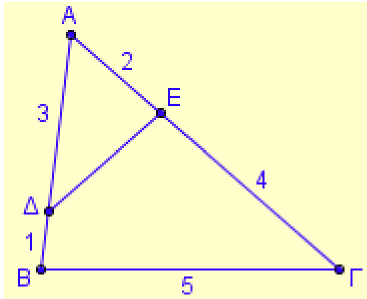
✍**131.** Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξεις ότι: $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\frac{E\Gamma}{EA}\frac{ZA}{ZB}=1$

✍**132.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ο περιγεγραμμένος του κύκλος.
Αν Δ είναι τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξεις ότι: ΕΒ•ΔΓ = ΕΓ•ΔΒ

✍**132.** Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα Α και Β και μία τρίτη εφαπτόμενη σε τυχαίο σημείο Ε του ημικυκλίου η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξεις ότι τα σημεία Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε και Ζ

133. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του ΑΔ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως.
Να αποδείξεις ότι: ΒΕ = ΓΖ

134. Να βρεις το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ που βλέπεις στο διπλανό σχήμα



135. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) φέρνουμε κάθετη στο σημείο Ε της ΒΓ. Να αποδείξεις ότι: i. τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια
ii. ΑΓ•ΕΔ = ΑΒ•ΕΓ

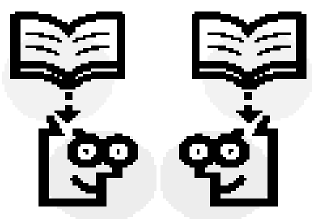
136. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντιστοίχως, ώστε:
$ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$. Να αποδείξεις ότι: i. τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια
ii. ΒΓ = 3ΔΕ

137. Δίνεται γωνία $x\hat{A}y = 120^\circ$ και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ στο εσωτερικό της.
Αν οι Αx και Αy τέμνουν τις προεκτάσεις της ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως, να αποδείξεις ότι: $ΒΓ^2 = ΒΔ \bullet ΓΕ$

138. Να αποδείξεις ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) με ύψος ΑΔ, ισχύουν:
i. $ΑΔ^2 = ΔΒ \bullet ΔΓ$
ii. $ΑΒ^2 = ΒΔ \bullet ΒΓ$
iii. ΑΒ•ΑΓ = ΑΔ•ΒΓ

139. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξεις ότι: ΗΑ•ΗΔ = ΗΒ•ΗΕ = ΗΓ•ΗΖ

140. Αν Ε είναι το σημείο τομής της διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ με τον περιγεγραμμένο του κύκλο, να αποδείξεις ότι: i. ΑΒ•ΑΓ = ΑΔ•ΑΕ
ii. $ΕΒ^2 = ΕΑ \bullet ΕΔ$



καλή επιτυχία στις εξετάσεις και όχι μόνο...