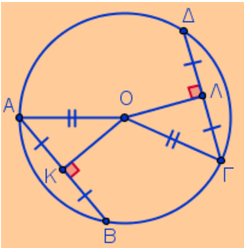
αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες τότε και τα αποστήματά τους είναι ίσα και αντιστρόφως
αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές είναι ίσες

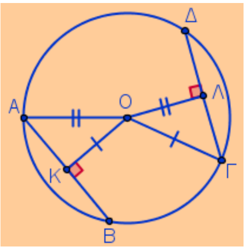


$OA = O\Gamma$
(ακτίνες του κύκλου)
$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 1∟$
(τα αποστήματα είναι κάθετα στις χορδές)
$AK = AB/2 = \Gamma\Delta/2 = \Gamma\Lambda$
(τα αποστήματα διχοτομούν τις χορδές τους οι οποίες εδώ είναι ίσες)

κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

$\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΟΚΑ και ΟΛΓ είναι ίσα
άρα: $OK = O\Lambda$

$\Leftarrow$

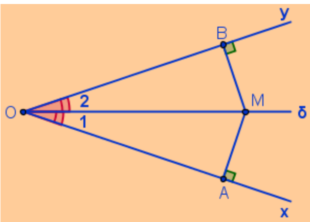


$OA = O\Gamma$
(ακτίνες του κύκλου)
$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 1∟$
(τα αποστήματα είναι κάθετα στις χορδές)
$OK = O\Lambda$
(υπόθεση)

κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

$\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΟΚΑ και ΟΛΓ είναι ίσα
άρα: $AK = \Gamma\Lambda$
συνεπώς: $AB = \Gamma\Delta$
(αφού τα αποστήματα διχοτομούν τις χορδές)

αν ένα σημείο ανήκει στη διχοτόμο μίας γωνίας τότε ισαπέχει από τις πλευρές της και αντιστρόφως
αν ένα σημείο μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της τότε ανήκει στη διχοτόμο της

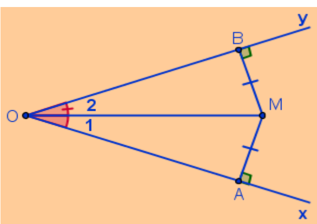


$\hat{A} = \hat{B} = 1∟$
(αφού οι ΜΑ, ΜΒ είναι αποστάσεις)
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
(υπόθεση)
$OM = OM$

κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

$\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα
άρα: $MA = MB$

$\Leftarrow$



$\hat{A} = \hat{B} = 1∟$
(αφού οι ΜΑ, ΜΒ είναι αποστάσεις)
$MA = MB$
(υπόθεση)
$OM = OM$

κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

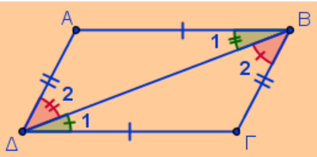
$\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα
άρα: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

δηλ. το Μ είναι σημείο της διχοτόμου της $x\hat{O}y$

αν σε ένα τετράπλευρο ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i. οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες
ii. δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες
iii. οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες
iv. οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο

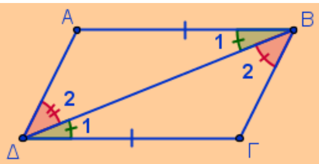


i. $AB = \Delta\Gamma$ (υπόθεση), $B\Gamma = A\Delta$ (υπόθεση), $\Delta B = \Delta B$ $\Big\}$ Π-Π-Π $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα

άρα: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$

συνεπώς: $AB \parallel \Delta\Gamma$ (τεμνόμενες απ' τη ΒΔ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες) και (ομοίως): $B\Gamma \parallel A\Delta$

άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες)

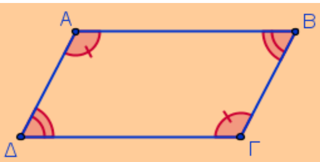


ii. $AB = \Delta\Gamma$ (υπόθεση), $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από τη ΒΔ), $\Delta B = \Delta B$ $\Big\}$ Π-Γ-Π $\Rightarrow$

τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα άρα: $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$

συνεπώς: $B\Gamma \parallel A\Delta$ (τεμνόμενες απ' τη ΒΔ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες)

άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο(αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες)

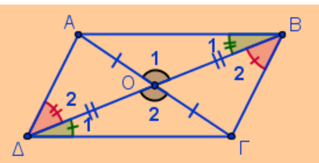


iii. αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$ είναι $2\hat{A} + 2\hat{B} = 360^\circ$ και $2\hat{A} + 2\hat{\Delta} = 360^\circ$

δηλ. $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ και $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$

συνεπώς: $A\Delta \parallel B\Gamma$(τεμνόμενες απ' την ΑΒ σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές)

και (ομοίως): $AB \parallel \Delta\Gamma$, άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο(αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες)



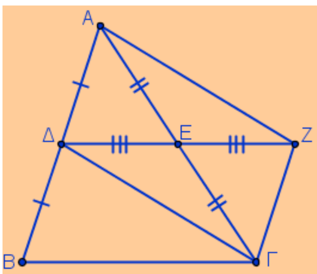
iv. $AO = O\Gamma$ (υπόθεση), $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν), $BO = O\Delta$ (υπόθεση) $\Big\}$ Π-Γ-Π $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα

άρα: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$

συνεπώς: $AB \parallel \Delta\Gamma$ (τεμνόμενες απ' τη ΒΔ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες) και (ομοίως): $B\Gamma \parallel A\Delta$

άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες)

το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της



προεκτείνουμε το ΔΕ κατά $EZ = \Delta E$ οπότε:

το ΑΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται)

άρα: $\Gamma Z \parallel = \Delta A$

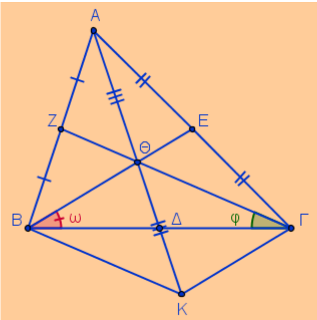
συνεπώς είναι και $\Gamma Z \parallel = B\Delta$

που σημαίνει ότι το ΒΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

(αφού έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες)

άρα: $\Delta Z \parallel = B\Gamma$ δηλ. $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $2\Delta E = B\Gamma$ δηλ. $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = B\Gamma/2$

οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (βαρύκεντρο) του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου



$\hat{\omega} + \hat{\varphi} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\llcorner$ συνεπώς οι διάμεσοι ΒΕ, ΓΖ τέμνονται σε ένα σημείο Θ στο εσωτερικό του τριγώνου

έστω Δ η τομή της ΑΘ με τη ΒΓ και στην προέκταση της ΑΘ τμήμα ΘΚ = ΑΘ

στο τρίγωνο ΚΑΒ το ΘΖ ενώνει μέσα πλευρών άρα ΘΖ // = ΚΒ/2

στο τρίγωνο ΚΑΓ το ΘΕ ενώνει μέσα πλευρών άρα ΘΕ // = ΚΓ/2

αφού ΘΓ // ΒΚ και ΘΒ // = ΓΚ το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο, συνεπώς ΚΒ = ΓΘ και ΚΓ = ΒΘ

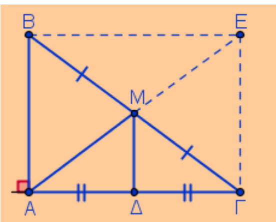
και βέβαια οι διαγώνιοί του διχοτομούνται συνεπώς το Δ είναι μέσο του ΒΓ άρα και η διάμεσος ΑΔ του τριγώνου διέρχεται από το Θ

$$A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = A\Delta - \frac{\Theta K}{2} = A\Delta - \frac{A\Theta}{2} \text{ άρα } \frac{3}{2}A\Theta = A\Delta \text{ δηλ. } A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta$$

$$B\Theta = BE - \Theta E = BE - \frac{K\Gamma}{2} = BE - \frac{B\Theta}{2} \text{ άρα } \frac{3}{2}B\Theta = BE \text{ δηλ. } B\Theta = \frac{2}{3}BE \text{ και ομοίως: } \Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$$

η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως

αν μία διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή



φέρνουμε τη διάμεσο ΜΔ του ΑΜΓ η οποία ενώνει μέσα πλευρών του ΑΒΓ

οπότε είναι ΜΔ // ΑΒ κι επειδή ΑΒ ⊥ ΑΓ είναι και ΜΔ ⊥ ΑΓ

αφού η διάμεσός του ΜΔ είναι και ύψος το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές

συνεπώς ΑΜ = ΜΓ = ΒΓ/2

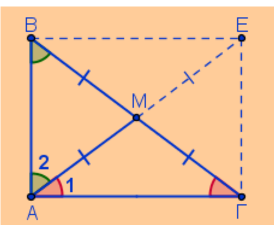
<u>αλλιώς:</u>

προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ΜΕ = ΑΜ

οι διαγώνιες του ΑΒΕΓ διχοτομούνται συνεπώς αυτό είναι παραλληλόγραμμο

και μάλιστα ορθογώνιο αφού $\hat{A} = 1\llcorner$ άρα $AM = \frac{AE}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$

⇐



τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ισοσκελή οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_2 = \hat{B}$

$\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$

<u>αλλιώς:</u>

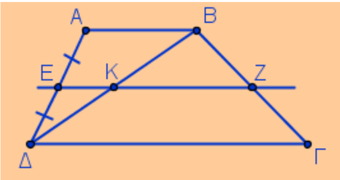
προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ΜΕ = ΑΜ

οι διαγώνιες του ΑΒΕΓ διχοτομούνται και είναι ίσες

συνεπώς αυτό είναι ορθογώνιο

άρα $\hat{A} = 1\llcorner$

η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους



από το μέσο Ε της ΑΔ φέρνουμε παράλληλη στη ΔΓ(// ΑΒ) οπότε:
στο τρίγωνο ΑΔΒ αφού ΕΚ // ΑΒ και Ε είναι μέσο της ΑΔ

το Κ είναι μέσο της ΔΒ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$

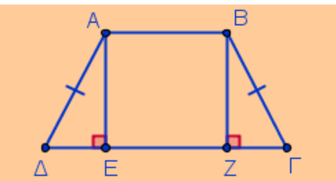
στο τρίγωνο ΒΔΓ αφού ΚΖ // ΔΓ και Κ είναι μέσο της ΒΔ

το Ζ είναι μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΔΓ}{2}$

άρα η διάμεσος ΕΖ είναι παράλληλη προς τις βάσεις ΑΒ, ΔΓ

και $ΕΖ = ΕΚ + ΚΖ = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$

αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες



φέρνουμε τα ύψη ΑΕ, ΒΖ οπότε:

$\left.\begin{array}{l} \hat{Ε} = \hat{Ζ} = 1∟ \text{ (ΑΕ, ΒΖ είναι ύψη)} \\ ΑΔ = ΒΓ \text{ (υπόθεση)} \\ ΑΕ = ΒΖ \text{ (αποστάσεις των παραλλήλων ΑΒ,ΔΓ)} \end{array}\right\}$ κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα

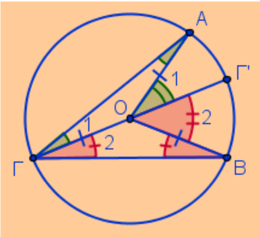
άρα: $\hat{Δ} = \hat{Γ}$

οι $\hat{Α}, \hat{Δ}$ και $\hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από τις ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως, συνεπώς:

$\hat{Α} + \hat{Δ} = \hat{Β} + \hat{Γ}$ (=180°) κι επειδή $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ είναι και $\hat{Α} = \hat{Β}$

κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε κύκλο ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο

<u>αν το κέντρο Ο του κύκλου είναι εσωτερικό σημείο της εγγεγραμμένης:</u>



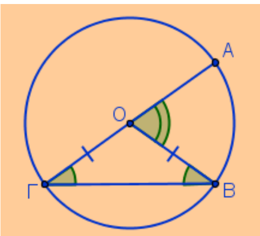
φέρνουμε τη διάμετρο ΓΓ'

οι $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ είναι εξωτερικές των ισοσκελών τριγώνων ΑΟΓ και ΒΟΓ αντιστοίχως

συνεπώς είναι: $\hat{O}_1 = 2\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{O}_2 = 2\hat{\Gamma}_2$

$$A\hat{O}B = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2) = 2A\hat{\Gamma}B \text{ δηλ. } A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$$

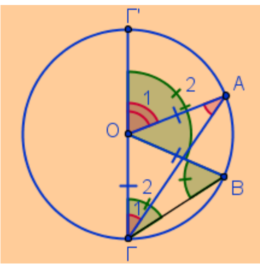
<u>αν το κέντρο Ο του κύκλου είναι σημείο μίας πλευράς της εγγεγραμμένης:</u>



η $\hat{O}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΒΟΓ

συνεπώς είναι: $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$ δηλ. $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$

<u>αν το κέντρο Ο του κύκλου είναι εξωτερικό σημείο της εγγεγραμμένης:</u>



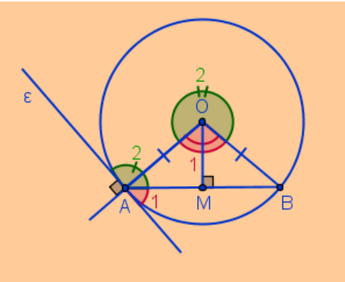
φέρνουμε τη διάμετρο ΓΓ'

οι $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ είναι εξωτερικές των ισοσκελών τριγώνων ΑΟΓ και ΒΟΓ αντιστοίχως

συνεπώς είναι: $\hat{O}_1 = 2\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{O}_2 = 2\hat{\Gamma}_2$

$$A\hat{O}B = \hat{O}_2 - \hat{O}_1 = 2(\hat{\Gamma}_2 - \hat{\Gamma}_1) = 2A\hat{\Gamma}B \text{ δηλ. } A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$$

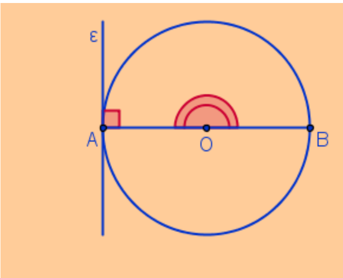
οι γωνίες που σχηματίζονται από μία χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου σε ένα άκρο της ισούνται με τα μισά των επικέντρων που βαίνουν στα τόξα της χορδής



φέρνουμε το ύψος (που είναι βέβαια και διχοτόμος) του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΒ

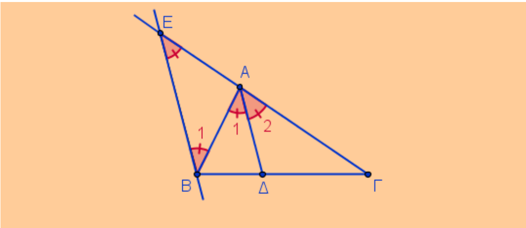
οπότε: $\hat{A}_1 = A\hat{O}M$ (οξείες με πλευρές κάθετες) $= \dfrac{\hat{O}_1}{2}$

$$\hat{A}_2 = 180^o - \hat{A}_1 = 180^o - \frac{\hat{O}_1}{2} = \frac{360^o - \hat{O}_1}{2} = \frac{\hat{O}_2}{2}$$



αν η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε και πάλι: $\hat{A} = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$

αφού η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή ενώ η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ευθεία η διχοτόμος μίας γωνίας τριγώνου διαιρεί εσωτερικά την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών



από το B φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο AΔ η οποία τέμνει την προέκταση της ΓA στο E

στο τρίγωνο BΓE είναι AΔ // EB, συνεπώς:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (1) \quad \text{(θ. Θαλή)}$$

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων AΔ, EB που τέμνονται από την AB)

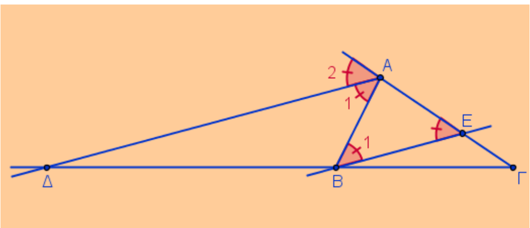
$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων AΔ, EB που τέμνονται από την EΓ)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (υπόθεση)

$\Rightarrow \hat{E} = \hat{B}_1$

συνεπώς το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές οπότε AE = AB και η (1) γίνεται: $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

η διχοτόμος μίας εξωτερικής γωνίας τριγώνου διαιρεί εξωτερικά την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών



από το B φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο AΔ η οποία τέμνει τη ΓA στο E

στο τρίγωνο ΓAΔ είναι BE // ΔA, συνεπώς:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (1) \quad \text{(θ. Θαλή)}$$

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων AΔ, EB που τέμνονται από την AB)

$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων AΔ, EB που τέμνονται από την AΓ)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (υπόθεση)

$\Rightarrow \hat{E} = \hat{B}_1$

συνεπώς το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές οπότε AE = AB και η (1) γίνεται: $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

εκτός ύλης...

Albrecht Dürer (1471-1528) Melencholia I (1514)