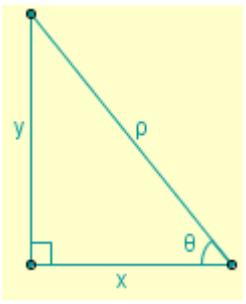
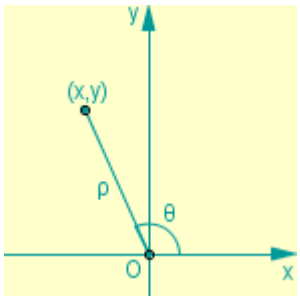
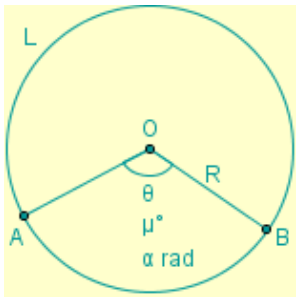
βασικά...



- $\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho}$
- $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$
- $\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y}$

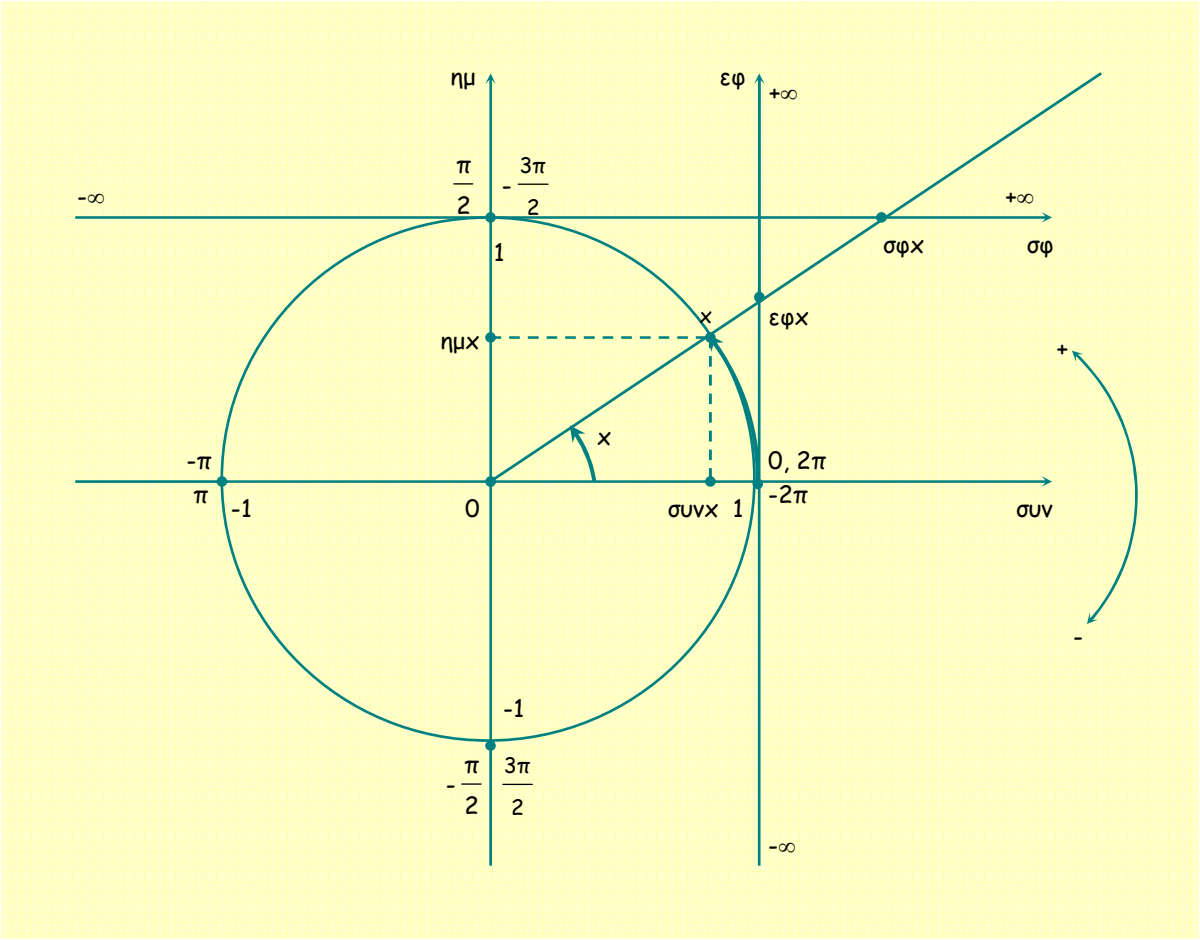


- $L = 2\pi R$
- $l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R\mu}{180}$
- $l_{\overset{\frown}{AB}} = \alpha R$
- $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$



- $-1 \le \eta\mu\theta \le 1$
- $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$
- $\varepsilon\varphi\theta \in (-\infty, +\infty)$
- $\sigma\varphi\theta \in (-\infty, +\infty)$
- $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$
- $\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$
- $\varepsilon\varphi\theta\sigma\varphi\theta = 1$
- $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$
- $\eta\mu^2\theta = \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}$

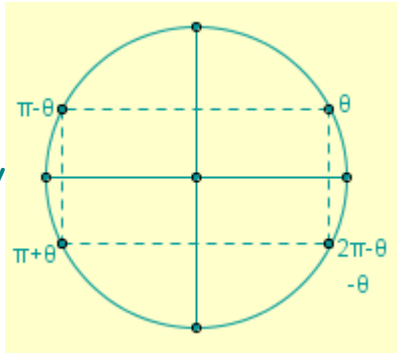
διαβάζω τον κύκλο ↔ ξέρω τριγωνομετρία...



στο πρώτο τεταρτημόριο...

τόξο σε rad / ° / συνάρτηση	0 / 0°	$\frac{\pi}{6}$ / 30°	$\frac{\pi}{4}$ / 45°	$\frac{\pi}{3}$ / 60°	$\frac{\pi}{2}$ / 90°
ημ	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	_
σφ	_	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **αντίθετα** τόξα $(\theta, -\theta)$ έχουν το **ίδιο συν**
- **παραπληρωματικά** τόξα $(\theta, \pi-\theta)$ έχουν το **ίδιο ημ**
- τόξα που **διαφέρουν κατά π** $(\theta, \pi+\theta)$ έχουν **αντίθετο ημ** και **συν**
- τόξα που **διαφέρουν κατά 2κπ** $(\theta, 2\kappa\pi+\theta)$ τα έχουν **όλα ίδια**
- **συμπληρωματικά** τόξα $(\theta, \frac{\pi}{2}-\theta)$ έχουν: **ημ↔συν** και **εφ↔σφ**



κι εξισώσεις...

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$ *ειδικά:* $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$ *ειδικά:* $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$ $(\kappa \in Z)$

και περιοδικότητα...

- η **f(x) = ρημωx** $(\rho, \omega > 0)$ έχει **περίοδο**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **max**: ρ και **min**: - ρ (ομοίως η f(x)=ρσυνωx)
- η **f(x) = ρεφωx** $(\omega > 0)$ έχει **περίοδο**: $T = \frac{\pi}{\omega}$ (ομοίως η f(x)=ρσφωx)

και τύποι πολλοί...

- $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1)
- $\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2)
- $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ (3)
- $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ (4)
- $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
- $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

(τύποι αθροισμάτων)

- $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$

(τύποι διπλασίων)

- $\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$
- $\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

(τύποι αποτετραγωνισμού)

- $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$
- $\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$
- $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

(τύποι καθολικής αντικατάστασης)

$(1)+(2)\Rightarrow$ $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$ (5)

$(4)-(3)\Rightarrow$ $2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$ (6)

$(3)+(4)\Rightarrow$ $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ (7)

(τύποι μετασχηματισμού γινομένων)

$(5)\Rightarrow$ $\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$ (8)

$(8)\Rightarrow$ $\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\dfrac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}$

$(7)\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$

$(6)\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\eta\mu\dfrac{A-B}{2}$

(τύποι μετασχηματισμού αθροισμάτων)

- **$f(x)=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\eta\mu(x+\varphi)$** $(\alpha\beta\neq0)$

(όπου : $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και φ τόξο με $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\rho}$ και $\eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\rho}$)

- $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$ (όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου)

(ν. ημιτόνων)

- **σε τρίγωνο ΑΒΓ:**

- $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ (και κυκλικά)

(ν. συνημιτόνων)

στην πράξη τώρα...

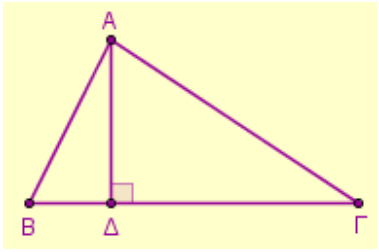
1► Το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας 6 είναι 2π.
Πόσων μοιρών είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία;

▼ αν α είναι το μέτρο της ζητούμενης γωνίας σε rad τότε: $2\pi = 6\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60^\circ$

2► Πόσων μοιρών είναι μία γωνία ενός rad;

▼ $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{180}{\pi} \approx 57,3^\circ$

3► Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ ισούται με το μισό της ΒΓ.
Να αποδείξεις ότι: i. $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = 2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$
ii. $\sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma = 2$



▼ i. $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{A\Delta}{B\Delta} + \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta(B\Delta + \Delta\Gamma)}{B\Delta \cdot \Delta\Gamma} = \frac{A\Delta \cdot 2A\Delta}{B\Delta \cdot \Delta\Gamma} = 2\frac{A\Delta}{B\Delta}\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$
$= 2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$

ii. $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = 2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} + \frac{\varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi B = 2$

4► Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, βρες τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

▼ $\varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ οπότε: $\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{5}{9}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = \frac{4}{9}$

κι αφού στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu x > 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ είναι: $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}$

5► Να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $f(x) = 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$, $x \in R$ είναι σταθερή

▼ $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x$
$= 1 - 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x$
$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = (\eta\mu^2 x)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2 x)^3$
$= (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$
$= 1 - 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x$
συνεπώς $\forall x \in R$: $f(x) = 2(1 - 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x) - 3(1 - 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x) = -1$, άρα η f είναι σταθερή

6► Να αποδείξεις ότι: i. $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$ και ii. $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

▼ i. $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\varepsilon\varphi\beta+\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\frac{\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\frac{\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha+1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{(\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1)\varepsilon\varphi\alpha}{(\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha+1)\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$

αλλιώς:

$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta)\varepsilon\varphi\beta=(\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha)\varepsilon\varphi\alpha$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1=\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha+1$, που ισχύει

ii. $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha=(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$, που ισχύει

αλλιώς:

$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\alpha}{(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\alpha}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

7► Βρες τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: i. 1200° ii. −1200° και iii. $\frac{21\pi}{4}$

▼ i. $1200=3\cdot360+120$

$\eta\mu1200=\eta\mu(3\cdot360+120)=\eta\mu120=\eta\mu(180-60)=\eta\mu60=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu1200=\sigma\upsilon\nu(180-60)=-\sigma\upsilon\nu60=-\frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi1200=\varepsilon\varphi(180-60)=-\varepsilon\varphi60=-\sqrt{3}$

$\sigma\varphi1200=\sigma\varphi(180-60)=-\sigma\varphi60=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii. $\eta\mu(-1200)=-\eta\mu1200=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sigma\upsilon\nu(-1200)=\sigma\upsilon\nu1200=-\frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi(-1200)=-\varepsilon\varphi1200=\sqrt{3}$ $\sigma\varphi(-1200)=-\sigma\varphi1200=\frac{\sqrt{3}}{3}$

iii. $\frac{21\pi}{4}=\frac{(4\cdot5+1)\pi}{4}=5\pi+\frac{\pi}{4}=2\cdot2\pi+\pi+\frac{\pi}{4}$

$\eta\mu\frac{21\pi}{4}=\eta\mu(2\cdot2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\eta\mu(\pi+\frac{\pi}{4})=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu(2\cdot2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\sigma\upsilon\nu(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varepsilon\varphi\frac{21\pi}{4}=\varepsilon\varphi(2\cdot2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\varepsilon\varphi(\pi+\frac{\pi}{4})=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$

$\sigma\varphi\frac{21\pi}{4}=\sigma\varphi(2\cdot2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\sigma\varphi(\pi+\frac{\pi}{4})=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1$

8► Αν $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+x)=5$,

να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης: $\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)$

▼ $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+x)=5 \Rightarrow [\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+x)]^2=25$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)+2\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+x)=25$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)+2\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)\varepsilon\varphi[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-x)]=25$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)+2\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{3}-x)\sigma\varphi(\frac{\pi}{3}-x)=25$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)+2=25$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{3}-x)+\varepsilon\varphi^2(\frac{\pi}{6}+x)=23$

9► Να παραστήσεις γραφικά τη συνάρτηση: $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 3x$, $x\in R$

▼ η f έχει περίοδο: $T=\frac{2\pi}{3}$

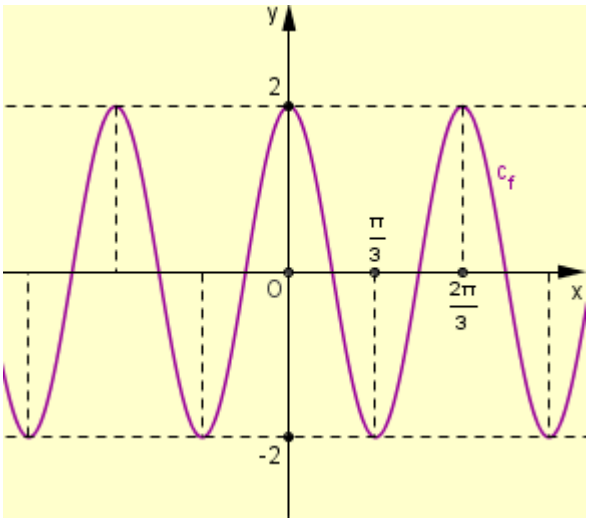
στο $[0,\frac{2\pi}{3})$:

η f έχει max το 2 όταν $3x=0$ δηλ. όταν $x=0$

η f έχει min το -2 όταν $3x=\pi$ δηλ. όταν $x=\frac{\pi}{3}$

η c_f τέμνει τον $x'x$ όταν $3x=\frac{\pi}{2}$ ή $3x=\frac{3\pi}{2}$

δηλ. όταν $x=\frac{\pi}{6}$ ή $x=\frac{\pi}{2}$



10► Να λύσεις την εξίσωση: $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu 2x$ (1) στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$

▼ $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}=1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x=1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$, $\kappa\in Z$

είναι $\sigma\upsilon\nu 2x\neq 0$
γιατί αν $\sigma\upsilon\nu 2x=0$ τότε (1)$\Leftrightarrow\eta\mu 2x=0$, άτοπο!
αφού $\eta\mu^2 2x+\sigma\upsilon\nu^2 2x=1$

$\pi\le x\le 2\pi \Leftrightarrow \pi\le\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\le 2\pi \Leftrightarrow 1-\frac{1}{8}\le\frac{\kappa}{2}\le 2-\frac{1}{8} \Leftrightarrow 2-\frac{2}{8}\le\kappa\le 4-\frac{2}{8}$

$\Leftrightarrow \kappa=2$ ή $\kappa=3$ (αφού $\kappa\in Z$)

άρα: $x=\pi+\frac{\pi}{8}$ ή $x=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

11► Να λύσεις τις εξισώσεις: i. $\eta\mu(2x-\frac{\pi}{3})=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{6})$ και ii. $\varepsilon\varphi x\eta\mu x+1=\eta\mu x+\varepsilon\varphi x$

▼ i. $\eta\mu(2x-\frac{\pi}{3})=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \eta\mu(2x-\frac{\pi}{3})=\eta\mu[\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6})]$

$\Leftrightarrow \eta\mu(2x-\frac{\pi}{3})=\eta\mu(\frac{\pi}{3}-x)$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-x$ ή $2x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3}+x$

$\Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}$ ή $x=(2\kappa+1)\pi$ $(\kappa\in Z)$

ii. η εξίσωση ορίζεται όταν $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$

$\varepsilon\varphi x\eta\mu x+1=\eta\mu x+\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\eta\mu x+1-\eta\mu x-\varepsilon\varphi x=0$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x(\eta\mu x-1)-(\eta\mu x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x-1)(\eta\mu x-1)=0$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1$ ή $\eta\mu x=1$, αδύνατο αφού τότε είναι $\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ $(\kappa\in Z)$

12► Να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης: $\eta\mu50^\circ\eta\mu80^\circ+\eta\mu10^\circ\sigma\upsilon\nu50^\circ$

▼ $\eta\mu50^\circ\eta\mu80^\circ+\eta\mu10^\circ\sigma\upsilon\nu50^\circ=\eta\mu50^\circ\eta\mu80^\circ+\sigma\upsilon\nu80^\circ\sigma\upsilon\nu50^\circ$ (αφού $10^\circ=90^\circ-80^\circ$)

$=\sigma\upsilon\nu(80^\circ-50^\circ)$

$=\sigma\upsilon\nu30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

13► Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\eta\mu A\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)=0$, να αποδείξεις ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

▼ $\eta\mu A\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)=0 \Leftrightarrow \eta\mu A\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu A(-\sigma\upsilon\nu B)=0$ (αφού $A+B+\Gamma=\pi$)

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\eta\mu B=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(A+B)=0$

$\Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$ (αφού $A+B+\Gamma=\pi$)

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma=0$

$\Leftrightarrow \Gamma=\frac{\pi}{2}$ (αφού $0<\Gamma<\pi$)

άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

14► Να βρεις τις γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο είναι: $A = 60^\circ$ και $\beta = 2\gamma$

▼ $\beta = 2\gamma \Leftrightarrow 2R\eta\mu B = 2\cdot 2R\eta\mu\Gamma$ (σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων)

$\Leftrightarrow \eta\mu B = 2\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \eta\mu(A+\Gamma) = 2\eta\mu\Gamma$ (αφού $A+B+\Gamma = \pi$)

$\Leftrightarrow \eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A = 2\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\Gamma + \frac{1}{2}\eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{3}{2}\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$ (αφού $0 < \Gamma < \pi$)

και βέβαια: $B = 90^\circ$

αλλιώς:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ (σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων)

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 4\gamma^2 + \gamma^2 - 2\cdot 2\gamma^2\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 3\gamma^2$

$\Leftrightarrow \alpha = \gamma\sqrt{3}$

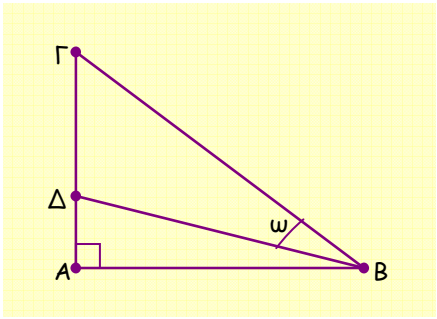
κι αφού: $\alpha^2 + \gamma^2 = 3\gamma^2 + \gamma^2 = 4\gamma^2 = \beta^2$

είναι: $B = 90^\circ$ (σύμφωνα με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος)

και βέβαια: $\Gamma = 30^\circ$

15► Στο διπλανό σχήμα είναι: $A\Gamma = 3A\Delta$.

Να αποδείξεις ότι: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2\varepsilon\varphi B}{3+\varepsilon\varphi^2 B}$



▼ $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(B - A\hat{B}\Delta) = \frac{\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi A\hat{B}\Delta}{1+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi A\hat{B}\Delta} = \frac{\varepsilon\varphi B - \frac{A\Delta}{AB}}{1+\varepsilon\varphi B\frac{A\Delta}{AB}}$

$= \frac{\varepsilon\varphi B - \frac{1}{3}\frac{A\Gamma}{AB}}{1+\varepsilon\varphi B\frac{1}{3}\frac{A\Gamma}{AB}}$

$= \frac{\varepsilon\varphi B - \frac{\varepsilon\varphi B}{3}}{1+\frac{\varepsilon\varphi^2 B}{3}}$

$= \frac{\frac{3\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi B}{3}}{\frac{3+\varepsilon\varphi^2 B}{3}}$

$= \frac{2\varepsilon\varphi B}{3+\varepsilon\varphi^2 B}$

16► Να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης: $\varepsilon\varphi 15^\circ + \sigma\varphi 15^\circ$

▼ $\varepsilon\varphi 15^\circ + \sigma\varphi 15^\circ = \varepsilon\varphi 15^\circ + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi 15^\circ} = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 15^\circ + 1}{\varepsilon\varphi 15^\circ}$

$$= \frac{1}{\frac{\varepsilon\varphi 15^\circ}{1+\varepsilon\varphi^2 15^\circ}}$$

$$= \frac{2}{\frac{2\varepsilon\varphi 15^\circ}{1+\varepsilon\varphi^2 15^\circ}}$$

$$= \frac{2}{\eta\mu 30^\circ}$$

$$= 4$$

17► Να αποδείξεις ότι: $\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \varepsilon\varphi 2\alpha$ και να υπολογίσεις την $\varepsilon\varphi 15^\circ$

▼ $\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \dfrac{\varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi\alpha} = \dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \dfrac{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$$

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \varepsilon\varphi 2\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{1-\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = 1 - \eta\mu^2 2\alpha$, που ισχύει

άρα: $\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \varepsilon\varphi 2\alpha$

σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση: $\varepsilon\varphi 15^\circ = \varepsilon\varphi(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{1+\eta\mu 60^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

18► Να αποδείξεις ότι: i. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$ και ii. $\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$

▼ i. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$= \frac{2(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\alpha}{2(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$= \varepsilon\varphi\alpha$

ii. $\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - 1$

$= 2(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)^2 - 1$

$= 2(4\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1) - 1$

$= 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$

19► Λύσε τις εξισώσεις: i. $2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu^2\frac{x}{2}$ ii. $\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$ iii. $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x\eta\mu^3 x = \frac{1}{8}$

▼ i. $2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}$

$\Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 2)\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 2$ (αδύνατη)

$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $(\kappa\in Z)$

ii. $\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 2$ (αδύνατη)

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \pi$

$\Leftrightarrow x = (2\kappa + 1)\pi$ $(\kappa\in Z)$

iii. $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x\eta\mu^3 x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2x}{2}\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \eta\mu 4x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \eta\mu 4x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $4x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}$ $(\kappa\in Z)$

20► Να αποδείξεις ότι: i. $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$ και ii. $8\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu 4\alpha$

▼ i. $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}=\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}$ (αφού $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$)

$$=(\eta\mu^2\frac{\pi}{8})^2+(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8})^2$$

$$=(\eta\mu^2\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8})^2-2\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}$$

$$=1-\frac{\eta\mu^2\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$=1-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}$$

ii. $8\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2\eta\mu^2 2\alpha$

$= 1-\sigma\upsilon\nu 4\alpha$

21► Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}$ να αποδείξεις ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές

▼ $\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}}{\frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}}=\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}$

$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$ (αφού: $0<B,\Gamma<\pi$ είναι: $\eta\mu B\neq 0$ και $\eta\mu\Gamma\neq 0$)

$\Leftrightarrow 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B$

$\Leftrightarrow \eta\mu 2\Gamma = \eta\mu 2B$

$\Leftrightarrow 2\Gamma = 2B$ ή $2\Gamma + 2B = \pi$ (αφού: $0<B,\Gamma<\pi$ είναι: $0<2B, 2\Gamma<2\pi$)

$\Leftrightarrow B=\Gamma$ ή $B+\Gamma=\frac{\pi}{2}$

άρα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (με $AB=A\Gamma$) ή ορθογώνιο (στο Α)

σειρά σου τώρα...

1. Αν $\eta\mu x > 0$ και $2\varepsilon\varphi x - 3 = 0$, να υπολογίσεις το $\sigma\upsilon\nu x$

2. Για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $\eta\mu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2$.
Να αποδείξεις ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

3. Να αποδείξεις ότι αν το άθροισμα των ημιτόνων των τεσσάρων γωνιών που σχηματίζουν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ισούται με 4, τότε οι διαγώνιες αυτές είναι κάθετες

4. Αν $\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi = \sqrt{2}\,\eta\mu\varphi$, να αποδείξεις ότι: $\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha\eta\mu\frac{2x}{3} + \beta$, $x \in R$, όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha > 0$.

Αν $f_{max} = 3$ και η c_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $M(0, 1)$:

i. να βρεις τους αριθμούς α και β ii. να λύσεις την εξίσωση $f(x) = 2$

6. Να βρεις την περίοδο και τις ακρότατες τιμές της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{2} - (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x$$

7. Το βάθος (σε m) του νερού της θάλασσας κάτω από μία γέφυρα κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου δίνεται από την: $f(t) = 20 + 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{3}$, $t \in [0, 24]$, όπου t ο χρόνος (σε h).

i. να βρεις την περίοδο της συνάρτησης
ii. να βρεις το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού
iii. ποιες ώρες του 24ώρου το βάθος του νερού είναι 18m ;
iv. αν το ύψος της γέφυρας (πάνω από τον πυθμένα) είναι 30m, μπορεί ένα σκάφος ύψους 8m (πάνω από την επιφάνεια) να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12;

8. Να λύσεις τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x = 0$ ii. $2\eta\mu^2 x + 3x - 2 = 0$, $x \in [2\pi, 3\pi]$

iii. $\eta\mu x \varepsilon\varphi x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2$ iv. $1 + \varepsilon\varphi x = \sqrt{3}\,(1 + \sigma\varphi x)$

v. $\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\varphi x = 1$ vi. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \sigma\upsilon\nu 4x$

vii. $1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$ viii. $\sqrt{3}\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

ix. $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x) = \frac{1 + 2\eta\mu 4x}{2}$

9. Να αποδείξεις ότι: $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} = 4$

10. Αν $\pi \le \alpha \le 3\pi/2$ και $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$, να υπολογίσεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ και $\varepsilon\varphi 2\alpha$

11. Αν $\eta\mu x - \eta\mu y = \alpha$ ενώ $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta$, να αποδείξεις ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \le 4$

12. Αν $\alpha = \frac{\pi}{11}$, να αποδείξεις ότι: $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu 5\alpha = \frac{1}{32}$

13. Να αποδείξεις ότι: $\eta\mu^4\frac{\pi}{16} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{16} + \eta\mu^4\frac{5\pi}{16} + \eta\mu^4\frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$

14. Αν $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1}{3}$, να υπολογίσεις την $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

15. Να αποδείξεις τις ακόλουθες ταυτότητες:

i. $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}$

ii. $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu 2\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\varphi}$

iii. $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

iv. $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha\varepsilon\varphi\alpha$

v. $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$

vi. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}\,\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

vii. $\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{4}$

viii. $\frac{4\sigma\varphi\alpha(\sigma\varphi^2\alpha - 1)}{(1 + \sigma\varphi^2\alpha)^2} = \eta\mu 4\alpha$

ix. $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

x. $\frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi 2\alpha$

xi. $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - x)\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - y) - \eta\mu(\frac{\pi}{4} - x)\eta\mu(\frac{\pi}{4} - y) = \eta\mu(x + y)$

16. Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, να υπολογίσεις το $\sigma\upsilon\nu(x - y)$

17. Να αποδείξεις ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$

18. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu B$, να αποδείξεις ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αντιστρόφως

19. Αν Δ είναι το ίχνος του ύψους $υ_α$ τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει: $\frac{β^2}{γ^2} = \frac{ΓΔ}{ΒΔ}$,
να αποδείξεις ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές

20. Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $2βημ\frac{A}{2} = α$,
να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

21. Να αποδείξεις ότι: $συν(α + β)συν(α - β) = συν^2α - ημ^2β$

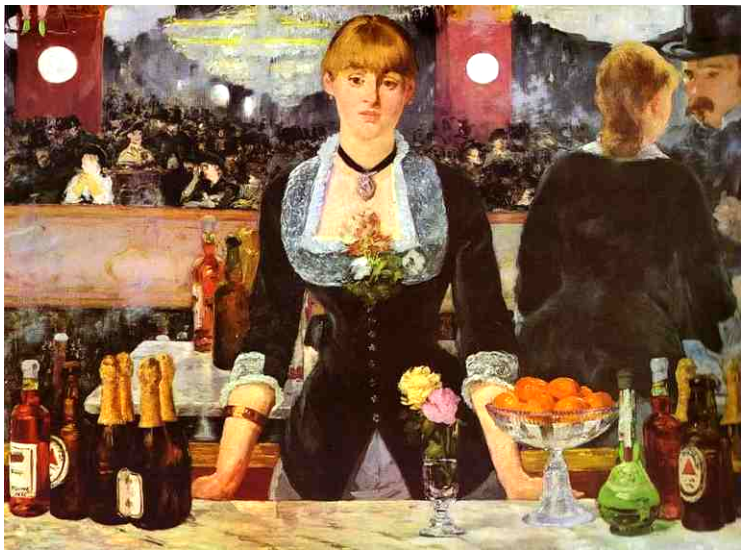
22. Να αποδείξεις ότι για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

i. $σφAσφB + σφBσφΓ + σφΓσφA = 1$ ii. $σφ^2A + σφ^2B + σφ^2Γ \geq 1$

23. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{συν(B - Γ)}{ημA - ημ(B - Γ)} = εφB$,
να αποδείξεις ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο

24. Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\frac{ημΓ}{συνAσυνB} = 2εφA$,
να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

25. Αν για τις γωνίες Α και Β τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν: $εφA = \frac{1}{2}$ και $εφB = \frac{1}{3}$,
να αποδείξεις ότι Γ=135°



Édouard Manet (1832-1883) Le Bar aux Folies - Bergère (1882)

πολυώνυμα...

- **γενική μορφή** ενός πολυωνύμου $P(x)$, $x\in R$ με πραγματικούς συντελεστές $\alpha_v, \alpha_{v-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_o$:

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o \quad (v\in N)$$

- **όρους** του $P(x)$ λέμε τα μονώνυμα: $\alpha_v x^v$, $\alpha_{v-1} x^{v-1}$, ..., $\alpha_1 x$, α_o

- **βαθμό** του $P(x)$ λέμε το βαθμό του μεγιστοβάθμιου μη μηδενικού όρου του

- το $P(x) = \alpha_o$ το λέμε **σταθερό** πολυώνυμο (που αν $\alpha_o \neq 0$ έχει βαθμό 0) και ειδικά:
  το $P(x) = 0$ το λέμε **μηδενικό** πολυώνυμο και ορίζουμε να μην έχει βαθμό

- δύο πολυώνυμα είναι **ίσα** όταν έχουν ίσους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων

- η **ταυτότητα της διαίρεσης** του πολυωνύμου $P(x)$ με το μη μηδενικό πολυώνυμο $Q(x)$ είναι:

$$P(x) = Q(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

βαθμόςP(x)=βαθμόςQ(x)+βαθμόςπ(x) και βαθμόςυ(x)<βαθμόςQ(x) ή υ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο

- το **υπόλοιπο** της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι $\upsilon = P(\rho)$

- ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του $P(x)$

- αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$, είναι ρίζα της: $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με ακέραιους συντελεστές, τότε ο **ρ είναι διαιρέτης του α_o**

- το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ μπορούν να βρεθούν εύκολα με το σχήμα του Horner

για παράδειγμα, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα του Horner:
$2x^4 - x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x^3 - 4x^2 + 7x - 11) + 23$

2	0	- 1	3	1	
	- 4	8	- 14	22	- 2
2	- 4	7	- 11	23	

στην πράξη τώρα...

1► Αν $\alpha \neq \beta$ $(\in R)$ και τα πολυώνυμα $x-\alpha$ και $x-\beta$ διαιρούν το πολυώνυμο $P(x)$ να αποδείξεις ότι και το πολυώνυμο $(x-\alpha)(x-\beta)$ διαιρεί το $P(x)$ και αντιστρόφως

▼ αφού το $x-\alpha$ διαιρεί το $P(x)$ είναι: $P(x) = (x-\alpha)\Pi_1(x)$

$\Rightarrow \quad P(\beta) = (\beta-\alpha)\Pi_1(\beta)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = (\beta-\alpha)\Pi_1(\beta)$

$\Leftrightarrow \quad \Pi_1(\beta) = 0$ (αφού $\alpha \neq \beta$)

άρα: $\Pi_1(x) = (x-\beta)\Pi_2(x)$

συνεπώς: $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\Pi_2(x)$ δηλ. το $(x-\alpha)(x-\beta)$ διαιρεί το $P(x)$

αντιστρόφως: αν το $(x-\alpha)(x-\beta)$ διαιρεί το $P(x)$ τότε είναι: $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\Pi_3(x)$

οπότε προφανώς τα $x-\alpha$ και $x-\beta$ διαιρούν το $P(x)$

2► Αν το πολυώνυμο $x-4$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$ και $Q(x) = P(x^2-2x)$, να αποδείξεις ότι το πολυώνυμο $x-1-\sqrt{5}$ διαιρεί το πολυώνυμο $Q(x)$

▼ αρκεί να δείξω ότι ο αριθμός $1+\sqrt{5}$ είναι ρίζα του $Q(x)$ δηλ. ότι: $Q(1+\sqrt{5}) = 0$

πραγματικά: $Q(1+\sqrt{5}) = P((1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}))$

$= P(1+5+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5})$

$= P(4)$

$= 0$ (αφού το $x-4$ διαιρεί το $P(x)$)

3► Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 5 ενώ διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 7, να βρεις το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-2)$

▼ αφού το $(x-1)(x-2)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού, το ζητούμενο υπόλοιπο $\upsilon(x)$ θα είναι το πολύ $1^{ου}$

έστω $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$, τότε:

$P(x) = (x-1)(x-2)\pi(x) + \upsilon(x)$

$\Leftrightarrow \quad P(x) = (x-1)(x-2)\pi(x) + \alpha x + \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(1) = \alpha+\beta \\ P(2) = 2\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 5 \\ 2\alpha+\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

άρα: $\upsilon(x) = 2x+3$

οι ακόλουθες εκφράσεις:
το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$
το $x-\rho$ διαιρεί το $P(x)$
$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$
ο ρ είναι ρίζα του $P(x)$
$P(\rho) = 0$
είναι ισοδύναμες !

4► Βρες το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$: $(2x+1)P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$

▼ το πολυώνυμο του β΄ μέλους είναι $3^{ου}$ βαθμού και το $2x+1$ είναι $1^{ου}$ βαθμού συνεπώς το $P(x)$ θα είναι $2^{ου}$ βαθμού

έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad (2x+1)P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$$
$$\Leftrightarrow \quad (2x+1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3-9x^2-3x+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha x^3+(\alpha+2\beta)x^2+(\beta+2\gamma)x+\gamma=2x^3-9x^2-3x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=2 \\ \alpha+2\beta=-9 \\ \beta+2\gamma=-3 \\ \gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ 2\beta=-10 \\ \beta=-5 \\ \gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-5 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

άρα: $P(x)=x^2-5x+1$

αλλιώς:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-9x^2-3x+1 & 2x+1 \\ \hline -2x^3-x^2 & x^2-5x+1 \\ \hline -10x^2-3x+1 & \\ 10x^2+5x & \\ \hline 2x+1 & \\ -2x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

άρα: $P(x)=x^2-5x+1$

5► Βρες τους πραγματικούς α, β ώστε να ισχύει: $\dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{x-2}$

▼ $\forall x\in\mathbb{R}/\{1,2\}$: $\dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{x-2} \Leftrightarrow 2x-5=\alpha(x-2)+\beta(x-1)$

αρκεί να βρούμε τους α, β ώστε $\forall x\in\mathbb{R}$: $2x-5=\alpha(x-2)+\beta(x-1)$

$$\Leftrightarrow 2x-5=(\alpha+\beta)x-2\alpha-\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ -2\alpha-\beta=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

δηλαδή: $\dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}$ (ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων)

6► Να λύσεις την εξίσωση: $x^6 - 2x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x = 0$ (1)

▼ (1) $\Leftrightarrow$ $x^4(x^2 - 2x + 1) + x(x^2 - 2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2(x^4 + x) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x(x-1)^2(x^3 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x = 0$ ή $x = 1$ (διπλή ρίζα) ή $x = -1$

αλλιώς:

(1) $\Leftrightarrow$ $x(x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x = 0$ ή $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ (2)

πιθανές ακέραιες ρίζες της (2): ± 1

1	-2	1	1	-2	1	
	1	-1	0	1	-1	1
1	-1	0	1	-1	0	

$\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow (x-1)(x^4 - x^3 + x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ (3)

πιθανές ακέραιες ρίζες της (3): ± 1

1	-1	0	1	-1	
	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	

$\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$
άρα η (1) έχει ρίζες: -1, 0 και 1 (διπλή)

7► να λύσεις την εξίσωση: $x^5 + x^4 - x^3 - 5x^2 - 8x - 4 = 0$ (1)

▼ πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

1	1	-1	-5	-8	-4	
	-1	0	1	4	4	-1
1	0	-1	-4	-4	0	
	-1	1	0	4		-1
1	-1	0	-4	0		
	2	2	4			2
1	1	2	0			

(1) $\Leftrightarrow (x+1)(x^4 - x^2 - 4x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x^3 - x^2 - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)(x^2 + x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ (διπλή ρίζα) ή $x = 2$

(το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ δεν έχει ρίζες αφού έχει $\Delta = -7 < 0$)

σταθερός όρος 0 → ρίζα το 0
άθροισμα συντελεστών 0 → ρίζα το 1
ελέγχω αν είναι ρίζες οι «μικρές» πιθανές ρίζες
γράφω το σχήμα του Horner μόνο για τις ρίζες

8► Να προσδιορίσεις τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\lambda x+16$ να έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ και να αναλύσεις το $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων

▼ για να διαιρεί το $(x-\rho)^2$ το $P(x)$ πρέπει:
το $(x-\rho)$ να διαιρεί το $P(x)$ και το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$

δηλ. πρέπει: $\begin{cases} 16+\lambda\rho+\rho^3=0 \\ \lambda+3\rho^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-3\rho^3+\rho^3=0 \\ \lambda=-3\rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=2 \\ \lambda=-12 \end{cases}$

1	0	λ	16	
	ρ	ρ^2	$\lambda\rho+\rho^3$	ρ
1	ρ	$\lambda+\rho^2$	$16+\lambda\rho+\rho^3$	
	ρ	$2\rho^2$		ρ
1	2ρ	$\lambda+3\rho^2$		

τότε είναι: $P(x)=(x-\rho)^2(x+2\rho)=(x-2)^2(x+4)$

αλλιώς:

πρέπει να βρω τον λ ώστε να υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε: $P(x)=(x-\rho)^2\pi(x)$ αφού το $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού και το $(x-\rho)^2$ είναι $2^{ου}$ βαθμού, το $\pi(x)$ θα είναι $1^{ου}$ βαθμού έστω $\pi(x)=\alpha x+\beta$, τότε:

$$P(x)=(x-\rho)^2\pi(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3+\lambda x+16=(x^2-2\rho x+\rho^2)(\alpha x+\beta)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3+\lambda x+16=\alpha x^3+(\beta-2\alpha\rho)x^2+(\alpha\rho^2-2\beta\rho)x+\beta\rho^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta-2\alpha\rho=0 \\ \alpha\rho^2-2\beta\rho=\lambda \\ \beta\rho^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2\rho \\ \rho^2-4\rho^2=\lambda \\ 2\rho^3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=4 \\ \lambda=-12 \\ \rho=2 \end{cases}$$

άρα: $P(x)=(x-2)^2(x+4)$

9► Βρες τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-x^2-x-2$ με τον άξονα $x'x$

▼

τα κοινά σημεία της c_f με τον $x'x$
είναι τα κοινά σημεία των γραμμών με εξισώσεις $y=0$ και $y=f(x)$
τα οποία τα βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} y=x^3-x^2-x-2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2-x-2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

1	-1	-1	-2	
	2	2	2	2
1	1	1	0	

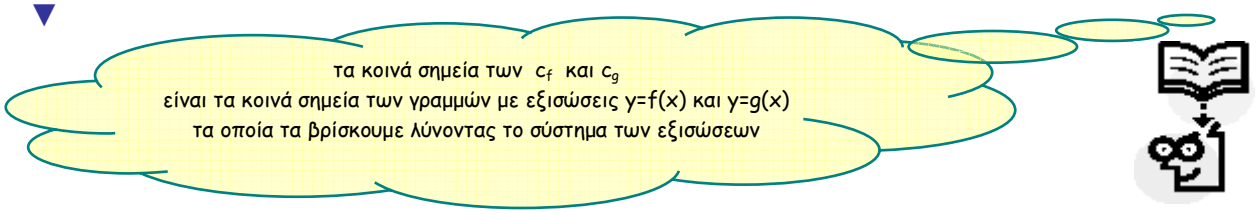
το τριώνυμο x^2+x+1 δεν έχει ρίζες στο R αφού έχει $\Delta=-3<0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+x+1)=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

άρα η c_f έχει με τον $x'x$ κοινό σημείο το $A(2,0)$

10► Να βρεις τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x)=x^3-x^2-x-2$ και $g(x)=3x^3-x^2-3x-2$

▼



$$\begin{cases} y=x^3-x^2-x-2 \\ y=3x^3-x^2-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3-x^2-x-2 \\ 3x^3-x^2-3x-2=x^3-x^2-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3-x^2-x-2 \\ 2x^3-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3-x^2-x-2 \\ 2x(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

άρα οι c_f και c_g έχουν κοινά σημεία τα $K(0,-2)$, $Λ(-1,-3)$ και $M(1,-3)$

11► Να λύσεις την ανίσωση: $-2x^5+3x^4+13x^3-33x^2+25x-6\le 0$ (1)

▼ μετά την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου (που γίνεται με το γνωστό τρόπο) βρίσκουμε ότι:

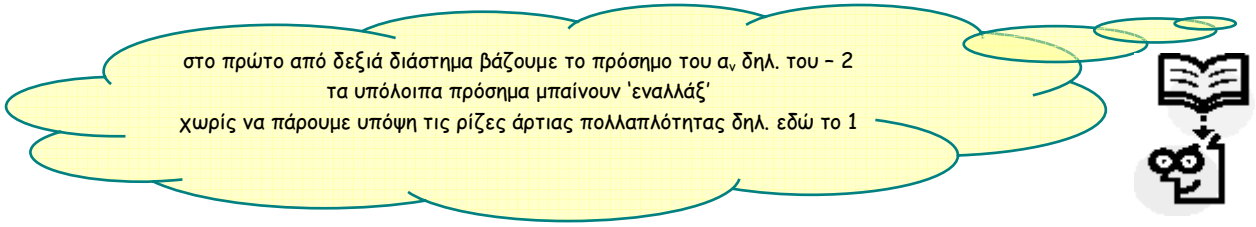
$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x+3)(1-2x)\le 0$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$	+		+		+		0	+		+	
x-2	-		-		-			-	0	+	
(x+3)(1-2x)	-	0	+	0	-			-		-	
γινόμενο	+	0	-	0	+		0	+	0	-	

σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων: $(1) \Leftrightarrow x\in[-3,\frac{1}{2}]\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$

αλλιώς:

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
γινόμενο		+	0	-	0	+	0	+	0	-	



12► Να λύσεις την ανίσωση: $\dfrac{(x-2)^3(2x+3)(x^2-9)}{(x-5)^2} \geq 0$ (1)

▼ η (1) ορίζεται $\forall x \in R-\{5\}$, τότε: (1) $\Leftrightarrow (x-2)^3(2x+3)(x^2-9)(x-5)^2 \geq 0$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	2	3	5	$+\infty$
$(x-2)^3$	−	−	−	0 +	+	+	+
$2x+3$	−	−	0 +	+	+	+	+
x^2-9	+	0 −	−	−	−	0 +	+
$(x-5)^2$	+	+	+	+	+	+	+
γινόμενο	+	0 −	0 +	0 −	0	+	+

σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων: (1) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-\frac{3}{2}, 2] \cup [3, 5) \cup (5, +\infty)$

αλλιώς:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	2	3	5	$+\infty$
γινόμενο	+	0 −	0 +	0 −	0 +	‖	+

13► Να λύσεις τις εξισώσεις: $\dfrac{x^2}{x+1} + x + 1 = \dfrac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$ (1) και $x^2 - x + \dfrac{72}{x^2-x} = 18$ (2)

▼ η (1) ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 1$, τότε:

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x+1)(x^2-1) = 3x^2 + 4x - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 3x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{5}{2}$$

(η ρίζα −1 του τριωνύμου δεν είναι δεκτή αφού $x \neq -1$)

η (2) ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 1$, τότε θέτοντας $\omega = x^2 - x$ έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \omega + \frac{72}{\omega} = 18$$
$$\Leftrightarrow \omega^2 - 18\omega + 72 = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega = 6 \text{ ή } \omega = 12$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \text{ ή } x^2 - x - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = 4$$

14► Να λύσεις τις εξισώσεις: $\sqrt{x} = x-2$ (1) και $\sqrt{2x+7} - x = 2$ (2)

▼ (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$ (η ρίζα -1 του τριωνύμου δεν γίνεται δεκτή αφού είναι $\sqrt{x} \geq 0$)

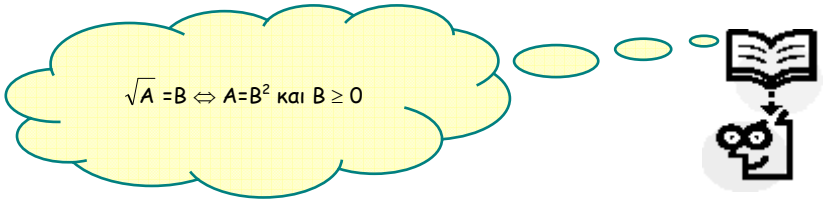
$\Leftrightarrow x = 4$

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow 2x+7 = (x+2)^2$ και $x+2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ και $x \geq -2$

$\Leftrightarrow x = 1$

(η ρίζα – 3 του τριωνύμου δεν γίνεται δεκτή αφού είναι $x \geq -2$)



15► Να λύσεις τις εξισώσεις: $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = 1$ (1) και $\sqrt{3x+1} - \sqrt{7x+1} + \sqrt{x-1} = 0$ (2)

▼ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} = 1 + \sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2x+6 = 1 + x + 4 + 2\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4(x+4)$ και $x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ και $x \geq -1$

$\Leftrightarrow x = 5$

η (2) ορίζεται όταν $3x+1 \geq 0$, $7x+1 \geq 0$ και $x-1 \geq 0$ δηλαδή όταν $x \geq 1$, τότε έχουμε:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}$

$\Leftrightarrow 3x+1+x-1+2\sqrt{(3x+1)(x-1)} = 7x+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 3x+1$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 8x - 4 = 9x^2 + 6x + 1$ και $3x+1 \geq 0$ (που ισχύει)

$\Leftrightarrow 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

(η ρίζα $-\frac{1}{3}$ του τριωνύμου δεν γίνεται δεκτή αφού είναι $x \geq 1$)

σειρά σου τώρα...

1. Να βρεις το τριώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν $P(0)=1$ και $\forall x\in\mathbb{R}$: $P(x)-P(x-1)=2x+1$

2. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $Q(x)=x^4-7x+6$ αφήνει υπόλοιπο $υ(x)=3x-1$, να βρεις το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

3. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν: $P(0)=1$, $P(-1)=3$ και $P(1)=3$.
Να βρεις το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^3-x)$

4. Να βρεις τους πραγματικούς α, β, γ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^5+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με το πολυώνυμο x^3-2x να είναι το πολυώνυμο $-3x^2+4x+1$

5. Να αποδείξεις ότι αν η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (όπου $\alpha\neq 0$) έχει ρίζα τον πραγματικό αριθμό ρ τότε έχει ρίζα και τον $\frac{1}{\rho}$

6. Το πολυώνυμο $x-\rho$, όπου ρ αρνητικός ακέραιος είναι παράγοντας των πολυωνύμων $P(x)=x^3+\alpha x^2+(1-\beta)x-8$ και $Q(x)=\alpha x^4+\alpha x^3-x^2+\beta x+9$.
Να βρεις τον ρ και τους πραγματικούς α, β

7. Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα με $P(x)>0$, $Q(x)=\sqrt{P(P(x))}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου $S(x)=P(x)-x$, να αποδείξεις ότι ο α είναι ρίζα και του πολυωνύμου $T(x)=Q(x)-\sqrt{x}$

8. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ όταν διαιρείται με το x^2-4 δίνει πηλίκο $(x+3)^ν$ όπου $ν\in\mathbb{N}$ και υπόλοιπο $2x^2+1$

i. να βρεις το υπόλοιπο υ της διαίρεσης $P(x):(x-2)$
ii. να βρεις το πηλίκο π(x) της προηγούμενης διαίρεσης
iii. να βρεις το πολυώνυμο $P(x)$ αν είναι γνωστό ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)=π(x)+4x$

9. Το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+11x+\beta$ αν διαιρεθεί με το $(x-1)(x-2)$ αφήνει υπόλοιπο 4.

i. να βρεις τους πραγματικούς α, β και το πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης
ii. να λύσεις την ανίσωση: $P(x)\leq 4$

10. Ένα πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού $P(x)$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με 2, έχει ρίζα το 0 και διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+1

i. να βρεις το $P(x)$
ii. να λύσεις την ανίσωση: $[P(x)-2]^3+[P(x)-2]^2+P(x)>2$

11. Να λύσεις τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$ ii. $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + 12 = 0$ iii. $(\frac{x}{x+1})^2(\frac{x}{x+1}+1) = 36$

iv. $\frac{2x^2}{x+1} + \frac{5}{3-x} + \frac{x^2+11}{x^2-2x-3} = 0$ v. $\sqrt{11-2x} - \sqrt{2x+2} = -1$ vi. $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} + x - 2 = 0$

12. Να λύσεις τις ακόλουθες ανισώσεις:

i. $x^7 + 8x^4 - x^3 - 8 < 0$ ii. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x \geq 0$ iii. $\frac{x^3+3x^2-3x+7}{x^2-5x+6} \geq 1$

13. i. Να βρεις τους πραγματικούς α και β αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha^2x^3 - 2\alpha x^2 - x + \beta^2 + 2$, $x \in R$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $A(1, 0)$
ii. Να βρεις τα διαστήματα στα οποία η c_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

14. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 + 5x + \gamma$ έχει τριπλή ρίζα το 1, να λύσεις την εξίσωση $P(x) = 0$

15. Να λύσεις την εξίσωση: $x^{5v} - 3x^{2v} - 10x^v = 0$ αν ο ν ($v \neq 0$) είναι άρτιος φυσικός

Νίκος Εγγονόπουλος (1910-1985) «Βενετία»

ακολουθία...

λέμε μία **συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$ και τύπο $f(v)$ που απλούστερα γράφεται f_v
οι τιμές της f (αλλιώς f_v) λέγονται **όροι** της f και ο τύπος f_v, **γενικός όρος** της f_v
οι όροι μιας ακολουθίας α_v είναι: $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \dots , \alpha_{v-\kappa} , \dots , \alpha_{v-1} , \alpha_v , \alpha_{v+1} , \dots , \alpha_{v+\kappa} , \dots$
πολλές ακολουθίες μπορούν να ορισθούν **αναδρομικά** (αναγωγικά)
με τον γενικό τους όρο να δίνεται ως συνάρτηση προηγουμένων όρων
και γνωστό επαρκή αριθμό αρχικών όρων

αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω...

λέμε κάθε ακολουθία α_v με την **ιδιότητα**: $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega , \forall v \in \mathbb{N}^*$ (ή αλλιώς: $\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega$)
και **γενικό όρο**: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$

που έχει **άθροισμα των ν πρώτων όρων**: $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \frac{v(\alpha_1 + \alpha_v)}{2} = \frac{v[2\alpha_1 + (v-1)\omega]}{2}$

▶ οι α, β, γ είναι **διαδοχικοί όροι** της $\alpha_v \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$ (ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ)

▶ **περιττό πλήθος όρων** μιας αριθμητικής προόδου α_v μπορούμε να το παραστήσουμε:
$\dots , \alpha - 2\omega , \alpha - \omega , \alpha , \alpha + \omega , \alpha + 2\omega , \dots$ όπου α ο μεσαίος όρος και ω η διαφορά

▶ **άρτιο πλήθος όρων** μιας αριθμητικής προόδου α_v μπορούμε να το παραστήσουμε:
$\dots , \alpha - 3\omega , \alpha - \omega , \alpha + \omega , \alpha + 3\omega , \dots$ όπου $\alpha - \omega , \alpha + \omega$ οι μεσαίοι όροι και 2ω η διαφορά

γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ...

λέμε κάθε ακολουθία α_v με την **ιδιότητα**: $\alpha_{v+1} = \lambda\alpha_v , \forall v \in \mathbb{N}^*$ (ή αλλιώς: $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \lambda$)

και **γενικό όρο**: $\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1}$

που έχει **άθροισμα των ν πρώτων όρων**: $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \begin{cases} \alpha_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ v\alpha_1 , & \lambda = 1 \end{cases}$

αν $|\lambda| < 1, \lambda \neq 0$: $\lim\limits_{v \to +\infty} S_v = \lim\limits_{v \to +\infty} \frac{\alpha_1 - \alpha_1\lambda^v}{1-\lambda} = \lim\limits_{v \to +\infty} \left(\frac{\alpha_1}{1-\lambda} - \frac{\alpha_1\lambda^v}{1-\lambda}\right) = \lim\limits_{v \to +\infty} \frac{\alpha_1}{1-\lambda} - \lim\limits_{v \to +\infty} \frac{\alpha_1\lambda^v}{1-\lambda} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} - 0 = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$

ορίζουμε λοιπόν ως άθροισμα των άπειρων πρώτων όρων της α_v το: $S_\infty = \lim\limits_{v \to +\infty} S_v = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$

▶ οι α, β, γ είναι **διαδοχικοί όροι** της $\alpha_v \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$ (ο θετικός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ)

▶ **περιττό πλήθος όρων** μιας γεωμετρικής προόδου α_v μπορούμε να το παραστήσουμε:
$\dots , \frac{\alpha}{\lambda^2} , \frac{\alpha}{\lambda} , \alpha , \alpha\lambda , \alpha\lambda^2 , \dots$ όπου α ο μεσαίος όρος και λ ο λόγος

▶ **άρτιο πλήθος όρων** μιας γεωμετρικής προόδου α_v μπορούμε να το παραστήσουμε:
$\dots , \frac{\alpha}{\lambda^5} , \frac{\alpha}{\lambda^3} , \frac{\alpha}{\lambda} , \alpha\lambda , \alpha\lambda^3 , \alpha\lambda^5 , \dots$ όπου $\frac{\alpha}{\lambda} , \alpha\lambda$ οι μεσαίοι όροι και λ^2 ο λόγος

στην πράξη τώρα...

1► Σε μια ακολουθία α_v , οι όροι $\alpha_{1+\kappa}$ και $\alpha_{v-\kappa}$ «ισαπέχουν» από τους α_1 και α_v. Να δείξεις ότι:
i. αν η α_v είναι αριθμητική πρόοδος το άθροισμα $\alpha_{1+\kappa} + \alpha_{v-\kappa}$ είναι σταθερό
ii. αν η α_v είναι γεωμετρική πρόοδος το γινόμενο $\alpha_{1+\kappa}\,\alpha_{v-\kappa}$ είναι σταθερό

▼ i. $\alpha_{1+\kappa} + \alpha_{v-\kappa} = \alpha_1 + \kappa\omega + \alpha_1 + (v-\kappa-1)\omega = \alpha_1 + \alpha_1 + (v-1)\omega = \alpha_1 + \alpha_v$ (δηλ. σταθερό)
ii. $\alpha_{1+\kappa}\,\alpha_{v-\kappa} = \alpha_1\,\lambda^{\kappa}\,\alpha_1\,\lambda^{v-\kappa-1} = \alpha_1\,\alpha_1\,\lambda^{v-1} = \alpha_1\,\alpha_v$ (δηλ. σταθερό)

2► Βρες την αριθμητική πρόοδο α_v που έχει $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$

▼ $$\begin{cases} \alpha_3 = 20 \\ \alpha_7 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ 4\omega = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 14 \\ \omega = 3 \end{cases}$$

3► Να υπολογίσεις το άθροισμα: $9 + 12 + 15 + \ldots + 90$

▼ πρόκειται για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου α_v
με $\alpha_1 = 9$, $\omega = 3$ και νιοστό όρο 90
$\alpha_v = 90 \Leftrightarrow 9 + (v-1)3 = 90 \Leftrightarrow v = 28$
συνεπώς: $9 + 12 + 15 + \ldots + 90 = \Sigma_{28} = \dfrac{9+90}{2}28 = 1386$

4► Βρες το άθροισμα όλων των περιττών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ του 16 και του 380

▼ ζητάμε το άθροισμα: $17 + 19 + \ldots + 379$
πρόκειται για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου α_v
με $\alpha_1 = 17$, $\omega = 2$ και νιοστό όρο 379
$\alpha_v = 379 \Leftrightarrow 17 + (v-1)2 = 379 \Leftrightarrow v = 182$
συνεπώς: $17 + 19 + \ldots + 379 = \Sigma_{182} = \dfrac{17+379}{2}182 = 36036$

5► Βρες τρεις ακέραιους, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 36 και γινόμενο 1428

▼ έστω $\alpha - \omega$, α , $\alpha + \omega$ οι ζητούμενοι αριθμοί, τότε είναι:

$$\begin{cases} \alpha - \omega + \alpha + \alpha + \omega = 36 \\ (\alpha - \omega)\alpha(\alpha + \omega) = 1428 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ 144 - \omega^2 = 119 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ \omega^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ \omega = -5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha = 12 \\ \omega = 5 \end{cases}$$

συνεπώς οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 7, 12, 17 (για $\omega = 5$)
(για $\omega = -5$ προκύπτουν οι 17, 12, 7 δηλ. οι ίδιοι αριθμοί σε άλλη(!) πρόοδο)

6► Βρες το γενικό όρο της ακολουθίας α_v που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
$\alpha_1 = 2$ και $\forall v \in N$ με $v \geq 2$: $\alpha_v = \alpha_{v-1} + 3v - 2$

▼
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 2\\ \alpha_2 = \alpha_1 + 4\\ \alpha_3 = \alpha_2 + 7\\ \alpha_4 = \alpha_3 + 10\\ \alpha_5 = \alpha_4 + 13\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_v = \alpha_{v-1} + 3v - 2\end{array}\right\} (+) \Rightarrow \alpha_v = 2 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 3v - 2$$

αλλά οι $4, 7, 10, 13, \ldots, 3v - 2$
είναι οι $(v - 1)$ πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου διαφοράς 3

συνεπώς: $\alpha_v = 2 + \dfrac{(v-1)(4+3v-2)}{2} = \dfrac{3v^2 - v + 2}{2}$

7► Ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 19, να παρεμβάλεις ν άλλους έτσι ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και ο τελευταίος από τους ζητούμενους να είναι εξαπλάσιος του δεύτερου από τους ζητούμενους

▼ έστω $x_1, x_2, \ldots, x_v$ οι ζητούμενοι αριθμοί, τότε
αφού οι $1, x_1, x_2, \ldots, x_v, 19$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $x_v = 6x_2$, είναι:

$$\left\{\begin{array}{l}19 = 1 + (v+1)\omega\\ 1 + v\omega = 6(1 + 2\omega)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega = \dfrac{18}{v+1}\\ (v-12)\omega = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega = \dfrac{18}{v+1}\\ \dfrac{18(v-12)}{v+1} = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega = 1\\ v = 17\end{array}\right.$$

άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 17, οι: $2, 3, \ldots, 18$

8► Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας ακολουθίας α_v είναι $\forall v \in N^*$: $S_v = 4v^2 - 3v$.
Να αποδείξεις ότι η α_v είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεις τον α_1 και τη διαφορά της ω

▼ $\forall v \geq 2$: $\alpha_v = S_v - S_{v-1} = 4v^2 - 3v - [4(v-1)^2 - 3(v-1)] = 8v - 7$

αφού $\alpha_1 = S_1 = 1 = 8 \cdot 1 - 7$ (δηλ. ο προηγούμενος τύπος μας δίνει και τον α_1)
είναι $\forall v \in N^*$: $\alpha_v = 8v - 7$

κι επειδή $\forall v \in N^*$: $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 8(v+1) - 7 - (8v - 7) = 8$
η α_v είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 8$

9► Να βρεις τη γεωμετρική πρόοδο που έχει $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$

▼
$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_{13} = \sqrt{2}\\ \alpha_{23} = 32\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 \lambda^{12} = \sqrt{2}\\ \alpha_1 \lambda^{22} = 32\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda^{12}}\\ \lambda^{10} = 32\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda^{12}}\\ (\lambda^2)^5 = 2^5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6}\\ \lambda = -\sqrt{2}\end{array}\right.$$
ή
$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6}\\ \lambda = \sqrt{2}\end{array}\right.$$

10► Μία κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.
Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

▼ έστω α_v ο αριθμός των βακτηριδίων μετά από ν ώρες
η α_v είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 2$ και $\alpha_1 = 6$ $(= 3\bullet 2)$
συνεπώς μετά 12 ώρες θα υπάρχουν $\alpha_{12} = 6\bullet 2^{11} = 12288$ βακτηρίδια

11► Να υπολογίσεις το άθροισμα: $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots + 256$

▼ πρόκειται για το άθροισμα Σ_v αγνώστου αριθμού ν, πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = -2$

$\alpha_v = 256 \Leftrightarrow 1\bullet(-2)^{v-1} = 256 \Leftrightarrow (-2)^{v-1} = (-2)^8 \Leftrightarrow v - 1 = 8 \Leftrightarrow v = 9$

συνεπώς: $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots + 256 = \Sigma_9 = 1\bullet\dfrac{(-2)^9 - 1}{-2-1} = \dfrac{-513}{-3} = 171$

12► Να βρεις τη γεωμετρική πρόοδο στην οποία ισχύουν: $\Sigma_4 = 80$ και $\Sigma_6 = 28\Sigma_3$

▼ αν $\lambda = 1$: $\Sigma_4 = 80 \Leftrightarrow 4\alpha_1 = 80 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$
$\Sigma_6 = 28\Sigma_3 \Leftrightarrow 6\alpha_1 = 28\bullet 3\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ ΑΤΟΠΟ άρα είναι $\lambda \neq 1$ και έχουμε:

$$\Sigma_4 = 80 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1(\lambda^4 - 1)}{\lambda - 1} = 80 \quad (1)$$

$$\Sigma_6 = 28\Sigma_3 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1(\lambda^6 - 1)}{\lambda - 1} = 28\frac{\alpha_1(\lambda^3 - 1)}{\lambda - 1}$$

$\Leftrightarrow (\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 1) = 28(\lambda^3 - 1)$ (αφού: $(1) \Rightarrow \alpha_1 \neq 0$)
$\Leftrightarrow \lambda^3 = 27$
$\Leftrightarrow \lambda = 3$ οπότε: $(1) \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

13► Να βρεις τη γεωμετρική πρόοδο στην οποία ισχύουν: $\Sigma_2 = 3 + \sqrt{3}$ και $\Sigma_4 = 4(3 + \sqrt{3})$

▼ έστω ότι η ζητούμενη γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} \Sigma_2 = 3 + \sqrt{3} \\ \Sigma_4 = 4(3 + \sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1(1 + \lambda) = 3 + \sqrt{3} \\ \alpha_1(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3) = 4(3 + \sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{1 + \lambda} \\ \dfrac{(3 + \sqrt{3})(1 + \lambda)(1 + \lambda^2)}{(1 + \lambda)} = 4(3 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \ldots - 3 - 2\sqrt{3} \\ \lambda = -\sqrt{3} \end{cases}$$

14► Βρες τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με άθροισμα 111 και γινόμενο 1000

▼ αν α , $\alpha\lambda$, $\alpha\lambda^2$ είναι οι ζητούμενοι αριθμοί όπου λ ο λόγος της προόδου, έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2=111 \\ \alpha\cdot\alpha\lambda\cdot\alpha\lambda^2=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+\lambda+\lambda^2)=111 \\ (\alpha\lambda)^3=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+\lambda+\lambda^2)=111 \\ \alpha\lambda=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10(1+\lambda+\lambda^2)}{\lambda}=111 \\ \alpha=\dfrac{10}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\lambda^2-101\lambda+10=0 \\ \alpha=\dfrac{10}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=10 \\ \alpha=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{10} \\ \alpha=100 \end{cases}$$

άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 1, 10, 100 ή 100, 10, 1 (δηλ. οι ίδιοι σε άλλη πρόοδο)

15► Να γράψεις σε κλασματική μορφή τον αριθμό $6,7\overline{36}$

▼ $6,7\overline{36} = 6,7363636\ldots$

$= 6,7 + 0,0363636\ldots$

$= 6,7 + \dfrac{36}{1000} + \dfrac{36}{100000} + \dfrac{36}{10000000} + \ldots$

$= 6,7 + \dfrac{\dfrac{36}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}$ (αφού η γεωμετρική πρόοδος $\dfrac{36}{1000}, \dfrac{36}{100000}, \dfrac{36}{10000000}, \ldots$ έχει $0 \neq |\lambda| = \dfrac{1}{100} < 1$)

$= 6,7 + \dfrac{4}{110}$

$= \dfrac{741}{110}$

16► Να βρεις τη γεωμετρική πρόοδο α_v που έχει λόγο $\lambda \neq 0$ με $|\lambda| < 1$, άθροισμα «απείρων όρων» 12 και άθροισμα των τετραγώνων των απείρων όρων 48

▼ $\forall v \in N^*$: $\dfrac{\alpha_{v+1}^2}{\alpha_v^2} = \left(\dfrac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v}\right)^2 = \lambda^2$

συνεπώς τα τετράγωνα των όρων της α_v είναι επίσης γ.π. με λόγο $\lambda^2 < 1$ (αφού $|\lambda| < 1$), άρα:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\ldots=12 \\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}=12 \\ \dfrac{\alpha_1^2}{1-\lambda^2}=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=12(1-\lambda) \\ \dfrac{12^2(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)}=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=12(1-\lambda) \\ 1+\lambda=3(1-\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=6 \\ \lambda=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

σειρά σου τώρα...

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι αριθμοί α, β, γ, τ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

2. Αν οι πλευρές α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξεις ότι είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 5, 4, 3 αντιστοίχως

3. Να βρεις την αριθμητική πρόοδο α_v για την οποία ισχύουν:
$\alpha_4 + \alpha_8 = 18$ και $\alpha_4^3 + \alpha_8^3 = 3402$

4. Να βρεις τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 36 και γινόμενο 1428

5. Να βρεις τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου οι οποίοι έχουν άθροισμα 26 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 214

6. Να βρεις την αριθμητική πρόοδο στην οποία το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων περιττής τάξης είναι 85 και το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων άρτιας τάξης είναι 100

7. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{15} = 20$, να βρεις το Σ_{20}

8. Δίνεται η ακολουθία α_v με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{v+1} = \dfrac{2\alpha_v - 9}{\alpha_v + 8}$

i. να αποδείξεις ότι η ακολουθία $\beta_v = \dfrac{1}{\alpha_v + 3}$ είναι αριθμητική πρόοδος

ii. να βρεις τον γενικό όρο της α_v

9. Να υπολογίσεις τα αθροίσματα:
i. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2v - 1)$ και ii. $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (3 + 2v)$

10. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_v = -11 + 2v$
i. να αποδείξεις ότι η ακολουθία α_v είναι αριθμητική πρόοδος
ii. να βρεις το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{21}$
iii. να αποδείξεις ότι οι αριθμοί $-1, 1, 3$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_v

11. i. Να βρεις την αριθμητική πρόοδο α_v η οποία έχει $\alpha_5 = 2$, $\alpha_6 = 8$ και $\alpha_7 = 14$
ii. Να υπολογίσεις το άθροισμα $\Sigma = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \ldots + \alpha_{51}$

12. Να αποδείξεις ότι αν σε μία αριθμητική πρόοδο είναι: $\Sigma_\kappa = \Sigma_\rho$ με $\kappa \neq \rho$ τότε είναι: $\Sigma_{\kappa+\rho} = 0$

13. Ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 92, να παρεμβάλεις ν αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ με $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = 1363$ έτσι ώστε οι $2, x_1, x_2, \dots, x_\nu, 92$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

14. Να αποδείξεις ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$ είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσεις το άθροισμα: $\Sigma = \alpha_7 + \alpha_8 + \dots + \alpha_{17}$

15. Να βρεις την γεωμετρική πρόοδο στην οποία ισχύουν: $\Sigma_4 = 40$ και $\Sigma_8 = 3280$

16. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu + 3 \cdot 2^\nu - 1$ και η αριθμητική πρόοδος β_ν με $\beta_1 = 2$ και $\omega = 3$

i. να αποδείξεις ότι η ακολουθία $\gamma_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος

ii. να υπολογίσεις το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της α_ν

17. Να βρεις 4 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου που έχουν γινόμενο 729 και ο τέταρτος είναι ίσος με το γινόμενο των δύο μεσαίων όρων

18. Να βρεις 4 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο κατά 3 και ο τέταρτος από τον τρίτο κατά 12

19. Να βρεις τους α, β, γ $(\in R)$ αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση: $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ έχει ρίζες -1 και 3, και οι $\alpha, \beta, \gamma + 3$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

20. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξεις ότι οι αριθμοί: $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha+\beta}$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha \neq 0, \lambda \neq \pm 1)$

21. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξεις ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right)$ $(\alpha\lambda \neq 0)$

22. Ανάμεσα στους αριθμούς 3 και 768, να παρεμβάλεις ν αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ με $x_1 x_2 \dots x_\nu = 48^7$ έτσι ώστε οι $3, x_1, x_2, \dots, x_\nu, 768$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

23. Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu + 12}{4}$, $\forall \nu \in N^*$

i. να αποδείξεις ότι η ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_\nu - 4$ είναι γεωμετρική πρόοδος, να βρεις το γενικό της όρο και το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων της

ii. να βρεις το γενικό όρο της α_ν και το άθροισμα Σ_ν' των ν πρώτων όρων της

24. Ένας αρχικός πληθυσμός 10 βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μία ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή 270 βακτηριδίων κάθε ώρα.

i. να βρεις το πλήθος των βακτηριδίων μετά από 6 ώρες

ii. να βρεις το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό

iii. πόσες ώρες μετά από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

25. Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία 250. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο και η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

i. να υπολογίσεις το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου

ii. αν την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου την παρακολούθησαν 100 θεατές και σε κάθε επόμενη ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν, να βρεις σε ποια παράσταση θα γεμίσει για πρώτη φορά το θέατρο

The Persistence of Memory(1931) *Salvador Dalí (1904-1989)*

η εκθετική συνάρτηση...

▶ αν $a>0$, ορίζουμε, επεκτείνοντας την έννοια της δύναμης με βάση τον α και εκθέτη:

- τον ρητό $\frac{\mu}{\nu}$ $(\mu\in Z,\nu\in N_+^*)$: $a^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{a^\mu}$
- τον άρρητο x: $a^x=\lim\limits_{\nu\to+\infty}a^{p_\nu}$ (όπου p_ν η προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία)

(ορίζουμε επίσης αν $\mu,\nu\in N_+^*$: $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$ και αν $x\in(0,+\infty)$: $0^x=0$)

συμβατά με τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων οι οποίες εξακολουθούν να ισχύουν

▶ **εκθετική συνάρτηση με βάση α** ($a>0$ και $a\neq1$) λέμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με **$f(x)=a^x$**

και αν ορίσουμε: $e=\lim\limits_{\nu\to+\infty}(1+\frac{1}{\nu})^\nu$ (≈ 2.718), **εκθετική συνάρτηση** λέμε την **$f(x)=e^x$**

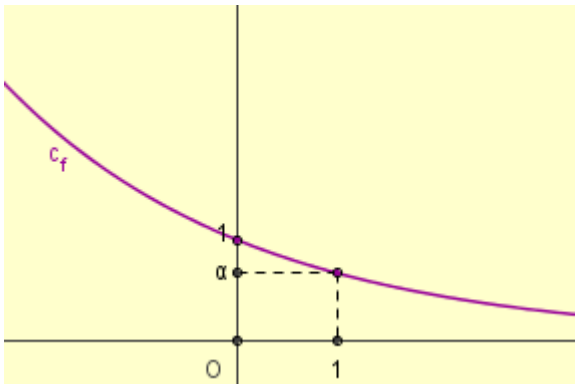
- **αν $0<a<1$**

η f είναι ↓

$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

ενώ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$

η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f



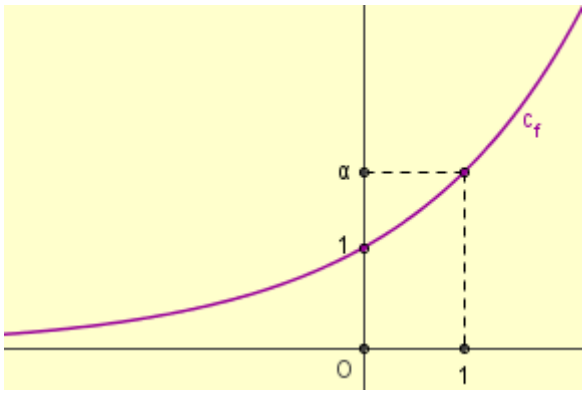
- **αν $a>1$**

η f είναι ↑

$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

ενώ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f



και ο νόμος της εκθετικής μεταβολής...

▶ η συνάρτηση (**νόμος**) της **εκθετικής μεταβολής**: **$Q(t)=Q_0e^{ct}$**, $t\geq0$

απόσβεσης (αν $c<0$) ή **αύξησης** (αν $c>0$),

είναι ένα μαθηματικό μοντέλο περιγραφής φυσικών φαινομένων στα οποία ένα μέγεθος Q μεταβάλλεται εξαρτώμενο από ένα άλλο μέγεθος t (συνήθως τον χρόνο) έχοντας ως **αρχική** την **τιμή** Q_0 (όταν $t=0$)

ο λογάριθμος...

► αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, **λογάριθμο του θ ως προς βάση α** (συμβολικά: $\log_\alpha \theta$) ονομάζουμε τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον θ, δηλαδή:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

► άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι: • $\log_\alpha \alpha^x = x$ • $\alpha^{\log_\alpha x} = x$ • $\log_\alpha 1 = 0$ • $\log_\alpha \alpha = 1$

► επίσης: • $\log_\alpha \theta_1\theta_2 = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ • $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$ • $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

► αντί $\log_{10} x$ γράφουμε **logx** (**δεκαδικός λογάριθμος**), ενώ αντί $\log_e x$ γράφουμε **lnx** (**νεπέριος** ή **φυσικός λογάριθμος**)

► τύποι αλλαγής βάσης: • $\alpha^x = \beta^{x \log_\beta \alpha}$ • $\log_\alpha x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$

και η λογαριθμική συνάρτηση...

► **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α** ($\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$) λέμε τη συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$ με $f(x) = \log_\alpha x$

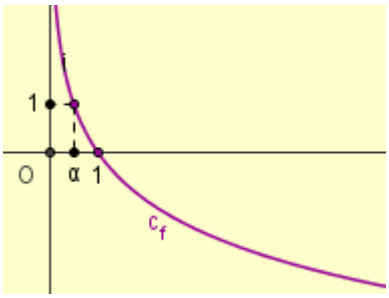
• **αν $0 < \alpha < 1$**

η f είναι ↓

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$

ενώ αφού $\lim\limits_{x \to 0} \log_\alpha x = +\infty$

η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f



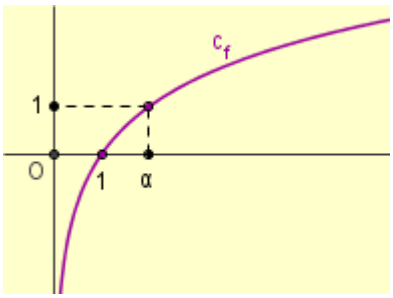
• **αν $\alpha > 1$**

η f είναι ↑

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$

ενώ αφού $\lim\limits_{x \to 0} \log_\alpha x = -\infty$

η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f



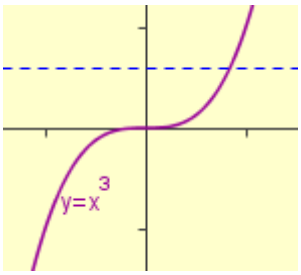
συνάρτηση 'ένα προς ένα' και αντίστροφη συνάρτηση...

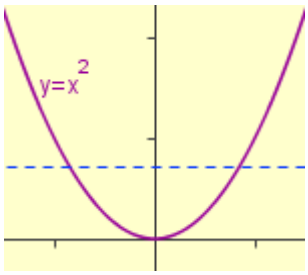
μία συνάρτηση f λέγεται **ένα προς ένα** (συμβ. **1-1**) όταν $\forall x_1, x_2 \in A_f$: $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ή αλλιώς (ισοδύναμα): $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

για **παράδειγμα**

η $f(x) = x^3$ είναι 1 - 1 η $f(x) = x^2$ δεν είναι 1 - 1

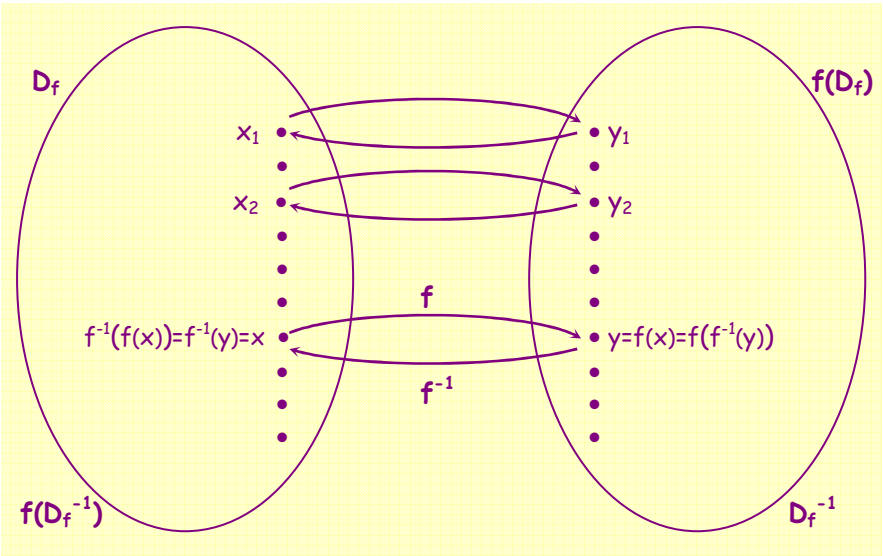




- είναι φανερό ότι μία οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης 1-1 σε ένα το πολύ σημείο!
- αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι 1-1

αν μία συνάρτηση $y = f(x)$ είναι 1 - 1 τότε ορίζεται η **αντίστροφή της συνάρτηση** (συμβ. f^{-1}) η οποία αντιστοιχίζει (επιστρέφει) κάθε $y \in f(A_f)$ στο $x \in A_f$ από το οποίο αντιστοιχήθηκε δηλαδή ισχύει:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



- αν $M(\alpha, \beta) \in c_f$ τότε $M'(\beta, \alpha) \in c_{f^{-1}}$ και αντιστρ.
  (γιατί: $\beta = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\beta)$)
  συνεπώς οι c_f και $c_{f^{-1}}$ είναι
  συμμετρικές
  ως προς την ευθεία y=x
- για να ορίσω την f^{-1}
  πρέπει να βρώ:
  i. το $A_{f^{-1}}$ που είναι το $f(A_f)$
  ii. τον τύπο της
  που τον βρίσκω λύνοντας
  (ως προς $x \in A_f$)
  την εξίσωση $y=f(x)$

για **παράδειγμα** ας δούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $A_f = [0, +\infty)$

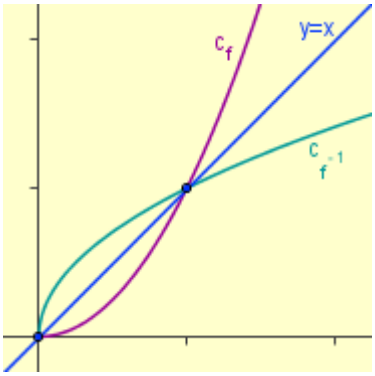
η f προφανώς είναι 1 - 1 (γι αυτό εξάλλου θεωρήσαμε $x \in [0,+\infty)$)
η εξίσωση $y = x^2$ έχει λύση ως προς $x \in A_f$ αν και μόνο αν: $y \geq 0$
τότε: $x = \sqrt{y}$

συνεπώς: $A_{f^{-1}} = f(A_f) = [0, +\infty)$ και $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ή αλλιώς: $f(x) = \sqrt{x}$

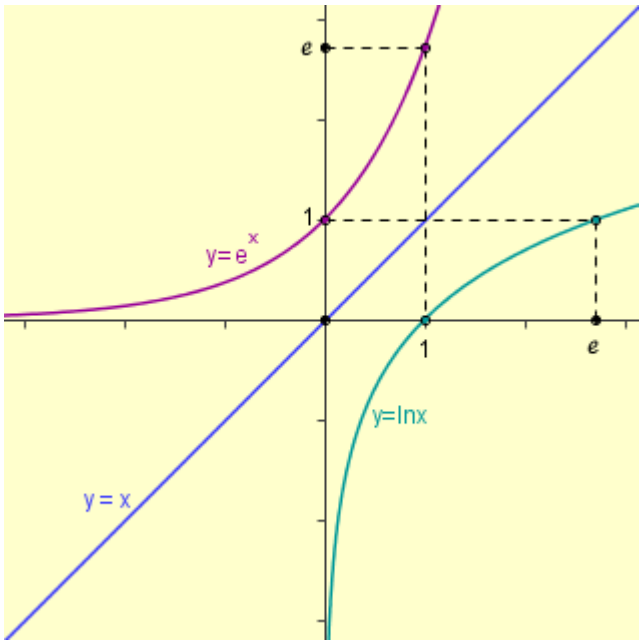
(βλέπεις οι μαθηματικοί επιμένουμε να συμβολίζουμε με x την αν. μεταβλητή!)

$\forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$ ισχύει: $(\alpha, \beta) \in c_f \Leftrightarrow \beta = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow (\beta, \alpha) \in c_f$

συνεπώς οι c_f και $c_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$



δύο αντίστροφες συναρτήσεις...



στα χρόνια τα παλιά...

χωρίς τη βοήθεια Η/Υ, την τιμή «αριθμητικών παραστάσεων λογιστών διά λογαρίθμων» δηλαδή παραστάσεων με «μόνες σημειούμενες πράξεις αυτές του πολλαπλασιασμού και της διαιρέσεως»

όπως για παράδειγμα την τιμή της παράστασης: $\frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}$, την υπολογίζαμε κάπως έτσι:

έστω $A = \frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}$ τότε: $\log A = \log 7^{\frac{1}{3}} - \log 2 - \log 5^{\frac{1}{6}}$

$$= \frac{1}{3}\log 7 - \log 2 - \frac{1}{6}\log 5$$

στους «πίνακες λογαρίθμων» δηλ. σε βιβλία που περιείχαν υπολογισμένους λογαρίθμους βρίσκαμε ότι $\log 7 \approx 0.845$, $\log 2 \approx 0.301$ και $\log 5 \approx 0.699$, οπότε:

$$\log A \approx -0.136$$

ανατρέχοντας και πάλι στους «πίνακες λογαρίθμων» βρίσκαμε ότι $-0.136 \approx \log 0.731$ δηλ. ότι:

$$\log A \approx \log 0.731$$

δηλ. ότι: $A \approx 0.731$

Θυμήσου τώρα πως η θαυμαστή επιστημονική επανάσταση συντελέστηκε πολύ πριν τη δεκαετία του 1940...

συγκλονίστηκες;

στην πράξη τώρα...

1► να βρεις τις τιμές του πραγματικού α για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1})^x$

i. είναι ορισμένη στο R ii. είναι γνησίως αύξουσα στο R iii. είναι γνησίως φθίνουσα στο R

▼ i. πρέπει $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha<2$

ii. πρέπει $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}>1 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (3-3\alpha)(2\alpha-1)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha<1$

iii. πρέπει $0<\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}<\alpha<2)$ και $\frac{3-3\alpha}{2\alpha-1}<0$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}<\alpha<2)$ και $(\alpha<\frac{1}{2}$ ή $\alpha>1)$

$\Leftrightarrow 1<\alpha<2$

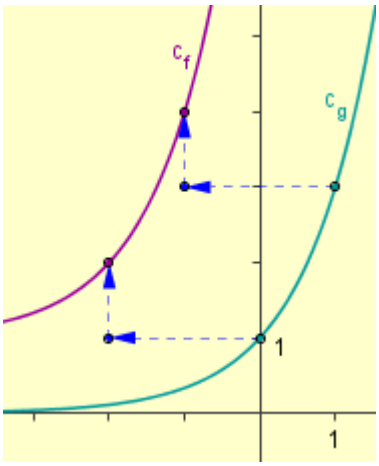
2► να παραστήσεις γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=3^{x+2}+1$

▼ αν $g(x)=3^x$

τότε $f(x)=g(x-(-2))+1$

συνεπώς η c_f είναι η c_g

μετακινημένη οριζόντια κατά – 2 και κατακόρυφα κατά 1



3► να λύσεις την εξίσωση: $3^{2x}+9^x=11\cdot4^{x-1}+4^{x+1}$

▼ $3^{2x}+9^x=11\cdot4^{x-1}+4^{x+1} \Leftrightarrow 2\cdot3^{2x}=\frac{11}{4}2^{2x}+4\cdot2^{2x}$

$\Leftrightarrow 2\cdot3^{2x}=\frac{27}{4}2^{2x}$

$\Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{2x}=(\frac{3}{2})^3 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

4► να λύσεις το σύστημα: $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot4^{4y-1} \\ 5\cdot5^{x-y}=5^{2y+1} \end{cases}$

▼

$$\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot4^{4y-1} \\ 5\cdot5^{x-y}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x+3}=2^{8y+3} \\ 5^{x-y+1}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3=8y+3 \\ x-y+1=2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

5► να λύσεις την ανίσωση: $4^x+2^{x+1}-3<0$

▼ $4^x+2^{x+1}-3<0 \Leftrightarrow (2^x)^2+2\cdot 2^x-3<0$

$\Leftrightarrow -3<2^x<1$

$\Leftrightarrow 2^x<2^0$ (αφού $\forall x\in R$: $2^x>0$, ισχύει: $-3<2^x$)

$\Leftrightarrow x<0$

6► ο αριθμός Q(t) μιας καλλιέργειας Q_o βακτηριδίων μετά από t ώρες δίνεται από τη σχέση: $Q(t)=Q_o e^{t/3}$. Μετά από πόσες περίπου ώρες αναμένεται να εικοσαπλασιαστεί ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων;

▼ $Q(t)=20Q_o \Leftrightarrow Q_o e^{t/3}=20Q_o$

$\Leftrightarrow e^{t/3}=20$

$\Leftrightarrow t/3=\ln 20$

$\Leftrightarrow t=3\ln 20 \approx 3\ln e^3=9$ ώρες $(e^3\approx 20)$

7► να αποδείξεις ότι: i. $\log_{\frac{1}{\alpha}}\theta=-\log_\alpha\theta$ ii. $\log_\alpha\theta=\dfrac{1}{\log_\theta\alpha}$ iii. $\log_{\alpha^\kappa}\theta^\kappa=\log_\alpha\theta$

(όπου α και θ τέτοιοι ώστε λογάριθμοι και κλάσματα νάναι καλά ορισμένα)

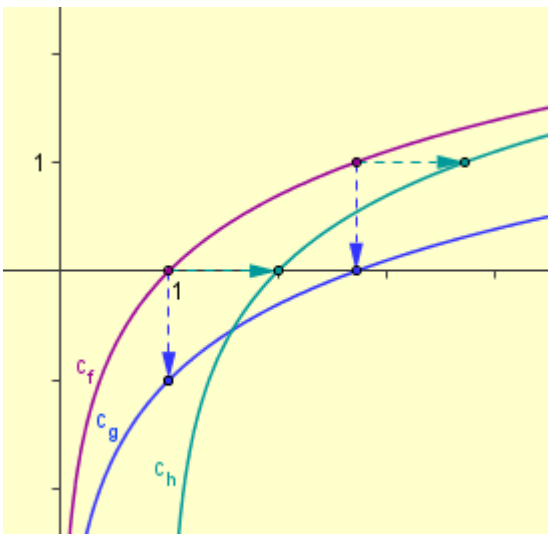
▼ i. $\log_{\frac{1}{\alpha}}\theta=\dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\alpha^{-1}}=\dfrac{\log_\alpha\theta}{-\log_\alpha\alpha}=-\log_\alpha\theta$

ii. $\log_\alpha\theta=\dfrac{\log_\theta\theta}{\log_\theta\alpha}=\dfrac{1}{\log_\theta\alpha}$

iii. $\log_{\alpha^\kappa}\theta^\kappa=\dfrac{\log_\alpha\theta^\kappa}{\log_\alpha\alpha^\kappa}=\dfrac{\kappa\log_\alpha\theta}{\kappa\log_\alpha\alpha}=\log_\alpha\theta$

8► να παραστήσεις γραφικά τις συναρτήσεις: $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln x-1$ και $h(x)=\ln(x-1)$

▼ είναι: $g(x)=f(x)-1$
συνεπώς η c_g είναι η c_f
μετακινημένη κατακόρυφα κατά −1
είναι: $h(x)=f(x-1)$
συνεπώς η c_h είναι η c_f
μετακινημένη οριζόντια κατά 1



9► έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλ. δρχ.) t έτη μετά την κυκλοφορία του στην αγορά. Η αρχική τιμή του ήταν 300000 δρχ., ενώ μετά 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει: $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$, $t \geq 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$

i. να δείξεις ότι: $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

ii. να βρεις σε πόσο χρόνο η τιμή θα γίνει ίση με το 1/16 της αρχικής τιμής

iii. να βρεις τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής

▼ i. $\begin{cases} \ln Q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \\ \ln Q(\frac{1}{2}) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \ln 3 \\ \ln(1.5) = \frac{\alpha}{2} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \ln 3 \\ \alpha = 2(\ln(1.5) - \ln 3) = 2\ln\frac{1.5}{3} = 2\ln 2^{-1} = \ln 4^{-1} \end{cases}$

είναι λοιπόν $\ln Q(t) = (\ln 4^{-1})t + \ln 3 = \ln 4^{-t} + \ln 3 = \ln 3 \cdot 4^{-t}$

άρα $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

αλλιώς: $\ln Q(t) = \alpha t + \beta \Leftrightarrow Q(t) = e^{\alpha t + \beta} = e^{\beta}(e^{\alpha})^t$

$\begin{cases} Q(0) = 3 \\ Q(1/2) = 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta} = 3 \\ e^{\beta}(e^{\alpha})^{1/2} = 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta} = 3 \\ (e^{\alpha})^{1/2} = 1.5/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta} = 3 \\ e^{\alpha} = (1/2)^2 = 1/4 = 4^{-1} \end{cases}$

άρα: $Q(t) = 3(4^{-1})^t = 3 \cdot 4^{-t}$

ii. $Q(t) = \frac{1}{16}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = \frac{1}{16} \cdot 3 \Leftrightarrow 4^{-t} = 4^{-2} \Leftrightarrow t = 2$

συνεπώς η τιμή θα γίνει ίση με το 1/16 της αρχικής μετά 2 έτη

iii. $Q(t) \leq \frac{1}{9}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{9} \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4^t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4^t \geq 9$

$\Leftrightarrow \ln 4^t \geq \ln 9$

$\Leftrightarrow t\ln 4 \geq \ln 9$

$\Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 9}{\ln 4} = \frac{\ln 3^2}{\ln 2^2} = \frac{2\ln 3}{2\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

συνεπώς ο ελάχιστος χρόνος για τον οποίο η τιμή δεν υπερβαίνει το 1/16 της αρχικής είναι $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ έτη (περίπου 1.5 έτη)

10► να αποδείξεις ότι για οποιουσδήποτε $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύει: $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \alpha^{\beta}\beta^{\alpha}$

▼ $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \alpha^{\beta}\beta^{\alpha} \Leftrightarrow \ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}) > \ln(\alpha^{\beta}\beta^{\alpha})$

$\Leftrightarrow \alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta > \beta\ln\alpha + \alpha\ln\beta$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\ln\alpha - \ln\beta) > 0$ (*)

η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς:

αν $\alpha > \beta$ είναι και $\ln\alpha > \ln\beta$ ενώ αν $\alpha < \beta$ είναι και $\ln\alpha < \ln\beta$

άρα η (*) ισχύει σε κάθε περίπτωση

11► να λύσεις τις εξισώσεις: i. $3^{x-1} = 2^{x+1}$ και ii. $\log(x-1) + \log x = 1 - \log 5$

▼ i. $3^{x-1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \ln 3^{x-1} = \ln 2^{x+1}$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3 = (x+1)\ln 2$

$\Leftrightarrow (\ln 3 - \ln 2)x = \ln 2 + \ln 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$

ii. η εξίσωση ορίζεται όταν $x-1>0$ και $x>0$ δηλαδή όταν $x>1$, τότε:

$\log(x-1) + \log x = 1 - \log 5 \Leftrightarrow \log(x-1) + \log x + \log 5 = 1$

$\Leftrightarrow \log 5x(x-1) = 1$

$\Leftrightarrow 5x(x-1) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ (η λύση $x = -1$ δεν είναι δεκτή αφού πρέπει $x>1$)

12► να λύσεις το σύστημα: $\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases}$

▼ το σύστημα ορίζεται όταν $x>0$ και $y>0$, τότε:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \log y^2 = \log 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \text{ (αφού } y>0) \end{cases}$$

13► i. να αποδείξεις ότι: $\alpha^{\log\beta} = \beta^{\log\alpha}$

ii. να λύσεις την εξίσωση: $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$

▼ i. $\alpha^{\log\beta} = \beta^{\log\alpha} \Leftrightarrow \log(\alpha^{\log\beta}) = \log(\beta^{\log\alpha})$

$\Leftrightarrow \log\beta\log\alpha = \log\alpha\log\beta$ που ισχύει

ii. η εξίσωση ορίζεται όταν $x>0$, τότε:

$5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5} \Leftrightarrow (5^{\log x})^2 = 5 + 4 \cdot 5^{\log x}$

$\Leftrightarrow (5^{\log x})^2 - 4 \cdot 5^{\log x} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5^{\log x} = 5$ ή $5^{\log x} = -1$ (αδύνατη αφού $5^{\log x} > 0$)

$\Leftrightarrow \log x = 1$

$\Leftrightarrow x = 10$

14► δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+3)$ και $g(x)=\ln 3+\ln(e^x-1)$

i. να βρεις τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$

ii. να λύσεις την εξίσωση: $f(x)=g(x)$

iii. να λύσεις την ανίσωση: $f(x)>2g(x)$

▼ i. $e^{2x}-2e^x+3>0 \Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+3>0$ που ισχύει $\forall x\in R$

γιατί το τριώνυμο $(e^x)^2-2e^x+3$ έχει $\Delta=-8<0$ και $a=1>0$, άρα $A_f=R$

$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα $A_g=(0,+\infty)$

ii. $\forall x\in(0,+\infty)$: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)=\ln 3(e^x-1)$

$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+3=3e^x-3$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-5e^x+6=0$

$\Leftrightarrow e^x=2$ ή $e^x=3$

$\Leftrightarrow x=\ln 2$ ή $x=\ln 3$

iii. $\forall x\in(0,+\infty)$: $f(x)>2g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)>2\ln 3(e^x-1)$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-2e^x+3)>\ln 9(e^x-1)^2$

$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+3>9e^{2x}-18e^x+9$

$\Leftrightarrow 8e^{2x}-16e^x+6<0$

$\Leftrightarrow 4(e^x)^2-8e^x+3<0$

$4(e^x)^2-8e^x+3=0 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{8\pm\sqrt{16}}{8}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\\ \text{ή}\\ \dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<e^x<\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{2}<x<\ln\dfrac{3}{2}$

και επειδή $x>0$, είναι $0<x<\ln\dfrac{3}{2}$ (αφού $\ln\dfrac{1}{2}<0$)

15► να λύσεις τις ανισώσεις: i. $\log x^2>\log^2 x$ και ii. $\ln^2 x-\ln x<0$

▼ i. η ανίσωση ορίζεται όταν $x^2>0$ και $x>0$ δηλαδή όταν $x>0$, τότε:

$\log x^2>\log^2 x \Leftrightarrow 2\log x>\log^2 x$

$\Leftrightarrow \log x(\log x-2)<0$

$\Leftrightarrow 0<\log x<2$

$\Leftrightarrow 1<x<100$

ii. η ανίσωση ορίζεται όταν $x>0$, τότε:

$\ln^2 x-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)<0$

$\Leftrightarrow 0<\ln x<1$

$\Leftrightarrow 1<x<e$

σειρά σου τώρα...

1. για ποιες τιμές του λ $(\in R)$ είναι ορισμένη σε όλο το R η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - \lambda x + 2)^x$;

2. δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\frac{\alpha - 1}{5})^x$

i. να βρεις τις τιμές του πραγματικού α για τις οποίες η f ορίζεται σε όλο το R
ii. να βρεις τις τιμές του πραγματικού α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα
iii. αν α = 11, να λύσεις την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$

3. δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\frac{\alpha - 3}{\alpha + 2})^x$. Να βρεις τις τιμές του α $(\in R)$ για τις οποίες η f:

i. ορίζεται σε όλο το R
ii. είναι γνησίως φθίνουσα
iii. είναι σταθερή στο R

4. να μελετήσεις τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 1 - e^x$, $x \in R$ και να κάνεις τη γραφική της παράσταση

5. i. να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $f(x) = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x$ είναι γνησίως φθίνουσα

ii. να αποδείξεις ότι η μόνη λύση της εξίσωσης $3^x + 4^x = 5^x$ είναι η προφανής (x = 2)

6. να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-2(\frac{1}{5})^{2x} + 3(\frac{1}{5})^x - 1}$

7. αν $0 < \alpha \neq 1$, να βρεις τον θετικό ακέραιο ν για τον οποίο ισχύει:
$1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^\nu = (\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)$

8. να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης:

$$A = \log\sqrt{2} + \log\sqrt{2+\sqrt{2}} + \log\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

9. η ένταση του ηλιακού φωτός αφού περάσει από ένα κρύσταλλο πάχους x mm είναι:
$I(x) = I_o e^{-0.02x}$, όπου I_o η έντασή του πριν περάσει το κρύσταλλο.
Ποιο είναι το ελάχιστο πάχος κρυστάλλου που χρειαζόμαστε ώστε η ένταση να μειωθεί κατά 20% τουλάχιστον;

(δίνονται: ln2≈0.70 ln3≈1.10 ln5≈1.60 ln7≈1.95 ln11≈2.40)

10. ένα ραδιενεργό υλικό έχει χρόνο ημιζωής 4 λεπτά.
Οκτώ λεπτά μετά την έναρξη ενός πειράματος μετρήθηκαν 125mgr του υλικού αυτού.
Να υπολογίσεις την ποσότητα του υλικού κατά την έναρξη του πειράματος

11. να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης: $A = (\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)$

12. αν ισχύει: $\frac{\log\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\log\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$, να αποδείξεις ότι: $\alpha^\alpha\,\beta^\beta\,\gamma^\gamma = 1$

13. να λύσεις τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $2^{3x+1} + 12 = 2^{x+1} + 3\cdot 2^{x+2}$

ii. $3\cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} - 5^{x-2} + 6\cdot 5^{x-3} = 0$

iii. $3(\frac{3}{2})^x + 2(\frac{2}{3})^x = 5$

iv. $(x^2)^{1+\log x^4} = 10$

v. $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$

vi. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$

vii. $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

viii. $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

ix. $\log(\log x) = 0$

x. $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

14. να λύσεις τις ακόλουθες ανισώσεις:

i. $16^{x-\frac{1}{2}} - 5\cdot 4^{x-1} + 1 > 0$

ii. $\frac{4^x - 4}{3^x - 1} \geq 0$

iii. $e^{2x} - e(e^x - 1) - e^x < 0$

iv. $(0.4)^{1+\log^2 x} \leq (6.25)^{2-\log x^3}$

v. $\ln(x^2 - 10) - \ln(x-2) > \ln 3$

vi. $\log(2^x + 2\cdot 3^x) + \log 81 > \log 3^x + \log 178$

15. να λύσεις τα ακόλουθα συστήματα:

i. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 3^x = 4^y + 77 \\ \sqrt{3^x} = 2^y + 7 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2^x 3^y = 54 \\ 3^x 2^y = 24 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} x^{\log y} = 4 \\ xy = 40 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \log\sqrt{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$

vi. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

16. να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη

17. να παραστήσεις γραφικά τις ακόλουθες συναρτήσεις:

i. $f(x) = e^{|x|}$ ii. $f(x) = \ln|x|$ και iii. $f(x) = |\ln x|$

18. έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να αποδείξεις ότι:

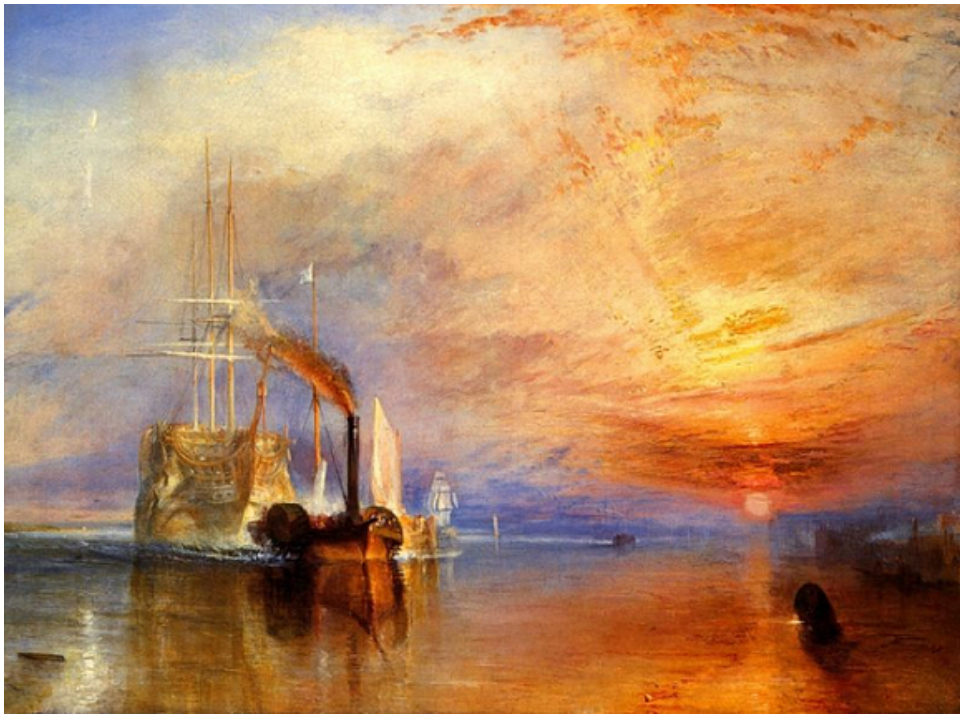
i. πεδίο ορισμού της f είναι το R
ii. η f είναι 1 - 1
iii. η f είναι περιττή

19. δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5})$

i. να βρεις τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας y = ln4
ii. να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

20. δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

i. να βρεις τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x)
ii. να λύσεις την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
iii. να λύσεις την ανίσωση: $f(x) > 2g(x)$



The Fighting Téméraire tugged to her last Berth to be broken(1838) J.M.W. Turner(1775-1851)