Θέματα γενικών εξετάσεων 2000

Θέμα 1ο

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$.
(4μ.)

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
(8.5μ.)

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
(4.5μ.)

α. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_o.

β. αν η f δεν είναι συνεχής στο xo, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

γ. αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_o, τότε η f' είναι συνεχής στο x_o.

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_o.
(8μ.)

στήλη Α συναρτήσεις		στήλη Β εφαπτομένες
α. $f(x) = 3x^3$	$, x_o = 1$	**1.** $y = -2x + \pi$
β. $f(x) = ημ2x$	$, x_o = \frac{\pi}{2}$	**2.** $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3\|x\|$	$, x_o = 0$	**3.** $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}$	$, x_o = 4$	**4.** $y = -9x + 5$
		5. δεν υπάρχει

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Β1. **α** Λάθος **β** Λάθος **γ** Σωστό

Β2. **α 3** **β 1** **γ 5** **δ 2**

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{2z+i}{\bar{z}-2i}$, $z\in C$ με $z\neq -2i$.

Α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών: $w_1=f(9-5i)$, $w_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right)^{2004}$

(12μ.)

Β. Θεωρούμε τον πίνακα $M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}|w_1| & 0\\ 0 & -|w_2|\end{bmatrix}$ όπου w_1 ο μιγαδικός του ερωτήματος **Α**.

(5μ.) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση :
Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\pi/4$
β. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$
γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$
δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$
ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda=\sqrt{2}/3$

Γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος **Β**, να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει: $M\bullet X=K$,
(8μ.) όπου Κ είναι ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού στροφής με κέντρο $O(0,0)$ και γωνία $\theta=\pi/2$

απαντήσεις

Α. $w_1=f(9-5i)$

$$=\frac{18-9i}{9+3i}=\frac{3(2-i)}{3+i}=\frac{3(2-i)(3-i)}{3^2+1^2}=\frac{3(5-5i)}{10}=\frac{3(1-i)}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$w_2=\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2004}=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2004\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{2004\pi}{4}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu(-500\pi-\pi)+i\eta\mu(-500\pi-\pi)=\sigma\upsilon\nu(-\pi)+i\eta\mu(-\pi)$$

Β. **β.**

Γ. είναι: $M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}\dfrac{3\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ με $M^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και: $K=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

συνεπώς: $M\bullet X=K\Leftrightarrow X=M^{-1}\cdot K=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$.
Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

Α. η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη c_f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,1)$.
(7μ.)

Β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιος ώστε: $f(x_1) = \dfrac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$.
(12μ.)

Γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη τα c_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.
(6μ.)

απαντήσεις

Α. αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς τα $x_o \in (0,1)$ τέτοιος ώστε : $f(x_o) = 3$, πραγματικά:
η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως παραγωγίσιμη) και $f(0) = 2 < 3 < 4 = f(1)$
σύμφωνα λοιπόν με το Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_o \in (0,1)$: $f(x_o) = 3$
κι επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,1)$
η f είναι γν. αύξουσα στο $[0,1]$ συνεπώς ο x_o είναι μοναδικός

Β. $1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \in (0,1)$ άρα αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $[0,1]$ ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) < f(1/5) < f(1) \\ f(0) < f(2/5) < f(1) \\ f(0) < f(3/5) < f(1) \\ f(0) < f(4/5) < f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4f(0) < f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5) < 4f(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(0) < \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4} < f(1)$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σύμφωνα με το Θ. ενδιαμέσων τιμών
υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε: $f(x_1) = \dfrac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$

Γ. η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[0,1]$
συνεπώς σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{\varepsilon\varphi M} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{\varepsilon\varphi M} = \lambda_\varepsilon, \ \text{ όπου } (\varepsilon)\text{: } y = 2x + 2000$$

δηλ. η εφαπτομένη στο $M(x_2, f(x_2))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x + 2000$

Θέμα 4ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο.
Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:
$f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + (t/\beta)^2}$, $t \geq 0$ όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.
(15μ.)

Β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης
(10μ.) είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

απαντήσεις

Α. $\forall t \in [0, +\infty)$: $f'(t) = \dfrac{\alpha(1+\frac{t^2}{\beta^2}) - \alpha t 2\frac{t}{\beta^2}}{(1+\frac{t^2}{\beta^2})^2} = \dfrac{\alpha - \frac{\alpha t^2}{\beta^2}}{(1+\frac{t^2}{\beta^2})^2}$.

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 6 και έχει στο 6 ακρότατο (το $f(6) = 15$)
σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι: $f'(6) = 0$

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \dfrac{\alpha - \frac{36\alpha}{\beta^2}}{(1+\frac{36}{\beta^2})^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha(1 - \frac{36}{\beta^2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ 1 - \frac{36}{\beta^2} = 0 \quad (\text{αφού } \alpha > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ B = 6 \quad (\text{αφού } \beta > 0) \end{cases}$$

Β. $f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \dfrac{5t}{1+\frac{t^2}{36}} \geq 12 \Leftrightarrow 5t \geq 12 + \dfrac{t^2}{3} \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$

συνεπώς το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από την $3^η$ μέχρι και τη $12^η$ ώρα από τη χορήγησή του

Θέματα γενικών εξετάσεων 2001

Θέμα 1°

Α1. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1 και z_2. Να αποδείξετε ότι : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
(7.5μ.)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη
(5μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει :

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ **β.** $|z^2| = z^2$ **γ.** $|z| = -|\bar{z}|$ **δ.** $|z| = |\bar{z}|$ **ε.** $|i\bar{z}| = |z|$

Β1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της στήλης Α
(7.5μ.) και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της στήλης Β έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

στήλη Α	στήλη Β
1. $\lvert z_1 z_2\rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2\rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2\rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert\bar{z}_1\rvert$	**δ.** -5
5. $\lvert iz_2\rvert$	**ε.** -2
	στ. 5
	ζ. 10

Β2. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|z| = 1$, να δείξετε ότι: $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
(5μ.)

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. **α** Σωστό **β** Λάθος **γ** Λάθος **δ** Σωστό **ε** Σωστό

Β1. **1 ζ** **2 γ** **3 α** **4 δ** **5 β**

Β2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

Θέμα 2°

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} ax^2 & , x \leq 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$

Α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: $α = -1/9$.
(9μ.)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο σημείο $A(4, f(4))$.
(7μ.)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη c_f, τον άξονα $x΄x$ και τις
(9μ.) ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

απαντήσεις

Α. αφού η f είναι συνεχής στο 3, ισχύει: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

δηλ.: $9α = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} = 9α$

κι επειδή: $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+} (-e^{x-3}) = -1$

είναι: $9α = -1$

άρα: $α = -1/9$

Β. (εφ): $y - f(4) = f΄(4)(x-4)$ (1)

για κάθε $x > 3$ είναι: $f΄(x) = \dfrac{(1-e^{x-3})'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{-e^{x-3}(x-3)-1+e^{x-3}}{(x-3)^2}$

οπότε: $(1) \Leftrightarrow y-(1-e) = -1(x-4)$

$\Leftrightarrow y = -x+5-e.$

Γ. αφού η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ είναι:

$E = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 |α|x^2\,dx = [\,|α|\dfrac{x^3}{3}\,]_1^2 = \dfrac{8|α|}{3} - \dfrac{|α|}{3} = \dfrac{7|α|}{3}$ τ.μ.

Θέμα 3ο

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο R, ισχύει:
$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x) = x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in R$, όπου $\beta,\gamma\in R$ με $\beta^2<3\gamma$.

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
(10μ.)

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
(8μ.)

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,1)$
(7μ.)

απαντήσεις

Α. αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R, οι θέσεις των ακροτάτων της, σύμφωνα με το Θ. Fermat, θα είναι ρίζες της f΄, αλλά $\forall x\in R$:

$$(f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x))' = (x^3-2x^2+6x-1)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2\beta f(x)f'(x)+\gamma f'(x) = 3x^2-4x+6$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(\,3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\,) = 3x^2-4x+6>0 \quad (1)$$

(γιατί: $\Delta=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 6<0$ και $3>0$)

συνεπώς $\forall x\in R$: $f'(x)\neq 0$, άρα η f δεν έχει ακρότατα.

Β. το τριώνυμο $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ είναι θετικό $\forall x\in R$
γιατί: $3>0$ και $\Delta=(2\beta)^2-4\bullet 3\cdot\gamma = 4(\beta^2-3\gamma)<0$

από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\forall x\in R$: $f'(x)>0$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα

Γ. $\forall x\in R$: $f(x)(f^2(x)+\beta f(x)+\gamma) = x^3-2x^2+6x-1 \Rightarrow \begin{cases} \text{(για } x=0\text{)}: & f(0)(\,f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\,) = -1<0 \quad (2) \\ \text{(για } x=1\text{)}: & f(1)(\,f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\,) = 4>0 \quad (3) \end{cases}$

το τριώνυμο $f^2(x)+\beta f(x)+\gamma$ έχει: $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$ (αφού $\beta^2<3\gamma<4\gamma$) και $1>0$

συνεπώς $\forall x\in R$: $f^2(x)+\beta f(x)+\gamma>0$

από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι: $f(0)<0$ και $f(1)>0$

κι επειδή η f είναι και συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[0,1]$, σύμφωνα με το Θ. Bolzano:

η f έχει ρίζα στο $(0,1)$ και μάλιστα μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

Θέμα 4°

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο R, για την οποία $\forall x\in R$:

ισχύουν οι σχέσεις: i. $f(x)\neq 0$ και ii. $f(x) = 1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, $\forall x\in R$.

Α. Να δείξετε ότι ισχύει: $f'(x) = -2xf^2(x)$.
(10μ.)

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.
(4μ.)

Γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = 1/1+x^2$.
(4μ.)

Δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$.
(7μ.)

απαντήσεις

Α. $\forall x\in R$: $f(x) = 1-\int_0^1 2x^2\,t\,f^2(xt)\,dt$

Θέτω $u=xt = \begin{cases} x \ (\text{για } t=1) \\ 0 \ (\text{για } t=0)\end{cases}$ $= 1-\int_0^x 2uf^2(u)\,du$

οπότε: du=xdt

συνεπώς: $f'(x) = -2xf^2(x)$
(αφού η συνάρτηση με τύπο $2uf^2(u)$ είναι συνεχής)

Β. $\forall x\in R$: $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\dfrac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 0$, άρα η g είναι σταθερή

Γ. είναι: $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$ κι αφού η g είναι σταθερή, είναι $\forall x\in R$:

$g(x) = 1$ δηλαδή: $\dfrac{1}{f(x)} - x^2 = 1$ άρα: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

αλλιώς:

$\forall x\in R$: $f'(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = (x^2)' \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} = x^2 + c$ $(c\in R)$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+c}$ αλλά: $f(0) = \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow c = 1$, άρα: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Δ. $\forall x\in(0,+\infty)$: $|xf(x)\eta\mu 2x| = \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right||\eta\mu 2x| \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

δηλ.: $-\dfrac{x}{x^2+1} \leq xf(x)\eta\mu 2x \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

και: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0$

σύμφωνα με το «κριτήριο παρεμβολής» είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x) = 0$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2002

Θέμα 1°

Α. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.
(12μ.)

Β1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ημx$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει: $f\,'(x) = συνx$.
(8μ.)

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
(5μ.)

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_o και $\lim_{x \to x_o} |f(x)| = 0$, τότε: $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε: $\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf\,'(x)\,dx$.

ε. Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β1. Θεωρία

Β2. **α** Λάθος **β** Λάθος **γ** Σωστό **δ** Σωστό **ε** Σωστό

Θέμα 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu}z$, $\nu \in N^*$.

Α. Να δείξετε ότι: $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.
(7μ.)

Β. Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι: $f(13) = \rho[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)]$.
(8μ.)

Γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του
(10μ.) μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών: 0, z και f(13).

απαντήσεις

Α. $f(3) = i^3z = -iz$

$f(8) = i^8z = (i^4)^2z = 1^2z = z$

$f(13) = i^{13}z = (i^4)^3iz = 1^3iz = iz$

$f(18) = i^{18}z = (i^4)^4i^2z = 1^4(-1)z = -z$

συνεπώς: $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$

Β. $f(13) = iz = (\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2})\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho[\ \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)\ ]$

Γ. αν Ο, Α, Β είναι οι εικόνες των 0, z, iz (αφού: $f(13) = iz$) αντιστοίχως τότε είναι: $A\hat{O}B = 90^0$

(αφού ο πολλαπλασιασμός του z με τον i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά $\frac{\pi}{2}$)

συνεπώς: $E_{AOB} = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}|z|\,|iz| = \frac{1}{2}|z|\,|i|\,|z| = \frac{1}{2}2\bullet1\bullet2 = 2$τ.μ.

<u>αλλιώς:</u> $z = 2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

$f(13) = 2[\ \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})\ ] = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$

οι εικόνες των μιγαδικών 0, z και f(13) είναι τα σημεία: $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}, 1)$

$E_{AOB} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right|$ = ... καλό ταξίδι (κατά τα γνωστά από τη Β΄Λυκείου)

<u>σχόλιο:</u> το δεδομένο $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ ήταν η τιμωρία του συστήματος στους «αρίστους»

που επέλεξαν τον ευφυή 1ο τρόπο λύσης !

Θέμα 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση fog είναι 1-1.

Α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
(7μ.)

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και
(18μ.) μία αρνητική ρίζα.

απαντήσεις

Α. $\forall x_1,x_2\in R$: $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2)) \Leftrightarrow x_1=x_2$ (γιατί η fog είναι 1-1) άρα η g είναι 1-1

Β. $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1) \Leftrightarrow f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1$ (αφού η g είναι 1-1) $\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει ακριβώς 1 αρνητική και 2 θετικές ρίζες η συνάρτηση:
$h(x)=x^3-3x+1\ ,\ x\in R$
$\forall x\in R$: $h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		0	1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-		0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	3	↘		-1	↗	$+\infty$

$h((-\infty,-1])=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(-1)\,]=(-\infty,3]$
κι επειδή $0\in(-\infty,3]$ η h έχει ρίζα στο $(-\infty,-1]$ και μάλιστα μοναδική (αφού είναι γν. αύξουσα)

$h([-1,1])=[h(1),h(-1)]=[-1,3]$
κι επειδή $0\in[-1,3]$ η h έχει ρίζα στο $[-1,1]$ και μάλιστα μοναδική (αφού είναι γν.φθίνουσα)

* η ρίζα αυτή ανήκει (σύμφωνα με το Θ. Bolzano) στο $(0,1)$ αφού:
η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως παραγωγίσιμη) και $h(0)h(1)=1(-1)=-1<0$

$h([1,+\infty))=[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))=[-1,+\infty)$
κι επειδή $0\in[-1,+\infty)$ η h έχει ρίζα στο $[1,+\infty)$ και μάλιστα μοναδική (αφού είναι γν. αύξουσα)

άρα η h έχει ακριβώς 1 αρνητική και 2 θετικές ρίζες

Θέμα 4°

Α. Έστω δύο συναρτήσεις h,g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν $\forall x\in[\alpha,\beta]$: $h(x)>g(x)$

(2μ.) τότε είναι και: $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)} = x-1,\ x\in R \quad \text{και} \quad f(0)=0.$$

Β1. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.
(5μ.)

Β2. Να δείξετε ότι: $x/2 < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x>0$.
(12μ.)

Β3. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη c_f, τον άξονα x΄x και τις
(6μ.) ευθείες x = 0 και x = 1, να δείξετε ότι: $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

απαντήσεις

Α. $\forall x\in[\alpha,\beta]: h(x)-g(x)>0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta [h(x)-g(x)]dx>0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Β1. $\forall x\in R$: $(f(x)-e^{-f(x)})' = (x-1)' \Leftrightarrow f'(x)-(-f'(x))e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1+e^{-f(x)})=1$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} = \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$$

Β2. $\forall x\in(0,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο [0, x] άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει $\xi\in(0,x)$: $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δηλ. $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$

$\forall x\in R: f''(x) = \ldots = \frac{e^{f(x)}f'(x)}{[1+e^{f(x)}]^2} > 0$

συνεπώς η f' είναι γν. αύξουσα

$0<\xi<x \Rightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$ αφού η f' είναι γν. αύξουσα

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

αλλιώς: αρκεί να δείξουμε ότι: $x/2<f(x)$ και $f(x)< xf'(x)$
δηλ. ότι: $2f(x)-x>0$ και $f(x)-xf'(x)<0$
Θεωρούμε λοιπόν τις συναρτήσεις: $q(x)=2f(x)-x$ και $s(x)=f(x)-xf'(x)$
μελετούμε τη μονοτονία τους στο $[0,+\infty)$ κ.λ.π.

Β3. από τα **Α** και **Β2** έχουμε:

$$\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1)-E$$

δηλαδή: $\frac{1}{4} < E$ και $2E<f(1)$

συνεπώς: $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2003

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (8μ.)

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; (7μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. (10μ.)

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του τότε ισχύει: $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in R$$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $f'(x_o) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_o.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α** Σωστό **β** Σωστό **γ** Σωστό **δ** Λάθος **ε** Λάθος

Θέμα 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha,\beta \in R$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$ όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z

Α. Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$
(6μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με
(9μ.) εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$

Γ. Να βρείτε ποιος από της μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην
(10μ.) ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο

απαντήσεις

Α. $w = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - i\alpha + \beta i^2 + 4 = 3\alpha - \beta + 4 + (3\beta - \alpha)i$

συνεπώς: $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$

Β. αφού οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$

είναι: $3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow 4\beta = 4\alpha - 8 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$

συνεπώς οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$

Γ. αφού $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας του z από το $O(0,0)$, ζητάμε το σημείο της $y = x - 2$

που απέχει λιγότερο από το $O(0,0)$ δηλ. το ίχνος της κάθετης από το $O(0,0)$ στην $y = x - 2$

η κάθετη από το $O(0,0)$ στην $y = x - 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 συνεπώς είναι η $y = -x$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$ άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = 1 - i$

<u>*αλλιώς:*</u>

είναι: $z = \alpha + (\alpha - 2)i$ και $|z| = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 2)^2} = \sqrt{2\alpha^2 - 4\alpha + 4}$

το $|z|$ είναι ελάχιστο όταν το τριώνυμο $2\alpha^2 - 4\alpha + 4$ έχει ελάχιστο δηλ. όταν: $\alpha = -\dfrac{-4}{2\cdot 2} = 1$

άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = 1 - i$

Θέμα 3°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. (6μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in R$. (6μ.)

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. (5μ.)

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3. (8μ.)

απαντήσεις

Α. $\forall x \in R$: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, συνεπώς είναι και «1-1» και επομένως έχει αντίστροφη συνάρτηση

$\forall x \in R$: $f''(x) = 20x^3 + 6x = x(20x^2+6)$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ενώ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$,

συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και πάνω στο $[0, +\infty)$.

Β. $\forall x \in R$: $f(e^x) \geq f(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq 1+x$ (αφού η f είναι γνησίως αύξουσα) $\Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

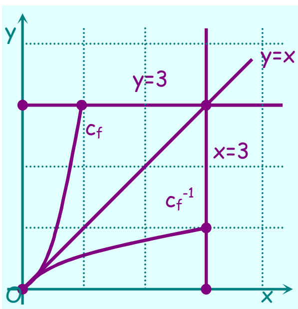
Έστω $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in R$ $\forall x \in R$: $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	min $g(0)=0$	↗	

άρα $\forall x \in R$: $e^x - x - 1 \geq 0$

Γ. η εφαπτομένη της c_f στο (0,0) είναι η (εφ): $y - 0 = f'(0)(x - 0)$ δηλ. η (εφ): $y = x$ που ως γνωστό είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}

Δ. $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) = 0$, ζητάμε λοιπόν το εμβαδόν μεταξύ των: $c_{f^{-1}}$, x΄x, x=0 και x=3



συνεπώς (λόγω της συμμετρίας ως προς την y=x)

ζητάμε τελικά το εμβαδόν μεταξύ των: c_f, y΄y, y=0 και y=3

$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1$ (ρίζα προφανής και μοναδική αφού η f «1-1»)

$f(x) < 3 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$

συνεπώς: $E = \int_0^1 |3 - f(x)|\, dx = \int_0^1 (-x^5 - x^3 - x + 3)\, dx$

$$= \left[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

αλλιώς: $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) = 0$, ζητάμε λοιπόν το εμβαδόν μεταξύ των: $c_{f^{-1}}$, x΄x, x=0 και x=3

άρα: $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)|\, dx$

Θέτω $u = f^{-1}(x)$
οπότε $x = f(u)$
$dx = f'(u)du$
για x=0: $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
για x=3: $f(u) = 3 \Leftrightarrow u = 1$

$$= \int_0^1 u |f'(u)|\, du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u)\, du$$

$$= \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 4°

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

Α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).
(8μ.)

Β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
(9μ.)

Γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.
(8μ.)

απαντήσεις

η περίπτωση $\gamma = \delta$ αποκλείεται αφού $f(\gamma)f(\delta) < 0$, έστω $\gamma < \delta$ (ομοίως αν $\gamma > \delta$)

Α. η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subset (\alpha, \beta)$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano η $f(x) = 0$ έχει στο (γ, δ) συνεπώς και στο (α, β) μία τουλάχιστον ρίζα

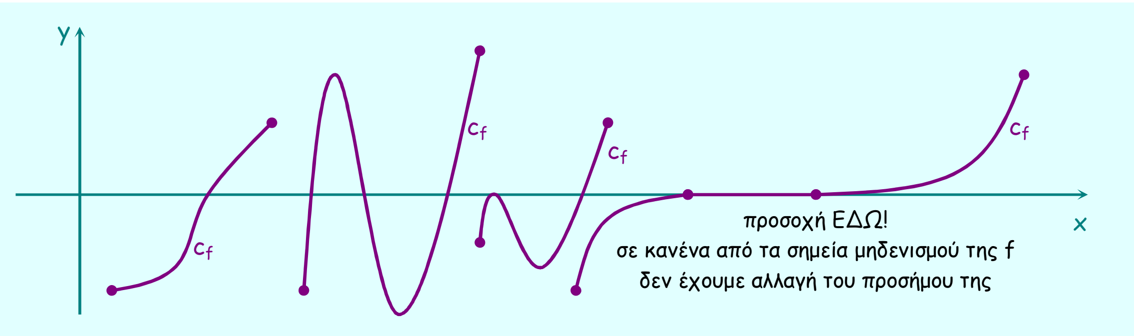
Β. έστω $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ (ομοίως αν $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$)
η f είναι συνεχής στα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \delta]$, $[\delta, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α, γ), (γ, δ), (δ, β)
συνεπώς σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού
υπάρχουν $\kappa \in (\alpha, \gamma)$, $\lambda \in (\gamma, \delta)$, $\mu \in (\delta, \beta)$ τέτοιοι ώστε:

$$f'(\kappa) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0, \quad f'(\lambda) = \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} < 0 \quad \text{και} \quad f'(\mu) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} > 0$$

η f' είναι συνεχής στα $[\kappa, \lambda]$, $[\lambda, \mu]$ και παραγωγίσιμη στα (κ, λ), (λ, μ)
συνεπώς σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού
υπάρχουν $\xi_1 \in (\kappa, \lambda)$ και $\xi_2 \in (\lambda, \mu)$ τέτοιοι ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\lambda) - f'(\kappa)}{\lambda - \kappa} < 0 \quad \text{και} \quad f''(\xi_2) = \frac{f'(\mu) - f'(\lambda)}{\mu - \lambda} > 0$$

Γ. με βάση τα δεδομένα το ζητούμενο δεν αποδεικνύεται, συνεπώς το θέμα είναι ΛΑΘΟΣ και αυτό συνέβη γιατί ο θεματοδότης θεώρησε βεβαία την αλλαγή προσήμου σε κάποιο από τα σημεία μηδενισμού μιας συνάρτησης ! (στην περίπτωσή μας της f'') κάτι που όμως δεν ισχύει όπως ο οποιοσδήποτε μπορεί να δει:



η απάντηση του τότε Υπουργού Εθνικής Παιδείας & Θρησκευμάτων
και της διοπτροφόρου Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εξακολουθεί να αναμένεται!

Θέματα γενικών εξετάσεων 2004

Θέμα 1°

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ.
(10μ.) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_o) = 0$

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;
(5μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό της τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων της.

β. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = l$

γ. αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f \cdot g)'x_o) = f'(x_o)g'(x_o)$

δ. έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ε. έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α** Σωστό **β** Σωστό **γ** Λάθος **δ** Λάθος **ε** Σωστό

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

Α. να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε τη μονοτονία της και να (10μ.) βρείτε τα ακρότατά της.

Β. να μελετήσετε την f ως της την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (8μ.)

Γ. να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (7μ.)

απαντήσεις

Α. $A_f = (0,+\infty)$

$\forall x \in (0,+\infty)$: $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-1/2}$

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	min $f(1/\sqrt{e})$ $= -1/2e$	↗	

Β. $\forall x \in (0,+\infty)$: $f''(x) = 2\ln x + 2x\dfrac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3/2 \Leftrightarrow x = e^{-3/2} = 1/e\sqrt{e}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -3/2 \Leftrightarrow x > e^{-3/2}$

x	0		$1/e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\cap$	σ.κ. $(1/e\sqrt{e}, f(1/e\sqrt{e}))$ $= (1/e\sqrt{e}, -3/2e^3)$	$\cup$	

Γ. $f(A_f) = f(\,(0, e^{-1/2}]\,) \cup f(\,[e^{-1/2}, +\infty)\,)$

$= [\,f(e^{-1/2}), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\,) \cup [f(e^{-1/2}), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$ (λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της f)

$= [-1/2e, \lim\limits_{x\to 0} f(x)\,) \cup [-1/2e, +\infty)$ (αφού: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$)

$= [-1/2e, +\infty)$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0) = f(3/2) = 0$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, 3/2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

(8μ.)

Β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)dx$, $\alpha \in R$

(8μ.)

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$

(9μ.)

απαντήσεις

Α. αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 3/2]$ με $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$
και $g(0) = g(3/2) = 0$
σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 3/2)$: $g'(\xi) = 0$ δηλ. $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ (αφού $e^\xi \neq 0$)
δηλ. υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 3/2)$ τέτοιος ώστε: $f'(\xi) = -f(\xi)$

Β.
$$I(\alpha) = \int_\alpha^0 e^x(2x^2 - 3x)dx = \int_\alpha^0 (e^x)'(2x^2 - 3x)dx = [e^x(2x^2 - 3x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x(4x - 3)dx$$
$$= [e^x(2x^2 - 3x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 (e^x)'(4x - 3)dx$$
$$= [e^x(2x^2 - 3x)]_\alpha^0 - \left([e^x(4x - 3)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 4e^x dx\right)$$
$$= [e^x(2x^2 - 3x)]_\alpha^0 - [e^x(4x - 3)]_\alpha^0 + [4e^x]_\alpha^0$$
$$\ldots = (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^\alpha + 7$$

Γ. αφού:
$$\lim_{\alpha \to -\infty} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^\alpha = \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)'}{(e^{-\alpha})'}$$
$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-\alpha e^{-\alpha}}$$
$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-\alpha} \lim_{\alpha \to -\infty} e^\alpha$$
$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{-4\alpha}{-\alpha} \cdot 0 = 4 \cdot 0 = 0$$

είναι: $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^\alpha + \lim\limits_{\alpha \to -\infty} 7 = 0 + 7 = 7$

Θέμα 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$.

Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει $g(x)= \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$, όπου $z = \alpha + \beta i \in C$ με $\alpha, \beta \in R^*$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την g'.
(5μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$
(8μ.)

Γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος Β να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -1/2$
(6μ.)

Δ. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι
(6μ.) υπάρχει $x_o \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$.

απαντήσεις

Α. αφού η f συνεχής στο R, η συνάρτηση $\int_1^{x} |z| f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R κι επειδή

η συνάρτηση x^3 είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική, η συνάρτηση $\int_1^{x^3} |z| f(t)dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων κι αφού η συνάρτηση

$\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική

η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων με:

$g'(x) = 3x^2|z|f(x^3) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$

Β. αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $g(x) \geq 0 = g(1)$ $\forall x \in R$, δηλ. η g έχει ελάχιστο στο 1

σύμφωνα με το Θ. Fermat είναι: $g'(1)=0$ δηλ. $3|z| - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| = 0$ δηλ. $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

Γ. $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = (z + \frac{1}{z})(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}) \Leftrightarrow \ldots\ \bar{z}^2 + z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta i)^2 + (\alpha + \beta i)^2 + 1 = 0$

$\ldots \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -1/2$

αλλά $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$, συνεπώς: $Re(z^2) = -1/2$

Δ. $\alpha^2 - \beta^2 = -1/2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0$ (αφού $\alpha - \beta > 0$)

$\Leftrightarrow \beta < -\alpha < 0$ (αφού $\alpha > 0$)

επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(2)f(3) = \alpha\beta < 0$

σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_o \in (2, 3)$ τέτοιος ώστε: $f(x_o) = 0$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2005

Θέμα 1°

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν
(9μ.)
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_o) = \eta$.

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f
(4μ.) στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(12μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o}(f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$.

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_o, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

απαντήσεις

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Β. **α** Λάθος **β** Λάθος **γ** Σωστό **δ** Σωστό **ε** Λάθος **στ** Σωστό

Θέμα 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

Α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$.

(7μ.)

Β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

(9μ.)

Γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

(9μ.)

απαντήσεις

Α. $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 9 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

Β. $\overline{\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \dfrac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \dfrac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_2}$ άρα ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Γ.
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + z_3| &= \left|\frac{9}{\overline{z_1}} + \frac{9}{\overline{z_2}} + \frac{9}{\overline{z_3}}\right| \\
&= 9\left|\frac{\overline{z_2}\,\overline{z_3} + \overline{z_3}\,\overline{z_1} + \overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}}\right| \\
&= 9\frac{|\overline{z_2}\,\overline{z_3} + \overline{z_3}\,\overline{z_1} + \overline{z_1}\,\overline{z_2}|}{|\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}|} \\
&= 9\frac{|\overline{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}|}{|\overline{z_1}||\overline{z_2}||\overline{z_3}|} \\
&= 9\frac{|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|}{|z_1||z_2||z_3|} \\
&= \frac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|
\end{aligned}$$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

Α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(3μ.)

Β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται
(7μ.) από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=\lambda ex$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής
(8μ.) παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda)=\dfrac{e-2}{2\lambda}$

Δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$.
(7μ.)

απαντήσεις

Α. $A_f=R$, $\forall x\in R$: $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. αν $M(x_o, e^{\lambda x_o})$ είναι το σημείο επαφής τότε
(εφ$_M$): $y-e^{\lambda x_o}=\lambda e^{\lambda x_o}(x-x_o)$ και αφού αυτή διέρχεται από το O(0, 0) θα είναι

$$-e^{\lambda x_o}=-x_o\lambda e^{\lambda x_o} \Leftrightarrow x_o=\frac{1}{\lambda}$$, συνεπώς:

(εφ$_M$): $y-e=\lambda e(x-\frac{1}{\lambda})$ δηλ. $y=\lambda ex$ ενώ το σημείο επαφής είναι το $M(\frac{1}{\lambda}, e)$.

Γ. $\forall x\in R$: $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε όλο το R
συνεπώς η c_f είναι πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της, άρα:

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}-\lambda ex)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\frac{\lambda ex^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=...=\frac{e-2}{2\lambda}.$$

Δ. $-1\le\eta\mu\lambda\le1$ συνεπώς: $-\dfrac{1}{\lambda}\le\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\le\dfrac{1}{\lambda}$

κι επειδή: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(-\frac{1}{\lambda})=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$

σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{2(\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda})}=\frac{e-2}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}=+\infty$$

γιατί $\dfrac{e-2}{2}>0$, $\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}>0$ (αφού $\eta\mu\lambda\ge-1\Leftrightarrow 2+\eta\mu\lambda\ge1$)

και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda})=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\lambda}+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0+0=0$

Θέμα 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$.

Α. Να δεχθεί ότι: $f(x) = \ln(\frac{1+e^x}{2})$.

(6μ.)

Β. Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\etaμx}$.

(6μ.)

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

(7μ.) Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$.

Δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

(6μ.)

απαντήσεις

Α. $\forall x \in R: \; 2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow (2e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow 2e^{f(x)} = e^x + c \;\; (c \in R)$

$2e^{f(0)} = e^0 + c \Rightarrow c = 1$

συνεπώς: $2e^{f(x)} = e^x + 1$ δηλαδή $e^{f(x)} = \frac{1+e^x}{2}$ άρα: $f(x) = \ln(\frac{1+e^x}{2})$.

Β.

θέτω: $u = x - t =$ (για $t = x$: 0)

οπότε: $t = x - u$ (για $t = 0$: x)

$dt = -du$

$\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$ κι επειδή η συνάρτηση με τύπο $\int_0^x f(u)du$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη θα είναι: $\lim_{x \to 0} \int_0^x f(u)du = \int_0^0 f(u)du = 0$

άρα: $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\etaμx} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{\etaμx} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\int_0^x f(u)du)'}{(\etaμx)'} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{συνx} = \frac{f(0)}{συν0} = \frac{0}{1} = 0.$

Γ. $\forall x \in R: \; h(x) = -\int_0^{-x} t^{2005} f(t)dt + \int_0^x t^{2005} f(t)dt$

$h'(x) = -(-x)^{2005} f(-x)(-x)' + x^{2005} f(x) = x^{2005}(f(x) - f(-x)) = \ldots = x^{2006}$

$g'(x) = x^{2006}$

$h'(x) = g'(x) \Leftrightarrow h(x) = g(x) + c \;\; (c \in R)$

$h(0) = g(0) + c \Leftrightarrow 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$ άρα $\forall x \in R: \; h(x) = g(x)$

Δ. $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow x^{2007} = \frac{2007}{2008} \Leftrightarrow x = \sqrt[2007]{\frac{2007}{2008}} \in (0, 1)$

αφού: $0 < \frac{2007}{2008} < 1$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2006

Θέμα 1°

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:
(10μ.)
- αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γν. αύξουσα σε όλο το Δ.
- αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γν. φθίνουσα σε όλο το Δ.

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
(5μ.) Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Β. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|z|^2 = z^2$.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o.

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Ισχύει ο τύπος: $(3^x)' = x3^{x-1}$, για κάθε $x \in R$

ε. Ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

απαντήσεις

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Β. **α** Λάθος **β** Σωστό **γ** Σωστό **δ** Λάθος **ε** Σωστό

Θέμα 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (6μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. (8μ.)

Γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με (4μ.) την ευθεία $y = x$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις (7μ.) των συναρτήσεων f και f^{-1}.

απαντήσεις

Α. $\forall\, x\in[2, +\infty)$: $f'(x) = 2(x - 2) > 0$, $\forall x\in[2, +\infty)$ συνεπώς η f είναι γν. αύξουσα άρα και 1-1.

Β. αφού η f είναι 1-1 ορίζεται η f^{-1} .

$\forall\, x\in[2, +\infty)$: $y = f(x) \Leftrightarrow y - 2 = (x - 2)^2$ (συνεπώς αφού $(x - 2)^2 \geq 0$ είναι και $y \geq 2$)

$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y-2}$ άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, $x\in[2, +\infty)$

Γ. i. λόγω της συμμετρίας των C_f, $C_{f^{-1}}$ ως προς την $y = x$ έχουν τα ίδια κοινά σημεία με αυτή

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

άρα: οι C_f, $C_{f^{-1}}$ έχουν με την $y = x$ κοινά σημεία τα $A(2, 2)$ και $B(3, 3)$

ii. λόγω της συμμετρίας των C_f, $C_{f^{-1}}$ ως προς την $y = x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και την $y = x$ κι επειδή οι συναρτήσεις f και $y = x$ είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές)

είναι: $E = 2\int_2^3 |\, f(x) - x \,|\, dx$

κι αφού: $f(x) - x = 2 + (x - 2)^2 - x = (x - 2)^2 - (x - 2) = (x - 2)(x - 3) \leq 0 \quad \forall x\in[2, 3]$

είναι: $E = 2\int_2^3 [x - 2 - (x-2)^2]dx = 2\int_2^3 (-x^2 + 5x - 6)dx$

$= 2[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x]_2^3$

$\dots = \frac{1}{3}$

Θέμα 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

(9μ.)

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $Re(z_1\bar{z}_2) \geq -1$.

(8μ.)

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς (8μ.) και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

απαντήσεις

Α. i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3|$ αφού $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$\Leftrightarrow |2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2|$

$\Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2$

$\Leftrightarrow (2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) = (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2})$

$\Leftrightarrow (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2)$

$\ldots \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3$

$\Leftrightarrow |z_2|^2 = |z_3|^2$

$\Leftrightarrow |z_2| = |z_3|$ που ισχύει, συνεπώς: $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$

ομοίως: $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

ii. $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 2$ άρα: $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$

$|z_1 - z_2|^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \leq 4$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_z\bar{z}_2 \leq 4$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) \leq 4$

$\Leftrightarrow 1 + 1 - (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) \leq 4$

$\Leftrightarrow -2Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2$

$\Leftrightarrow Re(z_1\bar{z}_2) \geq -1$

Β. αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 1

αφού $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$, οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ισαπέχουν ανά δύο

συνεπώς είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον προαναφερθέντα κύκλο.

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
(8μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
(5μ.)

Γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$
(9μ.) με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in R$ ταυτίζονται, να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο
(3μ.) κοινές εφαπτόμενες.

απαντήσεις

Α. πρέπει: $x - 1 \neq 0$ και $x > 0$ άρα: $A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(x) = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} < 0$

συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα (0, 1) και (1, +∞) κι αφού:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 - (-\infty) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty - 0 = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1 - (+\infty) = -\infty$,

είναι: $f((0, 1)) = R$ και $f((1, +\infty)) = R$ άρα: $f(A_f) = R$

Β. αφού $0 \in f((0, 1))$ και f γν. φθίνουσα στο (0, 1), η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0, 1)
αφού $0 \in f((1, +\infty))$ και f γν. φθίνουσα στο (1, +∞), η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (1, +∞)
άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες

Γ. $(\varepsilon\varphi_A)$: $y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha$

$(\varepsilon\varphi_B)$: $y - h(\beta) = h'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y - e^\beta = e^\beta(x-\beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta$

οι εφαπτόμενες αυτές ταυτίζονται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} = e^\beta \\ -1 + \ln\alpha = -\beta e^\beta + e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln\alpha \\ -1 + \ln\alpha = \ln\alpha e^{-\ln\alpha} + e^{-\ln\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow -1 + \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(1 + \ln\alpha) \Leftrightarrow -\alpha + \alpha\ln\alpha = \ln\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)\ln\alpha = \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

άρα οι εφαπτόμενες ταυτίζονται αν και μόνο αν ο α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

Δ. από το **Γ.** ερώτημα προκύπτει ότι οι c_g και c_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες αφού σύμφωνα με το **Β.** ερώτημα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

Θέματα γενικών εξετάσεων 2007

Θέμα 1°

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
(8μ.)

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
(4μ.)

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞;
(3μ.)

Β. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$
τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx > 0$

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 ,
τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ,
τότε $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$
με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα

ε. αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

απαντήσεις

Α.1 Θεωρία
Α.2 Θεωρία
Α.3 Θεωρία
Β. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Θέμα 2°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με $\alpha\in R$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$

(9μ.) και ακτίνα $\rho=1$

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για α=0 και α=2 αντίστοιχα

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2

(8μ.)

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν

(8μ.)

απαντήσεις

α. $|z|=\left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right|=\dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\dfrac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}}=1$

άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

β. i. $z_1=\dfrac{1}{i}=-i \quad z_2=1$

η απόσταση των εικόνων των z_1 και z_2 είναι: $|z_1-z_2|=|-i-1|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

ii. για κάθε φυσικό ν: $(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=[(-i)^2]^{\nu}=(-1)^{\nu}$ και $(-z_2)^{\nu}=(-1)^{\nu}$

συνεπώς: $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2ημ^2θ$ όπου $θ \in R$ μια σταθερά με $θ \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in Z$

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο
(7μ.) και ένα σημείο καμπής

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες
(8μ.)

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f,
(3μ.) να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της
(7μ.) συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$

απαντήσεις

α. $\forall x \in R$: $f'(x) = 3(x^2 - 1)$

$f''(x) = 6x$

σύμφωνα με τον πίνακα μελέτης της f

η f έχει στο -1 τ.μ. το $f(-1) = 2συν^2θ$ (> 0)

η f έχει στο 1 τ.ε. το $f(1) = -2(1 + ημ^2θ)$ (< 0)

η f έχει σ.κ. το $(0, -2ημ^2θ)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f''(x)$			-		0		+		
$f(x)$		↗	τ.μ	↘ ∩	σ.κ.	↘ ∪	τ.ε.	↗	

β. η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

συνεπώς και λόγω και της μονοτονίας της f:

$f((-\infty, -1]) = (-\infty, 2συν^2θ]$ $f([-1, 1]) = [-2(1 + ημ^2θ), 2συν^2θ]$ $f([1, +\infty)) = [-2(1 + ημ^2θ), +\infty)$

$0 \in f((-\infty, -1])$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty, -1]$

$0 \in f([-1, 1])$ και η f είναι γν. φθίνουσα στο $[-1, 1]$ άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[-1, 1]$

$0 \in f([1, +\infty))$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[1, +\infty)$

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες

γ. $2συν^2θ = -2(-1) - 2ημ^2θ$ $\quad -2(1 + ημ^2θ) = -2(1) - 2ημ^2θ$ $\quad -2ημ^2θ = -2(0) - 2ημ^2θ$

αφού οι συντεταγμένες των σημείων $A(-1, 2συν^2θ)$, $B(1, -2(1 + ημ^2θ))$ και $Γ(0, -2ημ^2θ)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $y = -2x - 2ημ^2θ$, τα σημεία ανήκουν στην ευθεία

δ. έστω $g(x) = -2x - 2ημ^2θ$, $x \in R$

η g είναι συνεχής (πολυωνυμική)

$f(x) - g(x) = x^3 - x$

με ρίζες και πρόσημο που φαίνονται δίπλα

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)-g(x)		-	0	+	0	-	0	+	

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

Θέμα 4°

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$, $x\in[0,1]$ $\quad G(x)=\int_0^x g(t)dt$, $x\in[0,1]$

α. Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1] (8μ.)

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x)G(x)>F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1] (6μ.)

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1] (4μ.)

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)\Big/\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5$ (7μ.)

απαντήσεις

α. $\forall x\in[0,1]$: $F'(x)=f(x)g(x)>0$

γιατί $f(x)\ge f(0)>0$ (αφού f γν. αύξουσα στο [0, 1]) και $g(x)>0$

άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1] συνεπώς $\forall x\in(0,1]$: $x>0 \Rightarrow F(x)>F(0)=0$

β. αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1],

$\forall x\in(0,1]$ & $\forall t\in[0,x]$: $f(x)\ge f(t)$ (και η ισότητα ισχύει μόνο για $t=x$)

$\Leftrightarrow$ $g(t)f(x)\ge g(t)f(t)$ (αφού από την υπόθεση, $\forall t\in[0,1]$: $g(t)>0$)

$\Leftrightarrow$ $g(t)f(x)-g(t)f(t)\ge0$

$$\Rightarrow \int_0^x [g(t)f(x)-g(t)f(t)]dt>0 \Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)dt>\int_0^x g(t)f(t)dt \Leftrightarrow f(x)G(x)>F(x)$$

γ. $\forall x\in(0,1]$: $\left[\dfrac{F(x)}{G(x)}\right]'=\dfrac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\dfrac{g(x)[f(x)G(x)-F(x)]}{G^2(x)}>0$ (λόγω υπόθεσης και β.)

συνεπώς η συνάρτηση $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] άρα $\forall x\in(0,1]$: $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$

δ. $$\lim_{x\to0^+}\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)\Big/\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}$$

(και τα δύο όρια είναι απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$) $$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)'}{(x^5)'}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{5}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}=f(0)\cdot0\cdot1=0$$

(αφού η f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$)

Θέματα γενικών εξετάσεων 2008

Θέμα 1°

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|,\ x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$
(10μ.)

Α.2 Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;
(5μ.)

Β. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν μία συνάρτηση $f\colon A\to R$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$$

β. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

ε. αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

απαντήσεις

Α.1 Θεωρία
Α.2 Θεωρία

Β. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Θέμα 2°

Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|(i+2\sqrt{2})z| = 6$ και $|w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$, να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z
(6μ.)

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w
(7μ.)

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$
(6μ.)

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$
(6μ.)

απαντήσεις

α. $|(i+2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |i+2\sqrt{2}||z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8}\,|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$
άρα ο γ.τ. των εικόνων των z είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β. αφού οι εικόνες των w ισαπέχουν από τις εικόνες των $1-i$ και $3-3i$ δηλαδή από τα σημεία $A(1,-1)$ και $B(3,-3)$, ο γ.τ. των εικόνων των w είναι η μεσοκάθετη μ του AB το οποίο έχει

$\lambda_{AB} = \dfrac{-3-(-1)}{3-1} = -1$ και μέσο το σημείο $M\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{-1-3}{2}\right) = M(2,-2)$

(μ): $y-(-2) = \dfrac{-1}{-1}(x-2) \Leftrightarrow (\mu)$: $x-y-4=0$

γ. αφού $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας του w από το $O(0,0)$,
η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η ελάχιστη απόσταση της εικόνας του w από το $O(0,0)$
κι αυτή σύμφωνα με το **β.** είναι η: $d(O,\mu) = \dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$

δ. σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα: $|z-w| \geq ||w|-|z|| \geq$ (λόγω των **α.** και **β.**) $|2\sqrt{2}-2| = 2\sqrt{2}-2$
συνεπώς η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι: $2\sqrt{2}-2$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0
(3μ.)

β. να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της
(9μ.)

γ. να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης: $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$,
(6μ.) για όλες τις πραγματικές τιμές του α

δ. να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$
(7μ.)

απαντήσεις

α. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0

β. $\forall x\in(0, +\infty)$: $f'(x) = 1 + \ln x$, η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ $\qquad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$ $\qquad f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$

συνεπώς η f είναι γν. αύξουσα στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{e}]$ αφού είναι συνεχής και στο 0

$$f([0, +\infty) = f([0, \tfrac{1}{e}]) \cup f([\tfrac{1}{e}, +\infty)) = [f(\tfrac{1}{e}), f(0)] \cup [f(\tfrac{1}{e}), \lim_{x\to+\infty} f(x))$$
$$= [-\tfrac{1}{e}, 0] \cup [-\tfrac{1}{e}, +\infty)$$
$$= [-\tfrac{1}{e}, +\infty)$$

γ. $\forall x\in(0, +\infty)$: $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow f(x) = \alpha$ (1)

λύσεις της (1) είναι οι θετικές τετμημένες των κοινών σημείων της c_f με την ευθεία (ε): y = α

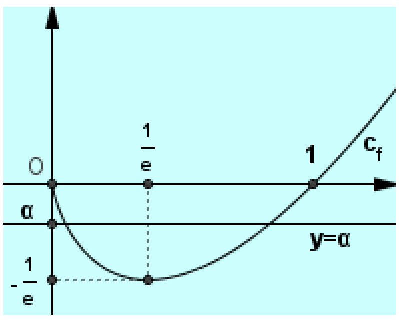
$\forall x\in(0, +\infty)$: $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα (αφού η f είναι συνεχής και στο 0) η f΄ είναι γν. αύξουσα και η f ∪ στο $[0, +\infty)$

σύμφωνα και με τα συμπεράσματα του **β.** (η f έχει στο $\frac{1}{e}$ min το $-\frac{1}{e}$) συμπέρασμα για το πλήθος των ριζών της (1) προκύπτει από την πρόχειρη (λέμε τώρα...) γραφική παράσταση των f και ε:

αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ η (1) είναι αδύνατη, αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ έχει μία μόνη λύση (το $\frac{1}{e}$)

αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$ έχει 2 λύσεις, αν α = 0 έχει μία μόνη λύση (το 1)

και τέλος αν α > 0 έχει μία λύση



δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$, $x > 0$

συνεπώς σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$: $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

οπότε: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(\xi)$ που ισχύει

αφού $x + 1 > \xi$ και η f΄ είναι όπως είπαμε στο **γ.** γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Θέμα 4°

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει: $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$

α. να αποδείξετε ότι: $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$
(8μ.)

β. δίνεται επίσης μία συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.
(4μ.) Να αποδείξετε ότι: $g''(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$

γ. αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος **α.** και τη συνάρτηση g του ερωτήματος **β.** ισχύουν:
$\lim_{h\to 0}\dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι: $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$
(10μ.)

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1
(3μ.)

απαντήσεις

α. $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt\int_0^2(10x^3 + 3x)dx - \int_0^2 45dx$

$$\Leftrightarrow \quad 90 = \left(\left[\frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - 1\right)\int_0^2 f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt = 2 \qquad \text{άρα} \quad f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

β. $\lim_{h\to 0}\dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \overbrace{=}^{u=-h \quad h\to 0 \quad \to 0} \lim_{u\to 0}\dfrac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x)$

γ. i. η g ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής συνεπώς

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(g(x+h) - 2g(x) + g(x-h))'}{(h^2)'} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right) = \frac{1}{2}(g''(x) + g''(x))(\text{λόγω β.}) = g''(x)$$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$ $(c_1 \in R)$

αλλά: $g'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ οπότε: $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$ $(c_2 \in R)$

αλλά: $g(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$ οπότε: $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. $\forall x \in R$: $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

Θέματα γενικών εξετάσεων 2009

Θέμα 1°

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για
(10μ.) κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;
(5μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_o \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [α, β]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = α$, $x = β$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

Θέμα 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in R$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των (9μ.) μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_o = 1 - i$ (8μ.) έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_o$ (8μ.) όπου z_o ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

απαντήσεις

Α. α. αν $M(x_z, y_z)$ είναι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, είναι $x_z = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x_z - 1}{2}$

οπότε: $y_z = 2\lambda - 1 \Leftrightarrow y_z = x_z - 2$

άρα $M \in (\varepsilon)$: $y = x - 2$

β. από τους προηγούμενους μιγαδικούς, μικρότερο μέτρο έχει αυτός που έχει εικόνα το ίχνος M_o της κάθετης (κ) από το O(0, 0) στην (ε)

$\kappa \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\kappa \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\kappa = -1$ συνεπώς (κ): $y = -x$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

άρα είναι $M_o(1, -1)$

και ο μιγαδικός με το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_o = 1 - i$

Β. αν είναι $w = \alpha + \beta i$ $(\alpha, \beta \in R)$ ένας από τους ζητούμενους μιγαδικούς, τότε:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_o \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

συνεπώς οι μιγαδικοί που ζητάμε είναι οι $w_1 = -4 + i$ και $w_2 = 3 + i$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Α. αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$
(8μ.)

Β. για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή
(5μ.)

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και
(6μ.) γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$
(6μ.) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$

απαντήσεις

Α. $\forall x \in (-1, +\infty)$: $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$ και $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$

αφού η f έχει στο $0 \in (-1, +\infty)$ ελάχιστο σύμφωνα με το Θ.Fermat

θα είναι $f'(0) = 0$ δηλ. $\ln\alpha = 1$ άρα $\alpha = e$

Β. α. $\forall x \in (-1, +\infty)$: $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή

β. σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα η f' είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς:

$\forall x \in (-1, 0)$: $f'(x) < f'(0) = 0$ ενώ $\forall x \in (0, +\infty)$: $f'(x) > f'(0) = 0$

κι αφού η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο 0, η συνάρτηση f είναι:

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ. $\forall x \in (1, 2)$: $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

έστω $g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$, $x \in [1, 2]$

- η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική
- $g(1)g(2) = -(f(\beta)-1)(f(\gamma)-1) < 0$

(γιατί από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι η f έχει στο 0 ελάχιστο το $f(0) = 1$ συνεπώς $f(\beta) < 1$ και $f(\gamma) < 1$)

άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει στο $(1, 2)$ μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$g(x) = 0$ δηλ. ισοδύναμα της $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$

Θέμα 4ο

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει: $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$, $x \in [0, 2]$, $G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 3\,, & x \in (0, 2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,, & x = 0 \end{cases}$

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]
(5μ.)

β. να αποδείξετε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x) = -H(x)/x^2$, $0<x<2$
(6μ.)

γ. να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$
(7μ.)

δ. να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha\int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$
(7μ.)

απαντήσεις

α. οι συναρτήσεις f(t), tf(t) είναι συνεχείς στο [0, 2] συνεπώς οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)dt$,H(x) είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς στο [0, 2] επομένως η G ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής στο (0, 2]

$$G(0) = 6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\lim_{t\to 0}\frac{1-(1-t^2)}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 3 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{H(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{H'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} G(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x f(t)dt + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 = G(0)$ συνεπώς η G είναι συνεχής και στο 0

άρα η G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]

β. όπως σας τα είπα στο α.

η G, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2)

με $G'(x) = \dfrac{xH'(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = \dfrac{x^2 f(x) - H(x) - x^2 f(x)}{x^2} = -\dfrac{H(x)}{x^2}$

γ. σύμφωνα με το β. αρκεί ν.δ.ό. υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $G'(\alpha) = 0$

• η G είναι συνεχής στο [0, 2], παραγωγίσιμη στο (0, 2)

• $G(2) = \dfrac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \displaystyle\int_0^2 f(t)dt + 3 = \dfrac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2} + 3 \overset{υπ.}{=} 0 + 3 = 3 = G(0)$

άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $G'(\alpha) = 0$

δ. αρκεί ν.δ.ό. υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε $-\dfrac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = -\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$ δηλ. (βλέπε β.) ώστε $G'(\xi) = -\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$

• αφού $\alpha \in (0, 2)$ η G είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} = -\frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \text{ (βλέπε β.)}$$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2010

Θέμα Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ,
(6μ.) τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$

Α2. Πότε η ευθεία $x = x_o$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας
(4μ.) συνάρτησης f;

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
(5μ.) Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Α4. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους

β. έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ

γ. αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$

δ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x \in R$

ε. αν $\lim_{x \to x_o} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Θέμα Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$

Β1. να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης
(7μ.)

Β2. να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$
(6μ.)

Β3. αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε
(7μ.) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο

Β4. για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3\le|w|\le 7$
(5μ.)

απαντήσεις

Β1. $z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}$ άρα: $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}$

$$=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

Β3. $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|2i| \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$
συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος c με κέντρο $K(4,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$

Β4. σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα:

$$\big||w-4+3i|-|4-3i|\big|\le|(w-4+3i)+(4-3i)|\le|w-4+3i|+|4-3i|$$

$\Leftrightarrow$ $\big|2-5\big|\le|w|\le 2+5$ (σύμφωνα με το Β3 κι αφού $|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$)

$\Leftrightarrow$ $3\le|w|\le 7$

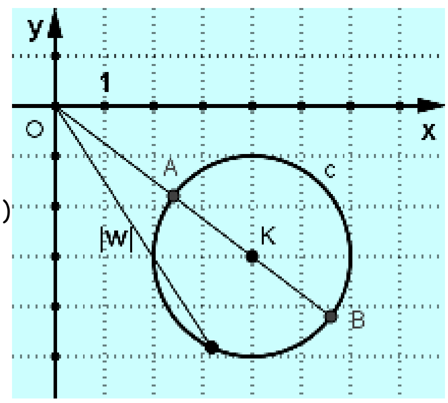
αλλιώς:

σύμφωνα με το Β3 η εικόνα του w ανήκει στον c,
συνεπώς: $OA\le|w|\le OB$

$\Leftrightarrow$ $OK-\rho\le|w|\le OK+\rho$

$\Leftrightarrow$ $5-2\le|w|\le 5+2$ (αφού $OK=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$)

$\Leftrightarrow$ $3\le|w|\le 7$



Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in R$

Γ1. να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f
(5μ.)

Γ2. να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}]$
(7μ.)

Γ3. να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής
(6μ.) παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y

Γ4. να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx$
(7μ.)

απαντήσεις

Γ1. $\forall x \in R$: $f'(x) = \ldots = 2\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} > 0$ (γιατί $\forall x \in R$: $x^2 + 1 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$ αφού έχει $\Delta = -3 < 0$)

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Γ2. $\forall x \in R$: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}] \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln[(3x-2)^2+1]$

$\Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2)$

(κι αφού η f ως γν. αύξουσα είναι '1-1') $\Leftrightarrow x^2 = 3x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

Γ3. $\forall x \in R$: $f''(x) = \ldots = 2\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ (ρίζες και πρόσημο της f΄΄ είναι αυτά του τριωνύμου $1 - x^2$)

αφού η f΄΄ μηδενίζεται αλλάζοντας πρόσημο στα σημεία -1 & 1, η C_f έχει 2 σημεία καμπής τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$ δηλαδή τα $A(-1, -2 + \ln 2)$ και $B(1, 2 + \ln 2)$

η $(εφ_A)$: $y + 2 - \ln 2 = 1(x+1)$ τέμνει τον y΄y στο σημείο $Γ(0, -1 + \ln 2)$

η $(εφ_B)$: $y - 2 - \ln 2 = 3(x-1)$ τέμνει τον y΄y στο σημείο $Γ(0, -1 + \ln 2)$

Γ4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx =$

Θέτω: $u = -x =$ για $x=1$: -1, για $x=-1$: 1

οπότε: $x = -u$
και $dx = -du$

$$= \int_{1}^{-1} u\ln(u^2+1)du = -\int_{-1}^{1} u\ln(u^2+1)du = -\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$$

συνεπώς: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = 0$

άρα: $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1}[2x^2 + x\ln(x^2+1)]dx = \int_{-1}^{1} 2x^2dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$

$$= [\frac{2x^3}{3}]_{-1}^{1} + 0$$

$$= \frac{4}{3}$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \qquad f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) - x}$, $x \in R$

(5μ.)

Δ2. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in R$, είναι σταθερή

(7μ.)

Δ3. να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in R$

(6μ.)

Δ4. να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in R$

(7μ.)

απαντήσεις

Δ1. η συνάρτηση με τύπο $\dfrac{t}{f(t) - t}$ είναι συνεχής στο R ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών στο R συναρτήσεων άρα $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt\right)' = \dfrac{x}{f(x) - x}$ συνεπώς η συνάρτηση $f(x) = x + 3 + \displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{f(x) - x} = \dfrac{f(x)}{f(x) - x}$

Δ2. $\forall x \in R$: $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)$

$$= \frac{2f^2(x)}{f(x) - x} - 2f(x) - \frac{2xf(x)}{f(x) - x}$$

$$= \frac{2f^2(x) - 2f^2(x) + 2xf(x) - 2xf(x)}{f(x) - x}$$

$= 0$ άρα η g είναι σταθερή στο R

Δ3. όπως είδαμε στο Δ2 είναι $\forall x\in R$: $g(x)=c$ $(c\in R)$
αλλά $g(0)=f^2(0)=3^2=9$ συνεπώς $\forall x\in R$: $g(x)=9$

$$\forall x\in R:\ g(x)=9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=9$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9$$
$$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+9$$

[η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$
είναι συνεχής στο R (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) και δε μηδενίζεται για καμία τιμή του x
συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο R
κι αφού $h(0)=f(0)=3>0$ είναι $\forall x\in R$: $h(x)>0$]

επομένως $\forall x\in R$: $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}$

άρα: $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in R$

Δ4. έστω $s(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$, $x\in R$

$$\forall x\in R:\ s'(x)=\left(\int_x^0 f(t)dt+\int_0^{x+1} f(t)dt\right)'$$
$$=\left(-\int_0^x f(t)dt+\int_0^{x+1} f(t)dt\right)'$$
$$=f(x+1)-f(x)$$

αλλά $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}>\dfrac{x+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{x+|x|}{\sqrt{x^2+9}}\ge 0$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως

$x+1>x \Leftrightarrow f(x+1)>f(x) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)>0 \Leftrightarrow s'(x)>0$

δηλαδή η s είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$$x<x+1 \Leftrightarrow s(x)<s(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2011

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ.
(10μ.) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_o) = 0$

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y = λx+β$ λέγεται ασύμπτωτη της
(5μ.) γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Α3. Να χαρακτηρίσετε της προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β. μια συνάρτηση f: $A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ. για κάθε $x \in R_1 = R - \{x /\ συνx = 0\}$ ισχύει: $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2 x}$

δ. ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$

ε. οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Θέμα Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$,οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

Β1. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z
(7μ.)

Β2. να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$
(4μ.)

Β3. να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$
(8μ.)

Β4. να αποδείξετε ότι $|z-w|=|z|$
(6μ.)

απαντήσεις

Β1. $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| + |\overline{z - 3i}| = 2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$
συνεπώς ο γ.τ. των εικόνων των z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα 1

Β2. $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

Β3. $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z-3i+\bar{z}+3i = 2Re(z) \in R$

$|w| = \left|z - 3i + \frac{1}{z - 3i}\right| \leq |z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$

κι αφού $w \in R$: $|w| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$

Β4. έστω $z=\alpha+\beta i$ ($\alpha, \beta \in R$) τότε είναι:
$|z-w|=|\alpha+\beta i-2\alpha|=|-\alpha+\beta i|=|z|$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x \in R$

Γ1. να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x \in R$
(8μ.)

Γ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
(3μ.)

Γ3. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής
(7μ.)

Γ4. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$
(7μ.)

απαντήσεις

Γ1. $\forall x \in R$: $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow (e^x f'(x)-e^x)'=(xf'(x))'$

$\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c \ \ (c \in R)$

$e^0 f'(0)-e^0=0f'(0)+c \Leftrightarrow c=-1$

$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1$

έστω $g(x)=e^x-x$, $x \in R$

$\forall x \in R$: $g'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	min 1	↗

άρα $\forall x \in R$: $e^x-x \geq 1 > 0$

συνεπώς: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)=(\ln(e^x-x))' \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+d \ \ (d \in R)$

$f(0)=\ln(e^0-0)+d \Leftrightarrow d=0$

άρα $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x \in R$

Γ2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min 0	↗

Γ3. $\forall x \in R$: $f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$

έστω $s(x)=-xe^x+2e^x-1$, $x \in R$

$\forall x \in R$: $s'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$s'(x)$		+	0	-	
$s(x)$		$\nearrow$	max $e-1>0$	$\searrow$	

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2 - x - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty)(2-\infty-0)= (+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} s(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2-x}{e^{-x}} - 1\right) = 0-1=-1$ αφού σύμφωνα με τον κανόνα de l' hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2-x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = 0$$

η s είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ συνεπώς:

$s\big((-\infty, 1]\big)=\big(\lim\limits_{x\to-\infty} s(x), s(1)\big]=(-1, e-1]$

αφού $0\in(-1, e-1]$, η s έχει στο $(-\infty, 1]$ ρίζα και λόγω της μονοτονίας της s η ρίζα αυτή είναι μοναδική και η s αλλάζει πρόσημο σ' αυτή

η s είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ συνεπώς:

$s\big([1, +\infty)\big)=\big(\lim\limits_{x\to+\infty} s(x), s(1)\big]=(-\infty, e-1]$

αφού $0\in(-\infty, e-1]$, η s έχει στο $[1, +\infty)$ ρίζα και λόγω της μονοτονίας της s η ρίζα αυτή είναι μοναδική και η s αλλάζει πρόσημο σ' αυτή

ρίζες και πρόσημο της f'' είναι αυτά της s (αφού $\forall x\in\mathbb{R}$: $(e^x-x)^2>0$)
άρα η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Γ4. έστω $h(x)=\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0, \pi/2]$

η h είναι συνεχής στο $[0, \pi/2]$ και
$h(0)h(\pi/2)=-f(\pi/2)<0$ (από Γ2.)

συνεπώς σύμφωνα με το θ. Bolzano η h έχει ρίζα στο $(0, \pi/2)$
και μάλιστα μοναδική αφού είναι γνησίως αύξουσα (συνεπώς 1-1) αφού:

$\forall x\in(0, \pi/2)$: $h'(x)=f'(x)+\eta\mu x>0$ (από Γ2.)

άρα η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$

Θέμα Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g: R→R οι οποίες για κάθε $x\in R$ ικανοποιούν τις σχέσεις: i. f(x)>0 και g(x) >0 ii. $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ iii. $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι f(x)=g(x)
(9μ.) για κάθε $x\in R$

Δ2. να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$, $x\in R$
(4μ.)

Δ3. να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$
(5μ.)

Δ4. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της
(7μ.) συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση $x=1$

απαντήσεις

Δ1. $\forall x\in R$: $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \Leftrightarrow f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=1+\int_0^{x}\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$

θέτω: u=x+t= για t=-x 0
οπότε: t=u-x για t=0 x
dt=du

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ (γιατί αφού η συνάρτηση $e^{2x}/g(x)$ είναι συνεχής, η συνάρτηση $\int_0^{x}\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη)

συνεπώς: $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και ομοίως: $f(x)g'(x)=e^{2x}$
$f'(x)g(x)=f(x)g'(x) \Leftrightarrow [f(x)/g(x)]'=0 \Leftrightarrow f(x)=cg(x)$ $(c\in R)$ αλλά οι ii.&iii.
για x=0 δίνουν: f(0)=g(0)=1, οπότε: $f(0)=cg(0) \Leftrightarrow c=1$ άρα $\forall x\in R$: f(x)=g(x)

Δ2. $\forall x\in R$: $f'(x)g(x)=e^{2x} \Leftrightarrow [f^2(x)]'=(e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+d$ $(c\in R)$ αλλά $f^2(0)=e^0+d \Leftrightarrow d=0$
συνεπώς $f^2(x)=e^{2x}$ κι αφού f(x)>0 είναι $f(x)=e^x$

Δ3. το όριο είναι το $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-1/x}}{1/x}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(e^{-1/x})'}{(1/x)'}=-\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-1/x}=-\infty$

Δ4. $\forall x\in R$: $F'(x)=f(x^2)=e^{x^2}>0$ συνεπώς η F είναι γν. αύξουσα οπότε: $x\leq 1 \Rightarrow F(x)\leq F(1)=0$

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

$$=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{e-1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2012

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f\,'(x) > 0$ σε κάθε
(7μ.) εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];
(4μ.)

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό
(4μ.) μέγιστο;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο
(10μ.) γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ. Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o

δ. $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in R - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου $f\,', g\,'$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

Θέμα Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ (1) $|w-5\bar{w}|=12$ (2)

B1. (6μ.) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1

B2. (7μ.) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$

B3. (6μ.) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

B4. (6μ.) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\leq|z-w|\leq4$

Απαντήσεις

B1. $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4$
$\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4$
$\Leftrightarrow 2|z|^2=2$
$\Leftrightarrow |z|=1$

συνεπώς ο γ.τ. των εικόνων των z είναι ο κύκλος με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα 1

B2. είναι $|z_1|=|z_2|=1$ και $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2$
$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z_1}-\bar{z_2})=2$
$\Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\bar{z_2}-z_2\bar{z_1}+|z_2|^2=2$
$\Leftrightarrow z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1}=0$

οπότε $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2})=|z_1|^2+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1}+|z_2|^2=2$ συνεπώς $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

B3. έστω w=x+yi (x,y∈R) τότε $|w-5\bar{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5x+5yi|=12$
$\Leftrightarrow \sqrt{(-4x)^2+(6y)^2}=12$
$\Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144$

συνεπώς ο γ.τ. των εικόνων των w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

η οποία έχει μεγάλο ημιάξονα μήκους 3 και μικρό ημιάξονα μήκους 2
άρα: $|w|_{min}=2$ και $|w|_{max}=3$

B4. σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα είναι: $||z|-|-w||\leq|z+(-w)|\leq|z|+|-w|$
δηλ. $||z|-|w||\leq|z+w|\leq|z|+|w|$
συνεπώς: $1=2-1\leq|w|-|z|=||z|-|w||\leq|z+w|\leq|z|+|w|\leq1+3=4$
(αφού σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι $|z|=1$ και $2\leq|w|\leq3$)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\ 1]$
(6μ.) και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\ +\infty)$.
Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
(6μ.)

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι
(6μ.) υπάρχει $x_o\in(x_1,\ x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)+f(x_o)=2012$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της
(7μ.) συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

απαντήσεις

Γ1. $\forall x\in(0,\ +\infty)$: $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\ln x+x-1}{x}$

$\forall x\in(0,\ 1)$: $x>0$, $\ln x<0$, $x-1<0$ συνεπώς: $f'(x)<0$

$\forall x\in(1,\ +\infty)$: $x>0$, $\ln x>0$, $x-1>0$ συνεπώς: $f'(x)>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	min -1	↗	$+\infty$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$, ενώ

$$\begin{aligned} f((0,+\infty)) &= f((0,1]) \cup f([1,+\infty)) \\ &= [-1,+\infty) \cup [-1,+\infty) \\ &= [-1,+\infty) \end{aligned}$$

Γ2. $\forall x\in(0,\ +\infty)$: $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012 \Leftrightarrow f(x)=2012$

η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και $2012\in f((0,\ 1])$

άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0, 1]

η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$ και $2012\in f([1,\ +\infty))$

άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[1,\ +\infty)$

συνεπώς η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Γ3. αρκεί να δείξω ότι στο (x_1, x_2) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης:

$$f'(x)+f(x)=2012 \Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=2012e^x \Leftrightarrow (f(x)e^x)'=(2012e^x)'$$
$$\Leftrightarrow (f(x)e^x-2012e^x)'=0$$

πραγματικά η συνάρτηση $s(x)= f(x)e^x-2012e^x$, $x>0$

- είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[x_1, x_2]$ με $s'(x)= f'(x)e^x+f(x)e^x-2012e^x$
- $s(x_1)=2012e^{x_1}-2012e^{x_1}=0=2012e^{x_2}-2012e^{x_2}=s(x_2)$

συνεπώς σύμφωνα με το θ.Rolle η εξίσωση $s'(x)=0$ έχει ρίζα στο (x_1, x_2)
δηλαδή υπάρχει $x_o\in(x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε $f'(x_o)+f(x_o)=2012$

Γ4. στο Γ1 βρήκαμε ότι η f έχει στο 1 ελάχιστο το -1 συνεπώς:
$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$ και $\forall\ x\in[1,e]$ είναι $f(x)\geq-1 \Leftrightarrow g(x)\geq0$ άρα:

$$E=\int_1^e (f(x)+1)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx$$
$$=\int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x dx$$
$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}-x+\frac{\ln x}{2}\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2-2e+1}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1\right)$$
$$=\frac{e^2-3}{4}\ \text{τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

τις σχέσεις: • $f(x) \neq 0$ • $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ • $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
(10μ.)

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 0^+}\left[(f(x))^2 ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$
(5μ.)

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι
(6μ.) η συνάρτηση $F(x)=\int_α^x f(t)dt$, $x>0$, όπου $α>0$, είναι κυρτή (2μ.). Στη συνέχεια
Να αποδείξετε ότι: $F(x)+F(3x)>2F(2x)$, για κάθε $x>0$ (4μ.).

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $β>0$.
(4μ.) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $ξ \in (β, 2β)$ τέτοιο ώστε: $F(β)+F(3β)=2F(ξ)$

απαντήσεις

Δ1. έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$, $x \in (0, +\infty)$

η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x)=(2x-1)f(x) - \frac{1-2x}{e}$

και $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$ δηλ. η g έχει στο 1 (που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$) ελάχιστο συνεπώς σύμφωνα με το θ. Fermat: $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)= -\frac{1}{e}$

αφού η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$, διατηρεί πρόσημο και είναι: $f(x)<0$

συνεπώς $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)| \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$

(έστω $s(x)=\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$, $x>0$) $\Leftrightarrow s'(x)=s(x)+e$

$\Leftrightarrow s'(x)e^{-x} - s(x)e^{-x} = e^{-x+1} \Leftrightarrow (s(x)e^{-x})' = (-e^{-x+1})' \Leftrightarrow s(x)e^{-x} = -e^{-x+1} + c$ $(c \in R)$

$\Rightarrow$ (για x=1) $0= -1+c \Leftrightarrow c=1$

συνεπώς $s(x)= -e+e^x \Rightarrow s'(x)=e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x)= e^{-x}(\ln x - x)$

η συνάρτηση $\ln x - x$ είναι παραγωγίσιμη (διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων)
η συνάρτηση e^{-x} είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x και $-x$)
συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη (γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων)

Δ2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ θέτω $u=\dfrac{1}{f(x)}$ οπότε $f(x)=\dfrac{1}{u}$ και $\lim_{x\to 0^+} u=0$ συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2}-\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu - u)'}{(u^2)'} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 0$$

Δ3. αφού η f είναι συνεχής $\forall x\in(0, +\infty)$:

$F''(x)=(F'(x))'=f'(x)= -e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}(\frac{1}{x}-1)= -e^{-x}(\ln x-x+1-\frac{1}{x})>0$

(επειδή $\ln x-x+1\leq 0$, $\frac{1}{x}>0$ και $e^{-x}>0$) συνεπώς η F είναι κυρτή

η F είναι παραγωγίσιμη στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$

συνεπώς σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχουν $x_1\in(x, 2x)$ και $x_2\in(2x, 3x)$ τέτοιοι ώστε

$F'(x_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ και $F'(x_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$

αφού η F είναι κυρτή η F' είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς

$x_1< x_2 \Leftrightarrow F'(x_1)< F'(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}<\dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x} \Leftrightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x)$

Δ4. έστω η συνάρτηση $h(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$, $x\in[\beta, 2\beta]\subset(0, +\infty)$

η h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

$h(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$ (σύμφωνα με το Δ3)

$h(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$

$\forall x\in(0, +\infty)$: $F'(x)=f(x)<0$ (γιατί $\ln x-x+1\leq 0 \Leftrightarrow \ln x-x\leq -1<0$ ενώ $e^{-x}>0$)

άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $\beta<3\beta \Leftrightarrow F(\beta)-F(3\beta)>0$ δηλαδή $h(\beta)>0$

σύμφωνα με το θ.Bolzano υπάρχει $\xi\in(\beta, 2\beta)$ τέτοιος ώστε: $h(\xi)=0$ δηλ. $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$

ο ξ είναι μοναδικός αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα

(γιατί $\forall x\in[\beta, 2\beta]$: $h'(x)=2F'(x)<0$)