Θέματα γενικών εξετάσεων 2000

Θέμα 1ο

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες,
(8μ.) να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των ακολούθων συναρτήσεων:
(4.5μ.) $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x)\neq 0$, όπου c πραγματική σταθερά.

Β1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της
(8μ.) στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση που δίνει την παράγωγο της συνάρτησης της στήλης Α

στήλη Α	στήλη Β
α. x^2+3	**1.** $1-ημx$
β. $x+συνx$	**2.** $3x^2-8x$
γ. $xημx$	**3.** $2x+3$
δ. x^3-4x^2	**4.** $ημx-xσυνx$
	5. $2x$
	6. $3x^2-4x$
	7. $ημx+xσυνx$

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
(4.5μ.) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x\neq 0$ είναι:

α. e^x **β.** $\dfrac{e^x-xe^x}{x^2}$ **γ.** $\dfrac{e^x x+e^x}{x^2}$ **δ.** $\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}$ **ε.** $\dfrac{xe^x-e^x}{x}$

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Β1. **α 5** **β 1** **γ 7** **δ 2**

Β2. **δ**

Θέμα 2°

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον ακόλουθο πίνακα συμπληρωμένο σωστά.
(16μ.)

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
Σύνολο	v = 50	1	100				

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
(4μ.)

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι: $s^2 = 0.49$. Δίνεται ότι: $s^2 = \frac{1}{v}\{\sum_{i=1}^{\kappa} x^2{}_{i} v_i - \frac{(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i)^2}{v}\}$
(5μ.)

απαντήσεις

Α. με τη βοήθεια της στήλης N_i συμπληρώνουμε τον πίνακα ως εξής:

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10	***10/50=0.2***	***20***	***10***	10	1	10
2	***25***	***25/50=0.5***	***50***	35	***50***	4	***100***
3	***15***	***15/50=0.3***	***30***	***50***	***45***	9	***135***
Σύνολο	v = 50	1	100		***105***		***245***

Β. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i}{v} = \frac{105}{50} = 2.1$ και $\delta = \frac{1}{2}$ (25^{η} παρατήρηση + 26^{η} παρατήρηση) $= \frac{2+2}{2} = 2$

Γ. $s^2 = \frac{1}{50}(245 - \frac{105^2}{50}) = \frac{245 - 220.5}{50} = \frac{24.5}{50} = 0.49$

Θέμα 3°

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

Α. να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;
(8μ.)

Β. να συμμετέχει μόνο σε έναν από τους δύο διαγωνισμούς;
(8μ.)

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;
(9μ.)

απαντήσεις

Α. $P(M) = \frac{24}{120}$ $\quad P(\Phi) = \frac{20}{120}$ $\quad P(M \cap \Phi) = \frac{12}{120}$

η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$

$$= \frac{32}{120} = \frac{4}{15} = 0.2666...$$

Β. η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P[(M \cap \Phi') \cup (M' \cap \Phi)] = P(M \cap \Phi') + P(M' \cap \Phi)$$

(αφού τα ενδεχόμενα $M \cap \Phi'$ και $M' \cap \Phi$ είναι προφανώς ξένα)

$$= P(M) - P(M \cap \Phi) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$= \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0.1666...$$

Γ. η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P[(M \cup \Phi)'] = 1 - P(M \cup \Phi)$

$$= 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15} = 0.7333...$$

Θέμα 4°

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί.
Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα f_i%
0 - 5	10
5 - 10	15
10 - 15	12
15 - 20	15
20 - 25	18
25 - 30	18
30 - 35	12

Α. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;
(5μ.)

Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

Β1. πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12.5 χρόνια;
(10μ.) να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β2. πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα 5 χρόνια, ώστε
(10μ.) ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

απαντήσεις

το πλήθος των εκπαιδευτικών που υπηρετούν κατά κλάση, δηλαδή οι συχνότητες των κλάσεων είναι ακριβώς οι σχετικές συχνότητες που δόθηκαν
(αφού υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί)

Α. 15 + 18 + 18 + 12 = 63 εκπαιδευτικοί

Β1. αυτοί που σήμερα έχουν από 30 μέχρι 35 χρόνια υπηρεσίας δηλ. 12
αυτοί που σήμερα έχουν από 25 μέχρι 30 χρόνια υπηρεσίας δηλ. 18 και (εκτιμούμε ότι)
οι μισοί από αυτούς που σήμερα έχουν από 20 μέχρι 25 χρόνια υπηρεσίας δηλ. 9
συνεπώς θα συνταξιοδοτηθούν συνολικά: 12 + 18 + 9 = 39 εκπαιδευτικοί

Β2. 12, αφού τόσοι ανήκουν στην κλάση [30 - 35) δηλαδή θα συνταξιοδοτηθούν τα επόμενα 5 χρόνια

Θέματα γενικών εξετάσεων 2001

Θέμα 1°

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω, ισχύει:
(8.5μ.) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

Α2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις ακόλουθες σχέσεις και να συμπληρώσετε κάθε μία
(4μ.) από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο ($=, \leq, \geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A')$ … $1-P(A)$.

β. Αν $A\subseteq B$ τότε: $P(B)$ … $P(A)$.

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη
(4μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγμ. χώρου Ω και A' είναι το αντίθετο του A

α. αν $A'\subseteq B$ τότε $P(A)+P(B)<1$.

β. αν $P(A)=P(A')$ τότε $2P(A)=P(\Omega)$.

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
(2.5μ.) Αν $A\subseteq B$, $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(B)=\frac{5}{12}$ τότε η $P(A\cup B)$ είναι ίση με:

α. $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{5}{12}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** $\frac{1}{6}$

Β3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα
(6μ.) τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγμ. χώρου, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

στήλη Α	στήλη Β
α. $P(A-B)$	**1.** 1/20
β. $P[(B-A)']$	**2.** 2/15
γ. $P[(A\cap B)']$	**3.** 4/5
	4. 1/12
	5. 19/20

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. **α.** $P(A')=1-P(A)$. **β.** αν $A\subseteq B$ τότε: $P(B)\geq P(A)$

Β1. **α.** Λάθος **β.** Σωστό

Β2. β

Β3. α2 β5 γ3

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συνx + ημx$.

Α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f''(x) = 0$.
(8μ.)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,1).
(8μ.)

Γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία ισχύει η σχέση:
(9μ.) $λf'(π/2) - 2f(π/2) = 2$.

απαντήσεις

Α. $\forall x \in R$: $f(x) = συνx + ημx$

$f'(x) = -ημx + συνx$

$f''(x) = -συνx - ημx$

συνεπώς: $f(x) + f''(x) = συνx + ημx + (-συνx - ημx) = 0$

Β. έστω $(εφ_A)$: $y = λx + β$

επειδή $λ = f'(0) = 1$

είναι $(εφ_A)$: $y = x + β$

κι αφού $A(0,1) \in (εφ_A)$

θα ισχύει: $1 = 0 + β$ δηλ. $β = 1$

άρα $(εφ_A)$: $y = x + 1$

Γ. $λf'(\frac{π}{2}) - 2f(\frac{π}{2}) = 2 \Leftrightarrow λ(-1) - 2(1) = 2$

$\Leftrightarrow λ = -4$

Θέμα 3°

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ′ τάξης ενός Λυκείου.
Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45 - 55	0.2
55 - 65	0.5
65 - 75	
75 - 85	

Α. (8μ.) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της 3ης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 1ης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην 3η και 4η κλάση.

Β. (9μ.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των προηγουμένων δεδομένων.

Γ. (8μ.) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

β. να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

απαντήσεις

Α. οι σχετικές συχνότητες των κλάσεων είναι:

$f_1 = F_1 = 0.2$

$f_2 = F_2 - F_1 = 0.3$

$f_3 = 2f_1 = 0.4$

$f_4 = 1 - (f_1 + f_2 + f_3) = 0.1$, συνεπώς: $F_3 = F_2 + f_3 = 0.9$ και $F_4 = F_3 + f_4 = 1$

Β. οι κεντρικές τιμές των κλάσεων είναι: $x_1 = 50$, $x_2 = 60$, $x_3 = 70$, $x_4 = 80$

συνεπώς: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i = 0.2 \cdot 50 + 0.3 \cdot 60 + 0.4 \cdot 70 + 0.1 \cdot 80 = 10 + 18 + 28 + 8 = 64$ κιλά

Γ. οι συχνότητες των κλάσεων είναι:

$\nu_1 = f_1 \bullet 80 = 0.2 \bullet 80 = 16$

$\nu_2 = f_2 \bullet 80 = 0.3 \bullet 80 = 24$

$\nu_3 = f_3 \bullet 80 = 0.4 \bullet 80 = 32$

$\nu_4 = f_4 \bullet 80 = 0.1 \bullet 80 = 8$, οπότε: **α.** $P(\, B < 65 \,) = \dfrac{16 + 24}{80} = \dfrac{40}{80}$ δηλ. 50%

β. $P(\, 55 \le B < 75 \,) = \dfrac{24 + 32}{80} = \dfrac{56}{80} = \dfrac{7}{10}$ δηλ. 70%

Θέμα 4^o

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν για να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερα από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερα από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Α. Να βρείτε το μέσο χρόνο και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής των μαθητών. (6μ.)

Β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. (6μ.)

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000, πόσοι μαθητές θα έχουν χρόνο διαδρομής από 14 μέχρι 16 λεπτά; (6μ.)

Δ. Μία μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (C.V.). (7μ.)

απαντήσεις

Α. Αφού η κατανομή είναι κανονική, ο μέσος χρόνος είναι ο διάμεσος χρόνος
άρα $\bar{x} = 12$ λεπτά (αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερα από 12 λεπτά)
το 50 - 16 = 34% των μαθητών χρειάζεται χρόνο από 10 μέχρι 12 λεπτά , κι επειδή στην κανονική κατανομή το 68/2 = 34% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο $(\bar{x}-\sigma, \bar{x})$
είναι: $\bar{x}-\sigma = 10 \Leftrightarrow \sigma = \bar{x}-10 = 12-10 = 2$ λεπτά

Β. $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = 0.1666... \approx 0.167 = 16.7\% > 10\%$ συνεπώς το δείγμα είναι ανομοιογενές

Γ. στην κατανομή του χρόνου που εξετάζουμε είναι: $(14,16) = (\bar{x}+\sigma, \bar{x}+2\sigma)$
και ξέρουμε ότι στην κανονική κατανομή στο $(\bar{x}+\sigma, \bar{x}+2\sigma)$
βρίσκεται περίπου το $\frac{95-68}{2} = 13.5\%$ των παρατηρήσεων
συνεπώς από 14 μέχρι 16 λεπτά θα χρειασθούν: $\frac{13.5}{100} \bullet 4000 = 540$ μαθητές

Δ. η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι: $\bar{x}+5 = 17$ λεπτά ,
ενώ η τυπική απόκλιση (που δεν μεταβάλλεται) είναι: 2 λεπτά ,
συνεπώς ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος είναι 2/17 δηλ. περίπου 11.8% ,
άρα ο C.V. μεταβάλλεται (μειώνεται) κατά 4.9 (περίπου) μονάδες

Θέματα γενικών εξετάσεων 2002

Θέμα 1ο

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου k, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \le \nu$.

Α1. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i, που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1, 2, \dots, k$;
(3μ.)

Α2. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1,2,\dots, k$;
(3μ.)

Α3. Να αποδείξετε ότι:
(4μ.) **i.** $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$.
ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Β1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω
(8μ.) να αποδείξετε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Β2.
α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A
(5μ.) κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των ακολούθων πιθανοτήτων:
(2μ.) **i.** $P(\Omega)$ **ii.** $P(\varnothing)$

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Β1. Θεωρία

Β2. Θεωρία

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
(4μ.)

Β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.
(4μ.)

Γ. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f.
(7μ.)

Δ. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες
(10μ.) στην ευθεία: $y=2x+5$.

απαντήσεις

Α. πρέπει: $x+1\neq 0$, δηλαδή: $x\neq -1$, άρα: $A_f=R-\{-1\}$

Β. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to\to 3}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

Γ. $\forall x\in R-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{(2x)'(x+1)-2x(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Δ. έστω (εφ): $y=\lambda x+\beta$ μία από τις εφαπτόμενες της c_f οι οποίες είναι παράλληλες στην (ε): $y=2x+5$ και $(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής της (εφ) με τη c_f , τότε:

εφ // ε $\Leftrightarrow \lambda=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda=2$

επίσης: $f'(x_o)=\lambda \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_o+1)^2}=2$

$\Leftrightarrow (x_o+1)^2=1$

$\Leftrightarrow x_o+1=-1$ ή $x_o+1=1$

$\Leftrightarrow x_o=-2$ ή $x_o=0$

δηλαδή το σημείο επαφής είναι το: $A(-2,4)$ ή $B(0,0)$

κι επειδή αυτό ανήκει στην (εφ) θα είναι: $4=2(-2)+\beta$ ή $0=2(0)+\beta$

δηλαδή: $\beta=8$ ή $\beta=0$

συνεπώς οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι (εφ$_A$): $y=2x+8$ και (εφ$_B$): $y=2x$

Θέμα 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις ακόλουθες τιμές σε €:

8 , 10 , 13 , 13 , 15 , 16 , 18 , 14 , 14 , 9

Α. (6μ.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Β. (6μ.) Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Γ. (13μ.) Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

απαντήσεις

Α. η μέση τιμή είναι: $\dfrac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10}=\dfrac{130}{10}=13€$

διατάσσουμε τις τιμές: 18, 16, 15, 14, 14, 13, 13, 10, 9, 8 και βρίσκουμε ότι

η διάμεσος είναι: $\dfrac{5^{\eta}\text{τιμή}+6^{\eta}\text{τιμή}}{2}=\dfrac{14+13}{2}=13.5€$

υπάρχουν 2 επικρατούσες τιμές: 13€ και 14€

Β. το εύρος είναι: 18 - 8 = 10€

η διακύμανση είναι:

$$\frac{(18-13)^2+(16-13)^2+(15-13)^2+2(14-13)^2+2(13-13)^2+(10-13)^2+(9-13)^2+(8-13)^2}{10}$$

$$=\frac{25+9+4+2+0+9+16+25}{10}=\frac{90}{10}=9$$

συνεπώς η τυπική απόκλιση είναι: $\sqrt{9}=3€$

ο συντελεστής μεταβολής είναι: $\dfrac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}=\dfrac{3}{13}\approx 0.23$ δηλ. 23%

Γ. αν x_i, ($i=1, 2, \ldots, 10$) είναι οι αρχικές (πριν την έκπτωση) τιμές
και y_i, ($i=1, 2, \ldots, 10$) είναι οι νέες (μετά την έκπτωση) τιμές

τότε είναι: $y_i=0.9x_i$, $\bar{y}=0.9\bar{x}$ και $s_y=|0.9|s_x=0.9s_x$

συνεπώς ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών είναι: $C.V.=\dfrac{s_y}{\bar{y}}=\dfrac{0.9s_x}{0.9\bar{x}}=\dfrac{s_x}{\bar{x}}$

δηλαδή ο ίδιος με τον C.V. των αρχικών τιμών άρα η έκπτωση δεν μεταβάλλει τον C.V.

Θέμα 4ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με: $P(A)+P(B)\neq 2P(A\cap B)$.
Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $f(x)=[\,x-P(A\cup B)\,]^3-[\,x-P(A\cap B)\,]^3$, $x\in R$.

Α. Να δείξετε ότι: $P(A\cap B)\neq P(A\cup B)$.
(5μ.)

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο: $x=\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.
(13μ.)

Γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι: $f(P(A))=f(P(B))$.
(7μ.)

απαντήσεις

Α. παίρνοντας υπόψη ότι: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ έχουμε

$$P(A)+P(B)\neq 2P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B)+P(A\cap B)\neq 2P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)\neq P(A\cap B)$$

Β. $\forall x\in R$:

$$f'(x)=3(x-P(A\cup B))^2-3(x-P(A\cap B))^2$$
$$=3(x-P(A\cup B)+x-P(A\cap B))(x-P(A\cup B)-x+P(A\cap B))$$
$$=3(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B))(P(A\cap B)-P(A\cup B))$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)=0 \qquad (\text{ αφού } P(A\cap B)\neq P(A\cup B)\,)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}=\frac{P(A)+P(B)}{2}$$

επειδή $A\cap B\subseteq A\cup B$ θα είναι $P(A\cap B)\leq P(A\cup B)$
και παίρνοντας υπόψη ότι: $P(A\cup B)\neq P(A\cap B)$, έχουμε τελικά: $P(A\cap B)-P(A\cup B)<0$
συνεπώς:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)<0 \Leftrightarrow x<\frac{P(A)+P(B)}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{P(A)+P(B)}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο: $x=\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

Γ. αφού τα A , B είναι ασυμβίβαστα είναι $P(A\cap B)=0$

$$f(P(A))=f(P(B))$$
$$\Leftrightarrow (P(A)-P(A\cup B))^3-(P(A)-P(A\cap B))^3=(P(B)-P(A\cup B))^3-(P(B)-P(A\cap B))^3$$
$$\Leftrightarrow (-P(B))^3-P^3(A)=(-P(A))^3-P^3(B)$$
$$\Leftrightarrow -P^3(B)-P^3(A)=-P^3(A)-P^3(B) \qquad \text{που ισχύει}$$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2003

Θέμα 1°

Α. (8μ.) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f\,'(x) = 1$.

Β. (6μ.) Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Γ. (6μ.) Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Δ. (5μ.) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f\,'(g(x)) \bullet g\,'(x)$.

δ. Δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. Θεωρία

Δ. **α** Λάθος **β** Σωστό **γ** Σωστό **δ** Σωστό **ε** Λάθος

Θέμα 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

Α. γυναίκα ή φιλόλογος
(5μ.)
Β. γυναίκα και όχι φιλόλογος
(5μ.)
Γ. άνδρας και φιλόλογος
(7μ.)
Δ. άνδρας ή φιλόλογος
(8μ.)

απαντήσεις

Α. $P(\Gamma \cup \Phi) = P(\Gamma) + P(\Phi) - P(\Gamma \cap \Phi) = 55\% + 40\% - 30\% = 65\%$

Β. $P(\Gamma \cap \Phi') = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap \Phi) = 55\% - 30\% = 25\%$

Γ. $P(A \cap \Phi) = P(\Gamma' \cap \Phi) = P(\Phi) - P(\Gamma \cap \Phi) = 40\% - 30\% = 10\%$

Δ. $P(A \cup \Phi) = P(\Gamma' \cup \Phi) = P(\Gamma') + P(\Phi) - P(\Gamma' \cap \Phi) = 45\% + 40\% - 10\% = 75\%$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
(5μ.)

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. R **β.** $(-1, 1)$ **γ.** $R - \{-1, 1\}$ **δ.** $(1, +\infty)$

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
(7μ.)

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -1} [(x+1)f(x)]$
(6μ.)

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο
(7μ.) σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

απαντήσεις

Α. γ.

Β. $\forall x \in A_f :\ f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 - x2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$

Γ. $\lim\limits_{x \to -1} [(x+1)f(x)] = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

Δ. αν ω είναι η ζητούμενη γωνία, τότε: $εφω = λ_{εφ} = f'(0) = -1$, συνεπώς $ω = \dfrac{3π}{4}$

Θέμα 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

Α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
(6μ.)

Β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
(5μ.)

Γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 € η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των ομάδων;
(8μ.)

Δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.
(6μ.)

απαντήσεις

Α. $\bar{x}_A = \dfrac{1+8+9+5+3+4}{6} = 5$, $\delta_A = \dfrac{4+5}{2} = 4.5$, $\bar{x}_B = \dfrac{7+14+6+4+12+5}{6} = 8$, $\delta_B = \dfrac{6+7}{2} = 6.5$

Β. $s_A^2 = \dfrac{(1-5)^2+\ldots+(4-5)^2}{6} = \dfrac{23}{3}$, $s_B^2 = \dfrac{(7-8)^2+\ldots+(5-8)^2}{6} = \dfrac{41}{3}$, άρα: $s_A = \sqrt{\dfrac{23}{3}}$ και $s_B = \sqrt{\dfrac{41}{3}}$

$$CV_A > CV_B \Leftrightarrow \frac{s_A}{\bar{x}_A} > \frac{s_B}{\bar{x}_B} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} > \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{23} > 5\sqrt{41} \Leftrightarrow 64 \bullet 23 > 25 \bullet 41$$

$\Leftrightarrow 1472 > 1025$, που ισχύει

αφού $CV_A > CV_B$ η ομάδα Β είναι περισσότερο ομοιογενής από την Α

Γ. όλες οι παρατηρήσεις της ομάδας Α πολλαπλασιάζονται με το 1.2, συνεπώς: $\bar{x}_A' = 1.2 \cdot \bar{x}_A = 6$

όλες οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξάνονται κατά 5, συνεπώς: $\bar{x}_B' = \bar{x}_B + 5 = 13$

Δ. όλες οι παρατηρήσεις της ομάδας Α πολλαπλασιάζονται με το 1.2, συνεπώς: $s_A' = 1.2 s_A$

όλες οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξάνονται κατά 5, συνεπώς: $s_B' = s_B$

$$CV_A' > CV_B' \Leftrightarrow \frac{s_A'}{\bar{x}_A'} > \frac{s_B'}{\bar{x}_B'} \Leftrightarrow \frac{1.2\sqrt{\frac{23}{3}}}{1.2 \cdot 5} > \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} \Leftrightarrow 13\sqrt{23} > 5\sqrt{41} \Leftrightarrow 169 \bullet 23 > 25 \bullet 41$$

$\Leftrightarrow 3887 > 1025$, που ισχύει

αφού $CV_A' > CV_B'$ η ομάδα Β παραμένει περισσότερο ομοιογενής από την Α

Θέματα γενικών εξετάσεων 2004

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0.
(8μ.)

Β. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o του πεδίου
(5μ.) ορισμού της.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(6μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός.

β. στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση

γ. αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα Α και Β συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης.
(6μ.) Στη Στήλη Ι αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη Στήλη ΙΙ σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.
Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη Ι		Στήλη ΙΙ
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α , Β	1	$A \cap B$
β	πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β	2	$A - B$
γ	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη Στήλη ΙΙ περισσεύει μία σχέση.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α** Λάθος **β** Λάθος **γ** Σωστό

Δ. **α4** **β2** **γ1**

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(10μ.)

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

(15μ.)

απαντήσεις

Α. πρέπει να είναι: $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-\sqrt{3}\neq 0$ δηλ. $x\geq 0$ και $x\neq 3$

συνεπώς: $A_f=[0,3)\cup(3,+\infty)$

Β. $$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 3}(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3}$$

Θέμα 3ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα ποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα σε χιλ. μονάδες v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχν. σε χιλ. μονάδες N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές (10μ.) των αντίστοιχων μεγεθών.

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα (x_i, $f_i\%$) και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων (5μ.)

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$. (5μ.)

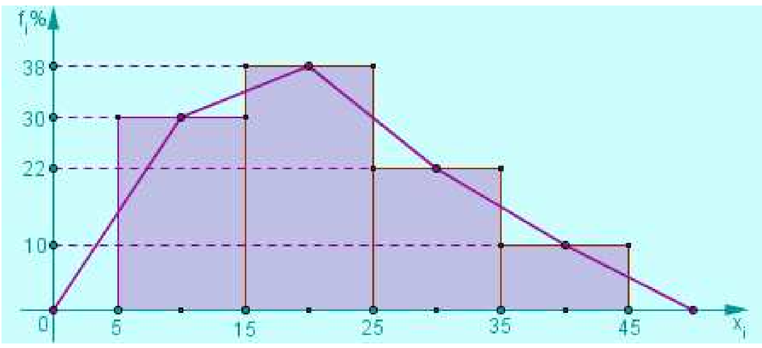
Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων. (5μ.)

απαντήσεις

Α.

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα σε χιλ. μονάδες v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχν. σε χιλ. μονάδες N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)	*10*	60	*30*	*60*	*30*
[15, 25)	*20*	*76*	*38*	*136*	68
[25, 35)	*30*	*44*	*22*	180	*90*
[35, 45)	*40*	*20*	*10*	*200*	*100*
Σύνολο		200	*100*		

Β.



Γ. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{600+1520+1320+800}{200} = \dfrac{4240}{200} = 21{,}2$ χλμ.

Δ. απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων διανύουν: 44 + 20 = 64 χιλ. οχήματα

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 5/2x^2 + x + 10$.
Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = 1/2$ και $P(B) = 1/3$
(9μ.)

Β. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = 2/3$,
(16μ.) να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$
ii. $P(A - B)$
iii. $P[(A \cap B)']$
iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$

απαντήσεις

Α. για κάθε $x \in R$: $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} \Leftrightarrow x = 1/2 \quad ή \quad x = 1/3$$

x	$-\infty$		$1/3$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

συνεπώς: $P(A) = 1/2$ και $P(B) = 1/3$

Β. **i.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1/2 + 1/3 - 2/3 = 1/6$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1/2 - 1/6 = 1/3$

iii. $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/6 = 5/6$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 1/2 + 1/3 - 2/6 = 1/2$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2005

Θέμα 1°

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
(10μ.) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Β. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;
(3μ.)
β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;
(4μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(8μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

δ. Αν $A\subseteq B$ τότε $P(A)>P(B)$.

απαντήσεις

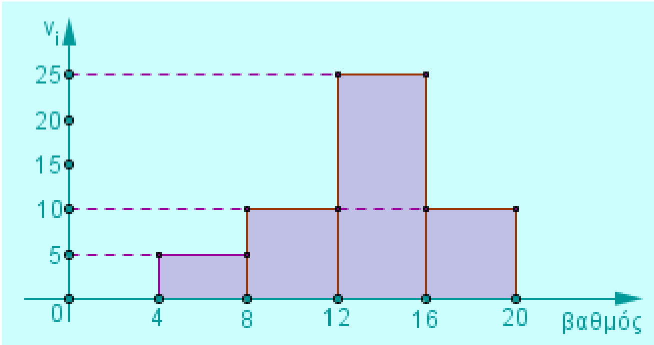
Α. Θεωρία.

Β. Θεωρία.

Γ. **α** Σωστό **β** Λάθος **γ** Λάθος **δ** Λάθος

Θέμα 2ο

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το ακόλουθο ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:
(11μ.)

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

Β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.
(8μ.)

Γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;
(6μ.)

απαντήσεις

Α.

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)	6	5	5/50=0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	10/50=0,2	5+10=15	0,1+0,2=0,3
[12, 16)	14	25	25/50=0,5	15+25=40	0,3+0,5=0,8
[16, 20)	18	10	10/50=0,2	40+10=50	0,8+0,2=1
Σύνολο		v=50	1		

Β. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \dfrac{30+100+350+180}{50} = \dfrac{660}{50} = 13{,}2$

Γ. αυτοί που έχουν μέχρι 8 δηλ. 5 μαθητές και (θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις της κλάσης [8, 12) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες) οι μισοί από αυτούς που έχουν βαθμό από 8 μέχρι 12 δηλ. 5 μαθητές, άρα μέχρι και 10 έχουν συνολικά $5 + 5 = 10$ μαθητές.

Θέμα 3°

Έστω Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

i. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\frac{7}{8}$.

ii. Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \{\kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\}$,

όπου $\kappa = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5}$.

Α. Να βρεθεί το κ.
(5μ.)

Β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(8μ.)

Γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

1. Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.
(6μ.)

2. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.
(6μ.)

απαντήσεις

Α. $\kappa = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{4}$

Β. $(A \cap B) \subseteq B \;\Rightarrow\; P(A \cap B) \le P(B)$ και αφού $P(A \cap B) \ne P(B)$, ενώ $0 \le P(A \cap B), P(B) \le 1$,

θα είναι: $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$

Γ. μας δόθηκε ότι $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, συνεπώς:

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

2. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1, 1).
(7μ.)

Β. Από τυχαίο σημείο Μ(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες
(10μ.) προς τους άξονες xx΄ και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οx, Οy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος Α. έχουν
(8μ.) μέση τιμή $\overline{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.
Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

<u>απαντήσεις</u>

Α. για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

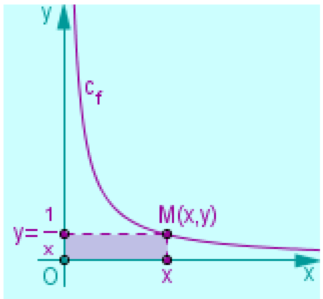
$λ_{εφ} = f'(1) = -1$ και αν (εφ): $y = -x + β$

αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το Λ(1, 1) θα είναι: $1 = -1 + β \Leftrightarrow β = 2$, άρα (εφ): $y = -x + 2$

Β. αν Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου τότε

$\forall x \in (0, +\infty)$: $Π(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$$Π'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^2}$$



x	0		1		+∞
Π΄(x)		-	0	+	
Π(x)		↘	τ.ε.	↗	

συνεπώς οι ζητούμενες συντεταγμένες του Μ είναι: $x = 1$ και $y = \frac{1}{x} = 1$, δηλαδή είναι Μ(1, 1).

Γ. αν X είναι η μεταβλητή με τιμές τις τετμημένες των πέντε σημείων της c_f
και Y η μεταβλητή με τιμές τις τεταγμένες των σημείων αυτών,
τότε είναι: $Y = -X + 2$,
συνεπώς: $\overline{Y} = -\overline{X} + 2 = -3$ και $s_y = |-1| s_x = 2$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2006

Θέμα 1ο

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι
(10μ.)
$$(cf(x))' = cf'(x),\ \ x \in R.$$

Β. α. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;
(3μ.)

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;
(4μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(8μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_o.

β. αν το ενδεχόμενο Α΄, συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α, πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το Α.

γ. για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$.

δ. το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α** Σωστό **β** Σωστό **γ** Λάθος **δ** Λάθος

Θέμα 2°

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο ακόλουθος πίνακας:

αριθμός βιβλίων x_i	αριθμός μαθητών v_i
0	$\alpha+4$
1	$5\alpha+8$
2	4α
3	$\alpha-1$
4	2α
σύνολο	50

Α. να υπολογίσετε την τιμή του α και στη συνέχεια να βρείτε:
(3μ.)

Β. τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.
(7μ.)

Γ. τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.
(7μ.)

Δ. την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.
(8μ.)

απαντήσεις

Α. $(\alpha+4)+(5\alpha+8)+(4\alpha)+(\alpha-1)+(2\alpha)=50 \Leftrightarrow \alpha=3$
οπότε ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι:

x_i	v_i
0	7
1	23
2	12
3	2
4	6
σύνολο	50

Β. $\bar{x}=\dfrac{0\cdot 7+1\cdot 23+2\cdot 12+3\cdot 2+4\cdot 6}{50}=\dfrac{77}{50}$

Γ. $\delta=\dfrac{t_{25}+t_{26}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$

Δ. η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\text{αριθμός μαθητών που διάβασαν 3 ή 4 βιβλία}}{\text{συνολικός αριθμός μαθητών}}=\frac{2+6}{50}=\frac{8}{50}=0{,}16 \ \ (\text{αλλιώς: } 16\%)$$

Θέμα 3^o

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια, $x \in R$.

Α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση.
(7μ.) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

Β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με 1/19 και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα
(8μ.) από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

Γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται
(10μ.) η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

απαντήσεις

Α. $P(A) = \dfrac{x}{x+(x+4)^2}$, $x \geq 0$

Β. $P(A) = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+(x+4)^2} = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 8$

η τιμή $x = 8$ απορρίπτεται γιατί τότε ο όμιλος θα είχε 152 μέλη

η τιμή $x = 2$ είναι δεκτή γιατί δίνει αριθμό μελών 38 (<100) και $P(K) = \dfrac{(2+4)^2}{2+(2+4)^2} = \dfrac{36}{38} = \dfrac{18}{19}$

Γ. η $P(A)$ μεγιστοποιείται για την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται η συνάρτηση

$f(x) = \dfrac{x}{x+(x+4)^2}$, $x \geq 0$

$f'(x) = \dfrac{x+(x+4)^2 - x[1+2(x+4)]}{[x+(x+4)^2]^2} = \dfrac{-x^2+16}{[x+(x+4)^2]^2}$, $x \geq 0$

x	0		4		$+\infty$
f΄	‖	+	0	-	
f	‖	$\nearrow$	max $\frac{1}{17}$	$\searrow$	

συνεπώς η πιθανότητα επιλογής αγοριού παίρνει τη μέγιστη τιμή της ($\frac{1}{17}$) όταν $x = 4$

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + κx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

Α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι
(5μ.) παράλληλη στον άξονα $x΄x$, να αποδείξετε ότι $κ = 2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Β. Μία τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\dfrac{2f΄(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

i. Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.
(10μ.)

ii. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
(10μ.) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $α > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

απαντήσεις

Α. για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $f΄(x) = -4x + κ + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$,

εφ // $x΄x$ $\Leftrightarrow$ $f΄(1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $-4 + κ + 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $κ = 2$ και (εφ): $y = f(1)$ δηλ. $y = 14$

Β. i. αφού η Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\bar{x} = f(1) = 14$ και $s = -\dfrac{2(-13)}{13} = 2$, έχουμε:

τιμές της Χ	8	10	12	14	16	18	20	
ποσοστό παρατηρήσεων	0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%

κι αφού 3 από τις ν παρατηρήσεις είναι ≤ 8 έχουμε: $\dfrac{0{,}15}{100}ν = 3$ $\Leftrightarrow$ $ν = 2000$

στο διάστημα $(10, 16)$ βρίσκεται το 81,5% των 2000 παρατηρήσεων

δηλαδή βρίσκονται: $\dfrac{81{,}5}{100}2000 = 1630$ παρατηρήσεις

ii. $cv = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \approx 14\% > 10\%$ συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

προσθέτοντας α σε κάθε παρατήρηση ο νέος συντελεστής μεταβολής θα είναι: $\dfrac{2}{14+α}$

το δείγμα τότε, θα είναι ομοιογενές αν $\dfrac{2}{14+α} \leq \dfrac{10}{100}$ $\Leftrightarrow$ $20 \leq 14 + α$ $\Leftrightarrow$ $α \geq 6$

άρα η μικρότερη τιμή της παραμέτρου α που πρέπει να προστεθεί στις παρατηρήσεις ώστε να είναι το δείγμα ομοιογενές είναι 6.

Θέματα γενικών εξετάσεων 2007

Θέμα 1°

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει
(8μ.) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Β. α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;
(4μ.)

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν ο ν είναι
(3μ.) άρτιος αριθμός

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(6μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_o) = 0$ για $x_o \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_o$ ελάχιστο

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των ακολούθων συναρτήσεων:
(4μ.)

$f_1(x) = x^{\nu}$, όπου ν φυσικός

$f_2(x) = \ln x$, όπου $x > 0$

$f_3(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$

$f_4(x) = $ συνx, όπου x πραγματικός

απαντήσεις

Α. Θεωρία
Β. Θεωρία
Γ1. α. Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος
Γ2. Θεωρία

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός

Α. Να αποδείξετε ότι $f\,'(x) = f(x) + e^x - 3$
(10μ.)

Β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\,'(x) - e^x}{x^2 - x}$

(15μ.)

απαντήσεις

Α. $\forall x \in R$: $f\,'(x) = e^x + xe^x = xe^x + 3 + e^x - 3 = f(x) + e^x - 3$

Β. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\,'(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + xe^x - e^x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^o}{-1} = -1$

Θέμα 3ο

΄Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει
$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω:
$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x+1, 2x^2 + x - 2, -2x+1\}$ όπου $x \in R$

Α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω,
(7μ.) δηλαδή οι $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$

Β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$
(8μ.)

Γ. Για $x = -1$ να δειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$
(10μ.) και να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$

απαντήσεις

Α. $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow 11P(5) = 1 \Leftrightarrow P(5) = \frac{1}{11}$

συνεπώς: $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \frac{2}{11}$ και $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{11}$

Β. πρέπει καταρχήν $-1 \in A$ δηλαδή $x^2 - x - 3 = -1$ δηλαδή $x^2 - x - 2 = 0$ οπότε $x = -1$ ή $x = 2$
αν $x = -1$: $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$ οπότε $A \cap B = \{-1, 3\}$
αν $x = 2$: $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 3, 8, -3\}$ οπότε $A \cap B = \{3\}$
άρα είναι: $x = -1$

Γ. $P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$

$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$

$P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{11}$

$$\begin{aligned} P(A \cup B') &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') \\ &= P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) \\ &= \frac{5}{11} + 1 - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{7}{11} \end{aligned}$$

Θέμα 4ο

Θεωρούμε δύο δείγματα Α και Β με παρατηρήσεις:
Δείγμα Α: 12, 18, t_3, t_4, ..., t_{25}
Δείγμα Β: 16, 14, t_3, t_4, ..., t_{25} Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$

Α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$ και $\bar{x}_B$ των δύο δειγμάτων Α και Β αντίστοιχα είναι
(7μ.) $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$

Β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Α και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Β,
(8μ.) να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = \dfrac{16}{25}$

Γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Α είναι ίσος με $CV_A = \dfrac{1}{15}$,
(10μ.) να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος Β

απαντήσεις

Α. $\bar{x}_A = \dfrac{12+18+t_3+\dots+t_{25}}{25} = \dfrac{30+345}{25} = \dfrac{375}{25} = 15$

$\bar{x}_B = \dfrac{16+14+t_3+\dots+t_{25}}{25} = \dfrac{30+345}{25} = \dfrac{375}{25} = 15$

Β. $s_A^2 = \dfrac{(12-15)^2+(18-15)^2+(t_3-15)^2+\dots+(t_{25}-15)^2}{25} = \dfrac{18+(t_3-15)^2+\dots+(t_{25}-15)^2}{25}$

$s_B^2 = \dfrac{(16-15)^2+(14-15)^2+(t_3-15)^2+\dots+(t_{25}-15)^2}{25} = \dfrac{2+(t_3-15)^2+\dots+(t_{25}-15)^2}{25}$

άρα: $s_A^2 - s_B^2 = \dfrac{16}{25}$

Γ. $CV_A = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow \dfrac{s_A}{\bar{x}_A} = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow s_A = 1$

$s_A^2 - s_B^2 = \dfrac{16}{25} \Leftrightarrow s_B^2 = 1 - \dfrac{16}{25} \Leftrightarrow s_B^2 = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow s_B = \dfrac{3}{5}$

συνεπώς: $CV_B = \dfrac{s_B}{\bar{x}_B} = \dfrac{\frac{3}{5}}{15} = \dfrac{1}{25}$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2008

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c (όπου x είναι πραγματικός
(8μ.) αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$

Β. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X,
(7μ.) αν $\overline{x} > 0$ και πώς αν $\overline{x} < 0$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

δ. Αν x_o είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim\limits_{x \to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός

Α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1}$

(7μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x)=2-x$

(9μ.)

Γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$

(9μ.)

απαντήσεις

Α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

Β. $e^x f'(x)=e^x\dfrac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{(2-x)e^x}{e^x}=2-x$

Γ. $\forall x\in R$: $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$ κι αφού $\forall x\in R$: $e^x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<2$ $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>2$

άρα η f έχει μέγιστο για $x=2$ το $f(2)=\dfrac{1}{e^2}$

Θέμα 3°

Για δύο τύπους μπαταριών Α, Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Α	Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

Α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β
(5μ.)

Β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38€ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40€,
(5μ.) ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας)

Γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις s_A και s_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών
(7μ.)

Δ. Να βρείτε <u>ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β</u>** παρουσιάζει τη μεγαλύτερη
(8μ.) ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του (δίνεται ότι: $\sqrt{11} \cong 3.3$)

** εδώ οι θεματοδότες θέλω να πιστεύω ότι εννοούν <u>ποιο από τα δύο δείγματα</u> (για όσους εννοούν) αλλά καλύτερα να μη το ψάχνουμε όσο η πατρίδα κοιμάται αγκαλιά με την καλή της μοίρα...

απαντήσεις

Α. $\bar{x}_A = \dfrac{20+26+24+22+18}{5} = 22$ χιλ.ώρες $\qquad \bar{x}_B = \dfrac{26+32+19+20+23}{5} = 24$ χιλ.ώρες

Β. μια μπαταρία τύπου Α αναμένεται να στοιχίσει $\dfrac{38}{22} \cong 1.73$€/1000h

μια μπαταρία τύπου Β αναμένεται να στοιχίσει $\dfrac{40}{24} \cong 1.67$€/1000h

συνεπώς συμφέρει η αγορά μπαταρίας τύπου Β

Γ. $s_A^2 = \dfrac{(20-22)^2+(26-22)^2+(24-22)^2+(22-22)^2+(18-22)^2}{5} = \dfrac{40}{5} = 8$ άρα: $s_A = \sqrt{8}$

$s_B^2 = \dfrac{(26-24)^2+(32-24)^2+(19-24)^2+(20-24)^2+(23-24)^2}{5} = \dfrac{110}{5} = 22$ άρα: $s_B = \sqrt{22}$

Δ. $\dfrac{CV_A}{CV_B} = \dfrac{\frac{\sqrt{8}}{22}}{\frac{\sqrt{22}}{24}} = \dfrac{24\sqrt{8}}{22\sqrt{22}} = \dfrac{\sqrt{4608}}{\sqrt{10648}} < 1$ άρα: $CV_A < CV_B$

συνεπώς μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής τους παρουσιάζει το δείγμα μπαταριών τύπου Α

Θέμα 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

Α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει (7μ.) την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο
(9μ.) Β: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».
Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$ όπου x πραγματικός αριθμός και Β (9μ.) το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

απαντήσεις

Α. έστω το ενδεχόμενο Α: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την α»
σύμφωνα με τα δεδομένα είναι: $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B') = \frac{3}{10}$

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A \cap B') = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Β. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B') = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

επειδή $A \cap B \subseteq B$ είναι $P(A \cap B) \leq P(B)$ δηλ. $\frac{1}{5} \leq P(B)$

επειδή $B \subseteq A' \cup B$ είναι $P(B) \leq P(A' \cup B)$ δηλ. $P(B) \leq \frac{7}{10}$ άρα: $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

Γ. $\forall x \in R$: $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

το τριώνυμο $f'(x)$ έχει: $\Delta = 1 - 12P(B) \leq 1 - 12(\frac{1}{5})$ (λόγω **Β.**) $= -\frac{7}{5} < 0$ άρα είναι θετικό $\forall x \in R$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επομένως δεν έχει ακρότατα

Θέματα γενικών εξετάσεων 2009

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β
(10μ.) ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Β. Αν x_1, x_2, …, $x_κ$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος
(5μ.) μεγέθους ν $(κ \leq ν)$, να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $I = 1, 2, …, κ$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι
$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$

β. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι $A - B = A \cap B'$

γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = ημx$ ισχύει ότι $(ημx)' = -συνx$

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

Θέμα 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής Χ με αντίστοιχες συχνότητες v_i. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη.
Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\overline{x} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

Α. Να αποδείξετε ότι $v_2 = 7$.
(9μ.)

Β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.
(9μ.)

Γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής Χ είναι ομοιογενές.
(7μ.) (Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$)

απαντήσεις

Α. $\overline{x} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v_1 + \ldots + v_4} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{13 + v_2} = 4 \Leftrightarrow v_2 = 7$

Β. $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i (x_i - \overline{x})^2}{v_1 + \ldots + v_4} = \dfrac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{20} = \dfrac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \dfrac{98}{20} = 4.9$

Γ. $C.V. = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{\sqrt{4.9}}{4} \approx \dfrac{2.2}{4} = 0.55 > 0.1$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + αx - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in R$

Α. Να δείξετε ότι $α = 9$
(7μ.)

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}$
(8μ.)

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία
(10μ.) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

απαντήσεις

Α. $\forall x \in R$: $f'(x)=3x^2-12x+α$
$f''(x)=6x-12$,
συνεπώς: $2f''(x)+f'(x)+15=3x^2 \Leftrightarrow 12x-24+3x^2-12x+α+15=3x^2$
$\Leftrightarrow α=9$

Β. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-3)}{(x+1)}=-3$$

Γ. αν $Α(x_o, f(x_o))$ είναι το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης η οποία έχει εξίσωση (εφ): $y=λx+β$, τότε:

αφού η εφ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$ θα έχουμε
$λ=-3 \Leftrightarrow f'(x_o)=-3 \Leftrightarrow 3x_o^2-12x_o+9=-3 \Leftrightarrow 3(x_o^2-4x_o+4)=0 \Leftrightarrow 3(x_o-2)^2=0 \Leftrightarrow x_o=2$

κι αφού $Α(2, -5) \in$(εφ) θα έχουμε
$-5=(-3)2+β \Leftrightarrow β=1$

άρα (εφ): $y=-3x+1$

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2,\ x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα
(6μ.) στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.
(6μ.)

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι
(7μ.) $R = 3 + \ln\frac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά
(6μ.) ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega \ /\ R + \delta < -2\}$

απαντήσεις

Α. α. $\forall x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > 2$$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο (0, 2] και γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$ άρα σύμφωνα και με τα προηγούμενα συμπεράσματα η f έχει στο 2 μέγιστο το $f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$

Β. α. αφού η f είναι γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ και $2 < 3 < 4 < 5 < 8$
είναι: $f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)$, συνεπώς:

$$R = f(2) - f(8) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) = 3 + \ln\frac{1}{4}$$

ενώ αφού στις 5 παρατηρήσεις διάμεσος είναι η τρίτη κατά τάξη μεγέθους, θα είναι:
$\delta = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$

β. $R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln 4^{-1} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow 3 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$
$\Leftrightarrow 1 < \lambda < 5$

άρα $A = \{2, 3, 4\}$ και $P(A) = \frac{3}{100}$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2010

Θέμα Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος
(7μ.) μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\bar{x}$, $t_2-\bar{x}$, …, $t_\nu-\bar{x}$.
Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν

Α2. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος
(4μ.) μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας),
να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Α3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.
(4μ.) Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_o όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε

$$\lim_{x\to x_o}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_o} f(x)\lim_{x\to x_o} g(x)$$

β. Για κάθε $x>0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

γ. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_o είναι $\upsilon(t_o)=f'(t_o)$

δ. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

ε. Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1,\ x\in R$

Β1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$
(10μ.)

Β2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης
(10μ.) της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=0$

Β3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$
(5μ.)

απαντήσεις

Α. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$
$$=1$$

Β. $\forall x\in R:\ f'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=0$ είναι: $f'(0)=-1$

Γ. αν ω είναι η ζητούμενη γωνία τότε έχουμε: $εφω=f'(0)\ \Leftrightarrow\ εφω=-1$
άρα $ω=135^o$

Θέμα Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
[0 - …)	…	20
[… - …)	6	40
[… - …)	…	45
[… - …)	…	30
[… - …)	…	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4
(6μ.)

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο,
(8μ.) να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές
(5μ.)

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα
(6μ.) του ενδεχομένου A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά »

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{v}\right]$ (;) !

απαντήσεις

Γ1. αφού η κλάση [c - 2c) έχει κέντρο 6 θα είναι $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$

Γ2. ο πίνακας που μας δόθηκε συμπληρωμένος (και με τις στήλες υπολογισμών) είναι ο:

κλάση	κέντρο (x_i)	συχνότητα (v_i)	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[0 - 4)	2	20	40	1280
[4 - 8)	6	40	240	640
[8 - 12)	10	45	450	0
[12 - 16)	14	30	420	480
[16 - 20)	18	25	450	1600
σύνολο		v=160	$\Sigma x_i v_i = 1600$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 v_i = 4000$

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10$ $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{4000}{160} = 25$ άρα $s = 5$

Γ3. ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 0.5 > 0.1$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ4. οι παχύσαρκοι που χάσανε από 7 μέχρι 14 κιλά είναι αυτοί που χάσανε από 7 μέχρι 8 κιλά μαζί με αυτούς που χάσανε από 8 μέχρι 12 κιλά κι αυτούς που χάσανε από 12 μέχρι 14 κιλά και θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις,

έχουμε συνολικά: $\frac{1}{4}40 + 45 + \frac{1}{2}30 = 70$ παχύσαρκους

συνεπώς: $P(A) = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$

Θέμα Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B)$, $x>P(A)$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
(13μ.)

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o=5/3$ με τιμή $f(x_o)=0$,
(2μ.) να αποδείξετε ότι: $P(A)=2/3$ και $P(B)=1/2$

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A\cup B)=5/6$, να βρείτε:

Δ3. την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B
(5μ.)

Δ4. την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B
(5μ.)

απαντήσεις

Δ1. $\forall x\in(P(A),+\infty)$: $f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))=\frac{(1-x+P(A))(1+x-P(A))}{x-P(A)}$

κι αφού: $x-P(A)>0$ και $1+x-P(A)>0$, είναι:
$\forall x\in(P(A),1+P(A))$: $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(P(A),1+P(A)]$
$\forall x\in(1+P(A),+\infty)$: $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1+P(A),+\infty)$
και η f έχει στο $1+P(A)$ μέγιστο το $f(1+P(A))=-\frac{1}{2}+P(B)$

Δ2. $1+P(A)=\frac{5}{3}\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$

$f(1+P(A))=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+P(B)=0 \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

Δ3. η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B είναι:
$P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cup B))=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$

Δ4. η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα είναι:
$P((A-B)\cup(B-A))=P(A\cup B)-P(A\cap B)=2P(A\cup B)-P(A)-P(B)=2\frac{5}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2011

Θέμα Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
(7μ.) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα ;
(4μ.)

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος;
(4μ.)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη
(10μ.) Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις

β. Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R\approx 6\bar{x}$

γ. Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

δ. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα

ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

Θέμα Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα.

Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A)=4\lambda^2$

και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου $\lambda\in R$.

Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών ισχύει $64<N(\Omega)<72$, τότε

Β1. Να δείξετε ότι $N(\Omega)=68$
(6μ.)

Β2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ
(8μ.)

Β3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί
(6μ.)

Β4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα . Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη
(5μ.)

απαντήσεις

Β1. $P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$

$64<N(\Omega)<72\Leftrightarrow 16<N(M)<18\Leftrightarrow N(M)=17$ (αφού $N(M)\in N$) οπότε $N(\Omega)=68$

Β2. $P(A)+P(M)+P(K)=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ (αδύνατο αφού τότε $P(A)=4>1$) ή $\lambda=\frac{1}{4}$

Β3. ήδη βρήκαμε ότι $N(M)=17$

$P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(A)=17$ και $N(K)=N(\Omega)-N(A)-N(M)=34$

Β4. τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι προφανώς ξένα, συνεπώς $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Θέμα Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις
$Α(8, 8)$ $Β(10, 10)$ $Γ(12, 20)$ $Δ(14, y_Δ)$ $Ε(16, y_Ε)$ $Ζ(18, 10)$ $Η(20, 0)$
όπου $y_Δ$, $y_Ε$ οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ

Γ1. (7μ.) Να υπολογιστούν οι τεταγμένες $y_Δ$ και $y_Ε$ των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Γ2. (3μ.) Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$

Γ3. (7μ.) Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους

Γ4. (4μ.) Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό

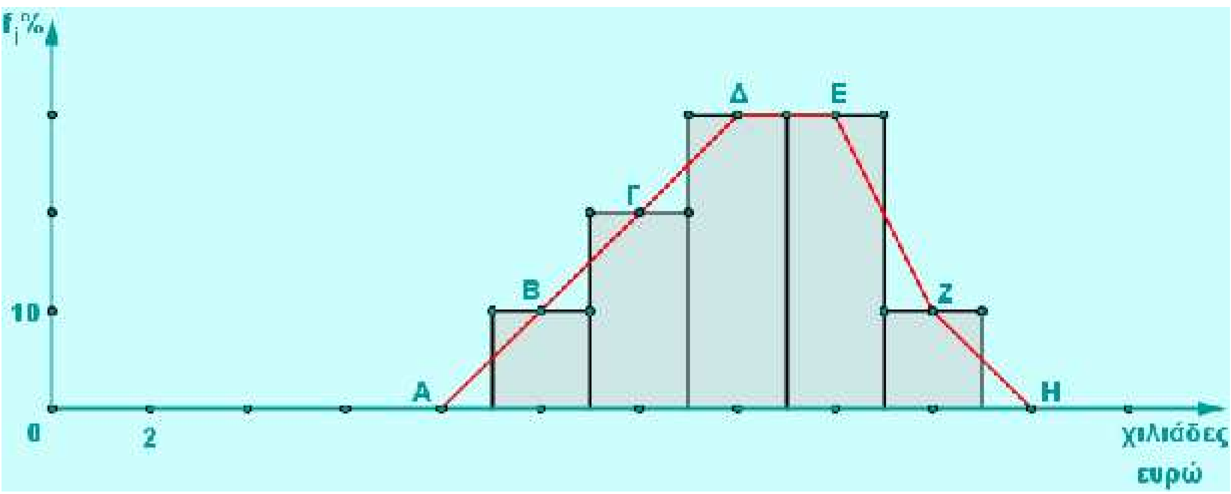
Γ5. (4μ.) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα

απαντήσεις

Γ1. αφού οι σχετικές συχνότητες είναι οι τεταγμένες των Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και $y_Δ=y_Ε$ έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 100 \Leftrightarrow 40 + y_Δ + y_Ε = 100 \Leftrightarrow 2y_Δ = 60 \text{ άρα } y_Δ = y_Ε = 30$$

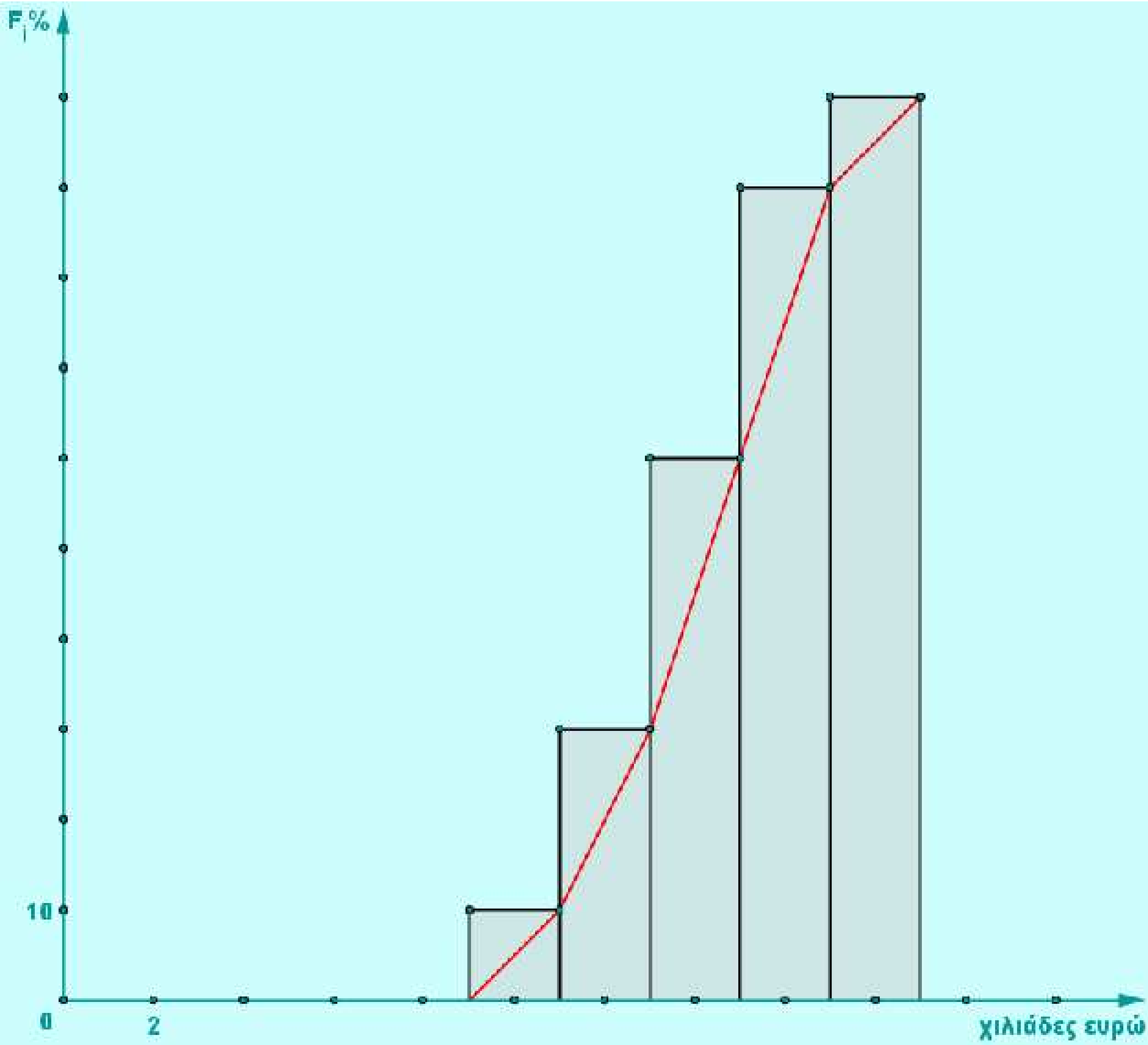
Γ2.



Γ3.

πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ	κέντρο κλάσης x_i	σχετική συχνότητα f_i%
[9 - 11)	10	10
[11 - 13)	12	20
[13 - 15)	14	30
[15 - 17)	16	30
[17 - 19)	18	10
σύνολο		100

Γ4.



όπως προκύπτει από το ogive το 40% των πωλητών θα πάρει το bonus

Γ5.

σύμφωνα με τα δεδομένα το πλήθος του δείγματος είναι 80, συνεπώς το bonus θα πάρουν

$$\frac{40}{100}80 = 32 \text{ πωλητές}$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{1}{3}x(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}$, $x\in R$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία
(8μ.)

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ και P (A), P (B) είναι οι
(8μ.) θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A-B)$, $P(A\cup B)$, $P(B-A)$

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3})}$, $x\in R$

α. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=h(x)
(3μ.)

β. Αν $x_1<x_2<x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i=2x_i+1$, $i=1,2,3$ οι συχνότητες
(6μ.) των παρατηρήσεων x_i, τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων

απαντήσεις

Δ1. $\forall x\in R$: $f'(x)= \ldots = e^{\frac{1}{3}x(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15})$

x	$-\infty$		1/3		2/5		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1/3]$, $[2/5, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1/3, 2/5]$

Δ2. αφού $A\subseteq B$ (οπότε $P(A)\le P(B)$) σύμφωνα με το Δ1 είναι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ και

$P(A\cap B)=P(A)=1/3$
$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)=0$
$P(A\cup B)=P(B)=2/5$
$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)=1/15$

Δ3. $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\frac{x^2-5x+6}{2}=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=3$

Δ4. είναι $x_1=0$ $v_1=1$, $x_2=2$ $v_2=5$, $x_3=3$ $v_3=7$ συνεπώς $\overline{x}=\frac{0\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 7}{1+5+7}=\frac{31}{13}$

Θέματα γενικών εξετάσεων 2012

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι:
(7μ.) $$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),\ x\in R$$

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας
(4μ.) ενός ενδεχομένου Α.

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ,
(4μ.) αν $\bar{x}>0$ και πώς αν $\bar{x}<0$;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο
(10μ.) γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή
ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων

β. Η παράγωγος της f στο x_o εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_o$

γ. Αν Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ τότε ισχύει ότι: $P(A)>P(B)$

δ. Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς

ε. $\lim\limits_{x\to x_o} \eta\mu x=\eta\mu x_o$, $x_o\in R$

απαντήσεις

Α1. Θεωρία

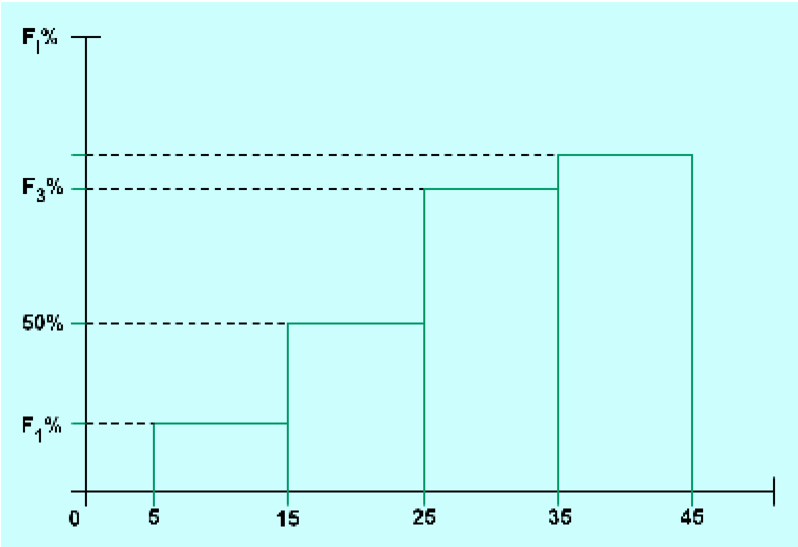
Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

Θέμα Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5, 45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό,
(4μ.) να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (3μ.)
(8μ.) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (5μ.).

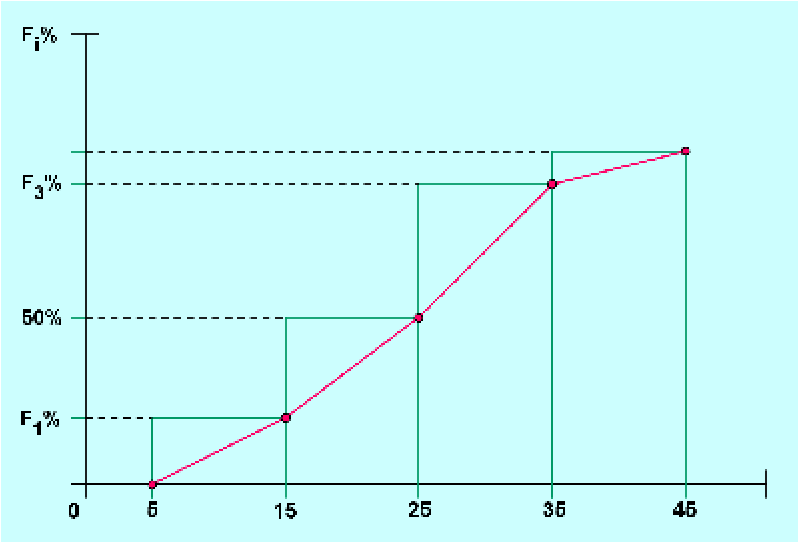
Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, ·)		α + 4			
[· , ·)		3α - 6			
[· , ·)		2α + 8			
[· , 45)		α - 2			
Σύνολο					

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.
(8μ.) (Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \cong 9.17$)

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το
(5μ.) μαθηματικό πρόβλημα.

απαντήσεις

Β1. σύμφωνα με το ακόλουθο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι: δ=25



Β2. αφού η διάμεσος είναι 25 θα ισχύει: $\nu_1+\nu_2 = \nu_3+\nu_4 \Leftrightarrow \alpha+4+3\alpha-6 = 2\alpha+8+\alpha-2 \Leftrightarrow \alpha = 8$
συνεπώς η κατανομή έχει τον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3. $\bar{x} = \dfrac{10\bullet 12+20\bullet 18+30\bullet 24+40\bullet 6}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$

$S^2 = \dfrac{(10-24)^2\bullet 12+(20-24)^2\bullet 18+(30-24)^2\bullet 24+(40-24)^2\bullet 6}{60} = 84$ συνεπώς:

$S = \sqrt{84} \cong 9.17$

Β4. υποθέτοντας ότι οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις,
από 37 μέχρι 45 λεπτά χρειάστηκαν τα $\dfrac{8}{10}$ του $f_4\%$ δηλ. το 8% των μαθητών

Θέμα Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι βέβαιο.
(7μ.)

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν=3
(6μ.)

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.
(6μ.)

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.
(6μ.)

απαντήσεις

Γ1. η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι: $P(\Gamma\cup I)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=1$

συνεπώς αυτό είναι βέβαιο

Γ2. $P(\Gamma\cup I)=1 \Leftrightarrow P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)=1 \Leftrightarrow \frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=1 \Leftrightarrow 3\nu+1=\nu^2+1$

$\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0$

$\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0$

$\Leftrightarrow \nu=3$ (αφού $\nu\geq 3$)

Γ3. η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι:
$P((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma))=P(\Gamma\cup I)-P(\Gamma\cap I)=1-\frac{4}{10}=\frac{3}{5}$

Γ4. $P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)}=\frac{4}{10} \Leftrightarrow N(\Omega)=80$ δηλ. η τάξη έχει 80 μαθητές

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
(5μ.)

Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το
(7μ.) Μ προς τον άξονα y΄y τέμνει τον ημιάξονα Οx στο σημείο Κ(x, 0) και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Οy στο σημείο Λ(0, f(x)). Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Δ3. Έστω η ευθεία ε: $y=\lambda x+\beta$, $\beta\neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της
(8μ.) γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1,f(1)). Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i,y_i), i=1,2,…, 10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα,
(5μ.) τέτοια ώστε $A\neq\varnothing$ και $A\cap\beta\neq\varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι $f(P(A))+f(P(A\cap B))\geq 2f(P(A\cup B))$.

απαντήσεις

Δ1. $\forall x\in(0,+\infty)$: $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(1+\ln^2 x)}{x^2}=-\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2}$

x	0		e		+∞
f΄(x)	‖	-	0	-	
f(x)	‖	↘		↘	

συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα

Δ2. $\forall x\in(0,+\infty)$: $E(x)=(OK)(O\Lambda)=|x||f(x)|=1+\ln^2 x$

$$E'(x)=\frac{2\ln x}{x}$$

x	0		1		+∞
Ε΄(x)	‖	-	0	+	
Ε(x)	‖	↘	min	↗	

συνεπώς το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν x=1 δηλ. όταν το ΟΚΜΛ γίνει τετράγωνο (αφού τότε είναι: ΟΚ=ΟΛ=1)

Δ3. ε//εφ $\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon}=\lambda_{\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow \lambda=f'(1)=1$ συνεπώς είναι ε: y=-x+β

$\overline{y} = -\overline{x} + \beta = -10 + \beta$ ενώ $s_y = |-1| s_x = 2$

το δείγμα είναι ομοιογενές όταν $CV \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\overline{y}|} \le \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \le \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow |-10+\beta| \ge 20$

$\Leftrightarrow -10+\beta \ge 20$ ή $-10+\beta \le -20$

$\Leftrightarrow \beta \ge 30$ ή $\beta \le -10$

Δ4. αφού $A \neq \varnothing$ και $A \cap \beta \neq \varnothing$ είναι: $0 < P(A) \le 1$ και $0 < P(A \cap B) \le 1$

$A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B)$ κι αφού η f είναι γν. φθίνουσα: $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$(1)

$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ κι αφού η f είναι γν. φθίνουσα: $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$(2)

(1)+(2) $\Rightarrow f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$