ταυτότητες…

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \qquad \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad \Rightarrow \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \right) = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$
- $\alpha^\nu-\beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots\beta^{\nu-1}) \qquad \forall \nu\in N$
- $\alpha^\nu+\beta^\nu = (\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\ldots+\beta^{\nu-1})$ $\quad \forall\nu$ περιττό !

διάταξη…

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta < 0$
- $\alpha\beta > 0$ και $\alpha \le \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \ge \frac{1}{\beta}$
- $\alpha \le \beta$ και $\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \le \gamma$
- $\alpha \le \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } \gamma > 0: & \alpha\gamma \le \beta\gamma \\ \text{αν } \gamma < 0: & \alpha\gamma \ge \beta\gamma \end{cases}$
- $\alpha \le \beta$ και $\gamma \le \delta \Rightarrow \alpha+\gamma \le \beta+\delta$
- $0 < \alpha \le \beta$ και $0 < \gamma \le \delta \Rightarrow \alpha\gamma \le \beta\delta$

δυνάμεις…

- $\alpha^0 = 1 \ (\alpha\neq 0)$
- $\alpha^1 = \alpha$
- $\alpha^\nu = \alpha^{\nu-1}\alpha \ (\nu\in N^*)$
- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$
- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
- $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
- $\alpha^\mu\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$

αναλογίες…

- $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow$
  - $\alpha\delta=\beta\gamma$
  - $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}$
  - $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\delta}{\gamma}$
  - $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$
  - $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}=\dfrac{\alpha_3}{\beta_3}=\ldots=\lambda \Rightarrow \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots}=\lambda$

απόλυτες τιμές…

- $|x|=\begin{cases}-x\,, & x\le 0\\ x\,, & x\ge 0\end{cases}$
- $|x|\ge 0$
- $|x|\ge x$
- $|x|\ge -x$
- $|-x|=|x|$
- $|x|^2=x^2$
- $|x|=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-\alpha$
- $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-\alpha$
- $|xy|=|x||y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$
- $\big||x|-|y|\big| \le |x+y| \le |x|+|y|$ *(τριγωνική ανισότητα)*

- αν $\alpha>0$: ▶ $|x|\le\alpha \Leftrightarrow -\alpha\le x\le\alpha$ ▶ $|x|\ge\alpha \Leftrightarrow x\le-\alpha$ ή $x\ge\alpha$
- αν $\alpha<0$: ▶ $|x|\le\alpha$, αδύνατη ▶ $|x|\ge\alpha$, ισχύει $\forall x\in R$

ριζικά…

- $\forall\alpha\in[0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικός $x\in[0,+\infty)$: $x^\nu=\alpha$ $(\nu\in N)$ και $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$

- $\sqrt{x^2}=|x|$
- $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}$
- $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$
- $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
- $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

η εξίσωση $x^\nu=\alpha$…

α $(\in R)$	ν $(\in N)$	ρίζες της $x^\nu=\alpha$
$\alpha=0$	$\nu\in N$	0
$\alpha>0$	ν άρτιος	$-\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu]{\alpha}$
	ν περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha<0$	ν άρτιος	δεν υπάρχουν
	ν περιττός	$\sqrt[\nu]{-\alpha}$

εξισώσεις και ανισώσεις 1^{ου} βαθμού...

▶ $\alpha x=\beta$
- $\alpha\neq0$ → $x=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (μοναδική λύση)
- $\alpha=0$
  - $\beta\neq0$ → αδύνατη (καμία λύση)
  - $\beta=0$ → αόριστη (άπειρες λύσεις)

▶ $\alpha x<\beta$
- $\alpha>0$ → $x<\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $\alpha=0$
  - $\beta\leq0$ → αδύνατη
  - $\beta>0$ → $x\in R$
- $\alpha<0$ → $x>\dfrac{\beta}{\alpha}$

▶ $\alpha x+\beta$:

	$-\infty$		$-\dfrac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
$\alpha>0$		-	0	+	
$\alpha<0$		+	0	-	

το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq0)$...

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	ρίζες	μορφή	πρόσημο
$\Delta>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha(x-x_1)(x-x_2)$	$-\infty$ … x_1 (0) … x_2 (0) … $+\infty$: ομόσημο του α, ετερόσημο του α, ομόσημο του α
$\Delta=0$	$\rho=x_1=x_2=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$\alpha(x-\rho)^2$	$-\infty$ … ρ (0) … $+\infty$: ομόσημο του α, ομόσημο του α
$\Delta<0$	———	———	$-\infty$ … $+\infty$: ομόσημο του α

- ♦ $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ♦ $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$
- ♦ αν $x+y=S$ και $xy=P$
  τότε οι x,y (αν υπάρχουν) είναι οι ρίζες της: $\omega^2-S\omega+P=0$ και αντιστρόφως

πολυώνυμα...

- δύο πολυώνυμα είναι **ίσα** όταν έχουν ίσους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων

- η **ταυτότητα της διαίρεσης** του πολυωνύμου P(x) με το μη μηδενικό πολυώνυμο Q(x) είναι:

$$P(x) = Q(x)\pi(x)+\upsilon(x)$$

βαθμόςP(x)=βαθμόςQ(x)+βαθμόςπ(x) και βαθμόςυ(x)<βαθμόςQ(x) ή υ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο

- το **υπόλοιπο** της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$ είναι $\upsilon = P(\rho)$

- ένα πολυώνυμο P(x) έχει **παράγοντα** το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του P(x)

- αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$, είναι ρίζα της: $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o = 0$ με ακέραιους συντελεστές, τότε ο **ρ είναι διαιρέτης του α_o**

- το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ μπορούν να βρεθούν εύκολα με το σχήμα του Horner

για παράδειγμα, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα του Horner:
$2x^4-x^2+3x+1=(x+2)(2x^3-4x^2+7x-11)+23$

2	0	-1	3	1	
	-4	8	-14	22	-2
2	-4	7	-11	23	

2x2 γραμμικά συστήματα...

$$(\Sigma):\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1\\ \alpha_2x+\beta_2y=\gamma_2\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1$$

- **αν $D \neq 0$:** το (Σ) έχει **μοναδική λύση** την: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$

- **αν $D = 0$:** το (Σ) είναι **αδύνατο** (καμία λύση) **ή αόριστο** (άπειρες λύσεις), ειδικότερα:

  - αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$: το (Σ) είναι αδύνατο

  - αν $D_x = D_y = 0$: το (Σ) είναι αόριστο
    εκτός από την περίπτωση που είναι: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ και $\gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$
    οπότε το (Σ) είναι αδύνατο

η ευθεία…

► γενική μορφή εξίσωσης ευθείας (ε): $Αx+Βy+Γ=0$ (όπου: $Α\neq 0$ ή $Β\neq 0$)

► ειδικές μορφές:

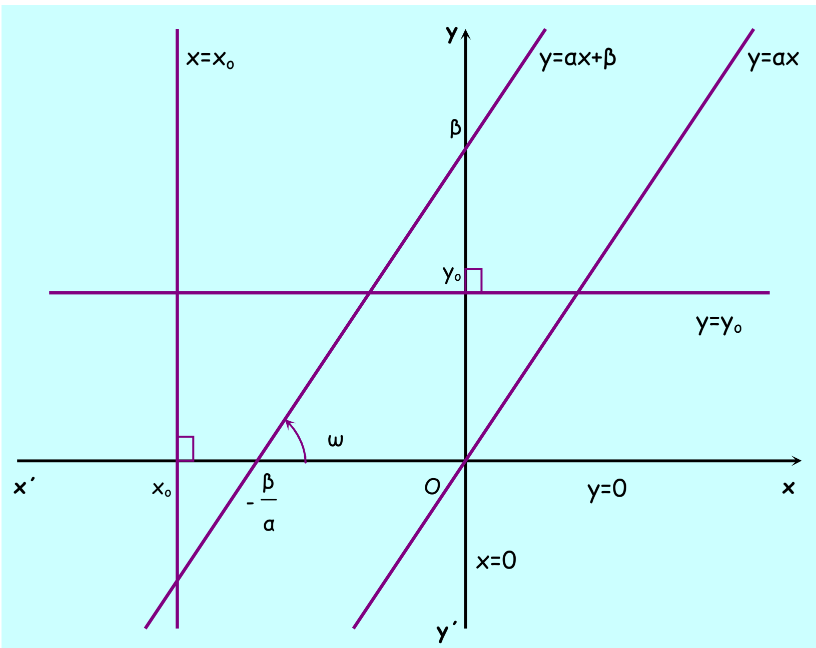
- $y=αx+β$ ο α καθορίζει τη διεύθυνση της ευθείας ε, συμβολίζεται **$λ_ε$** και ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ε
  αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ε με τον x΄x τότε είναι: **$α=λ_ε=εφω$**
  ο β καθορίζει το σημείο τομής της ε με τον y΄y
- $y=αx$ διέρχεται από το $Ο(0,0)$
- $y=y_0$ παράλληλη στον x΄x, τέμνει τον y΄y στο $(0,y_0)$
- $x=x_0$ παράλληλη στον y΄y, τέμνει τον x΄x στο $(x_0,0)$

► η εξίσωση **κάθε** ευθείας έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή: **$y=αx+β$**
και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx+β$
εκτός από την **$x=x_0$** η οποία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης και ούτε μπορεί να πάρει τη μορφή $y=αx+β$ αφού **δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης**

► για να σχεδιάσουμε την $y=αx+β$ χρειαζόμαστε 2 σημεία της συνήθως τα $Α(-β/α,0)$ & $Β(0,β)$

► αν $(ε_1)$: $y=α_1x+β_1$ και $(ε_2)$: $y=α_2x+β_2$ είναι δύο ευθείες, τότε:

- αν **$α_1\neq α_2$** οι $ε_1,ε_2$ **τέμνονται** (ειδικά, αν **$α_1α_2=-1$** οι $ε_1,ε_2$ είναι **κάθετες**)
  συνεπώς το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μοναδική λύση (το σημείο τομής τους)
- αν **$α_1=α_2$** και **$β_1\neq β_2$** οι $ε_1,ε_2$ είναι **παράλληλες**
  συνεπώς το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αδύνατο (δεν έχει καμία λύση)
- αν **$α_1=α_2$** και **$β_1=β_2$** οι $ε_1,ε_2$ **ταυτίζονται**
  συνεπώς το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αόριστο (έχει άπειρες λύσεις)



πρόοδοι...

▶ ν-οστός όρος αριθμητικής προόδου με διαφορά ω : $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\omega=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

▶ οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι **αριθμητικής προόδου** αν και μόνο αν: $2\beta=\alpha+\gamma$,

$\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ είναι ο **αριθμητικός μέσος των α και γ**

▶ άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου: $\Sigma_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\dfrac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\,\nu$

▶ ν-οστός όρος γεωμετρικής προόδου με λόγο λ : $\alpha_\nu=\lambda\alpha_{\nu-1}=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$

▶ οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι **γεωμετρικής προόδου** αν και μόνο αν: $\beta^2=\alpha\gamma$,

$\beta=\sqrt{\alpha\gamma}$ είναι ο **γεωμετρικός μέσος των α και γ**

▶ άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου: $\Sigma_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\alpha_1\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ $(\lambda\neq 1)$

▶ άθροισμα «άπειρων όρων» γεωμετρικής προόδου με λόγο λ (όπου: $|\lambda|<1$) : $S=\dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$

εκθετικές και λογαριθμικές μορφές...

▶ $\alpha^x>0$ ▶ $\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha\theta$ ▶ $\log_\alpha x\in\mathbb{R}$ $(0<\alpha\neq 1)$

▶ $\log_\alpha\alpha^x=x$ ▶ $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\theta$

▶ $\log_\alpha 1=0$ ▶ $\log_\alpha\alpha=1$

▶ $\log_{10}\theta \leftrightarrow \log\theta$ ▶ $\log_e\theta \leftrightarrow \ln\theta$

▶ $\log_\alpha xy=\log_\alpha x+\log_\alpha y$ ▶ $\log_\alpha\dfrac{x}{y}=\log_\alpha x-\log_\alpha y$ ▶ $\log_\alpha x^\nu=\nu\log_\alpha x$

▶ $\alpha^x=\beta^{x\log_\beta\alpha}$ *(αλλαγή εκθετικής βάσης)* ▶ $\log_\alpha x=\dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta\alpha}$ *(αλλαγή λογαριθμικής βάσης)*

▼ αν $\alpha>1$

▶ $\alpha^x\le\alpha^y \Leftrightarrow x\le y$

▶ $\alpha^x\le y \Leftrightarrow x\le\log_\alpha y$

▶ $\log_\alpha x\le\log_\alpha y \Leftrightarrow x\le y$

▶ $\log_\alpha x\le y \Leftrightarrow x\le\alpha^y$

▼ αν $0<\alpha<1$

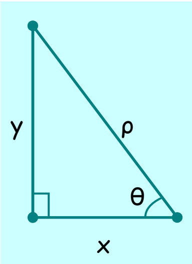
▶ $\alpha^x\le\alpha^y \Leftrightarrow x\ge y$

▶ $\alpha^x\le y \Leftrightarrow x\ge\log_\alpha y$

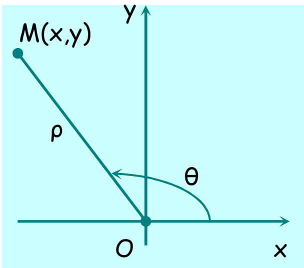
▶ $\log_\alpha x\le\log_\alpha y \Leftrightarrow x\ge y$

▶ $\log_\alpha x\le y \Leftrightarrow x\ge\alpha^y$

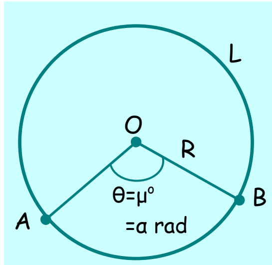
τριγωνομετρία...



- $ημθ = \frac{y}{ρ}$
- $συνθ = \frac{x}{ρ}$
- $εφθ = \frac{y}{x}$
- $σφθ = \frac{x}{y}$



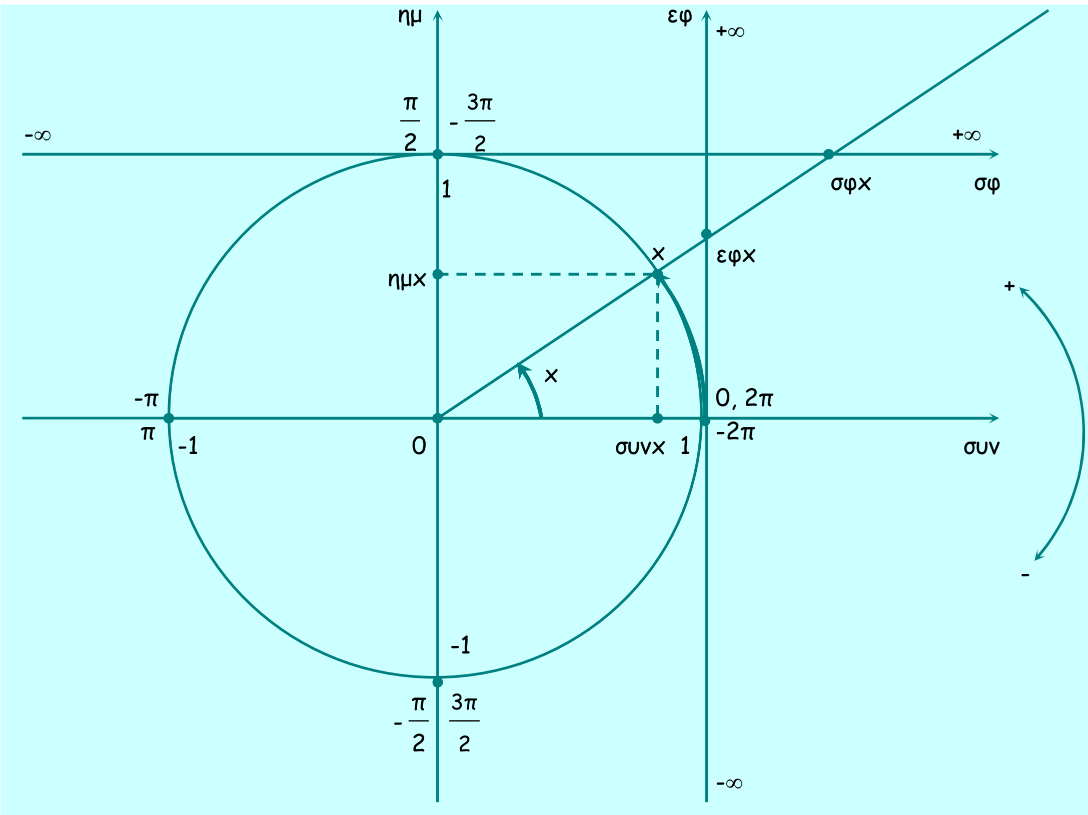
- $L = 2πR$
- $l_{\widehat{AB}} = \frac{πRμ}{180}$
- $l_{\widehat{AB}} = αR$
- $\frac{α}{π} = \frac{μ}{180}$



- $-1 \le ημθ \le 1$
- $-1 \le συνθ \le 1$
- $εφθ \in (-\infty, +\infty)$
- $σφθ \in (-\infty, +\infty)$

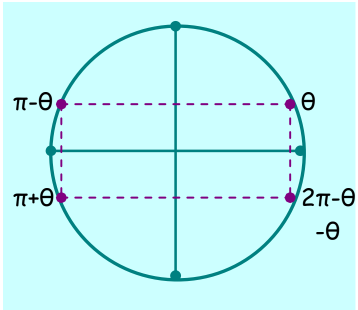
- $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}$
- $σφθ = \frac{συνθ}{ημθ}$
- $εφθσφθ = 1$

- $ημ^2θ + συν^2θ = 1$
- $ημ^2θ = \frac{εφ^2θ}{1 + εφ^2θ}$
- $συν^2θ = \frac{1}{1 + εφ^2θ}$



τόξο σε rad / ° / συνάρτηση	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
ημ	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	_
σφ	_	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **αντίθετα** τόξα (θ,-θ) έχουν το **ίδιο συν**
- **παραπληρωματικά** τόξα (θ,π-θ) έχουν το **ίδιο ημ**
- τόξα που **διαφέρουν κατά π** (θ,π+θ) έχουν **αντίθετο ημ** και **συν**
- τόξα που **διαφέρουν κατά 2κπ** (θ,2κπ+θ) τα έχουν **όλα ίδια**
- **συμπληρωματικά** τόξα (θ, $\frac{\pi}{2}$-θ) έχουν: **ημ↔συν** και **εφ↔σφ**



- ημx = ημθ $\Leftrightarrow$ x = 2κπ+θ ή x = 2κπ+π-θ *ειδικά:* ημx = 0 $\Leftrightarrow$ x=κπ
- συνx = συνθ $\Leftrightarrow$ x = 2κπ+θ ή x = 2κπ-θ *ειδικά:* συνx = 0 $\Leftrightarrow$ x = κπ+$\frac{\pi}{2}$
- εφx = εφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ+θ
- σφx = σφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ+θ (κ∈Z)

- η **f(x)=ρημωx** (ρ,ω>0) έχει **περίοδο**: $T=\frac{2\pi}{\omega}$ **max**: ρ και **min**: -ρ (ομοίως η f(x)=ρσυνωx)
- η **f(x)=ρεφωx** (ω>0) έχει **περίοδο**: $T=\frac{\pi}{\omega}$ (ομοίως η f(x)=ρσφωx)

▶ $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1)

▶ $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2)

▶ $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ (3)

▶ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ (4)

▶ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

▶ $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

(τύποι αθροισμάτων)

▶ $\eta\mu2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ ▶ $\sigma\upsilon\nu2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1 = 1-2\eta\mu^2\alpha$

(τύποι διπλασίων)

▶ $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ ▶ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ ▶ $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

(τύποι αποτετραγωνισμού)

▶ $\varepsilon\varphi2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ ▶ $\eta\mu2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ ▶ $\sigma\upsilon\nu2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

(τύποι καθολικής αντικατάστασης)

$(1)+(2) \Rightarrow$ ▶ $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$ (5)

$(4)-(3) \Rightarrow$ ▶ $2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$ (6)

$(3)+(4) \Rightarrow$ ▶ $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ (7)

(τύποι μετασχηματισμού γινομένων)

$(5) \Rightarrow$ ▶ $\eta\mu A+\eta\mu B = 2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$ (8)

$(8) \Rightarrow$ ▶ $\eta\mu A-\eta\mu B = 2\eta\mu\dfrac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}$

$(7) \Rightarrow$ ▶ $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$

$(6) \Rightarrow$ ▶ $\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B = -2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\eta\mu\dfrac{A-B}{2}$

(τύποι μετασχηματισμού αθροισμάτων)

▶ **$f(x)=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\eta\mu(x+\varphi)$** $(\alpha\beta\neq0)$

όπου : $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και φ τόξο με $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho}$ και $\eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho}$

▶ **σε τρίγωνο ΑΒΓ:**

▶ $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου)

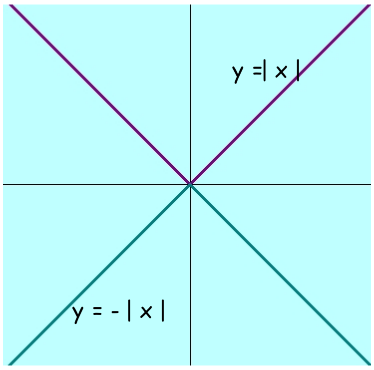
(ν. ημιτόνων)

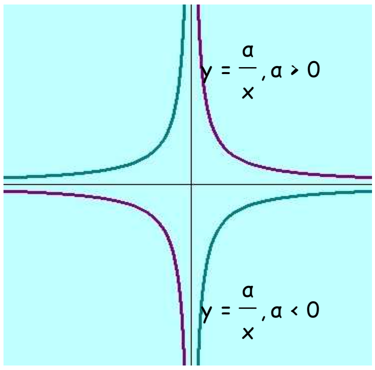
▶ $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ (και κυκλικά)

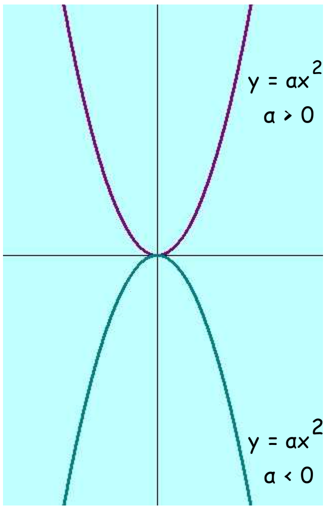
(ν. συνημιτόνων)

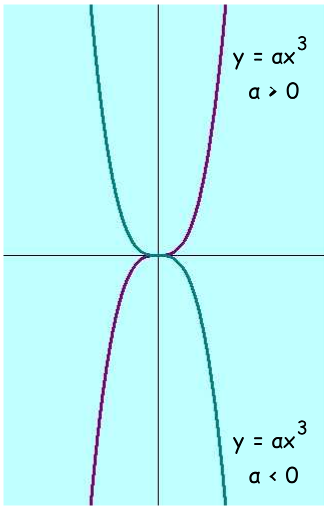
συναρτήσεις…

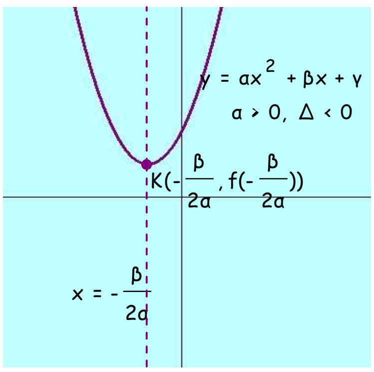
τα πεδία ορισμού, η μονοτονία, τα ακρότατα και τα σύνολα τιμών
των ακολούθων συναρτήσεων θεωρούνται γνωστά
(προκύπτουν άλλωστε αμέσως από τις γραφικές τους παραστάσεις)

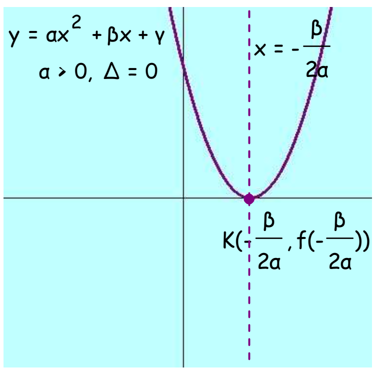


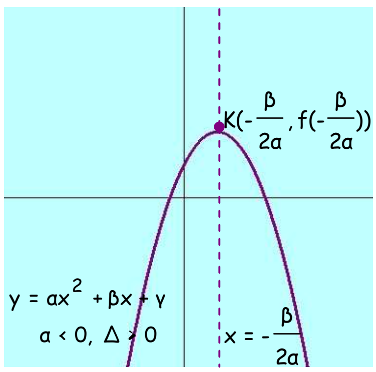


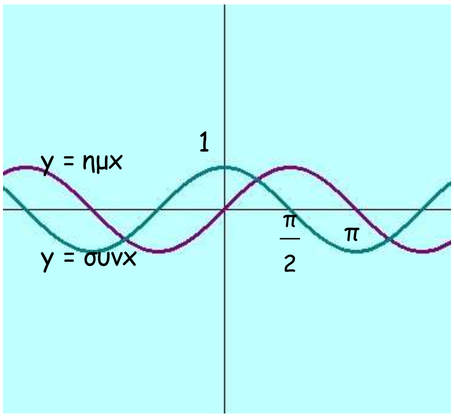


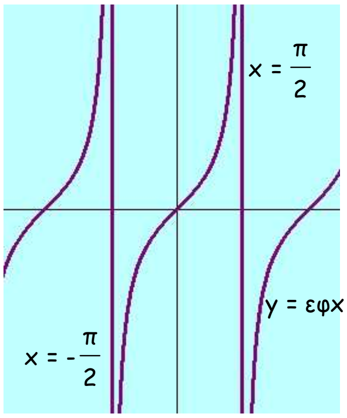


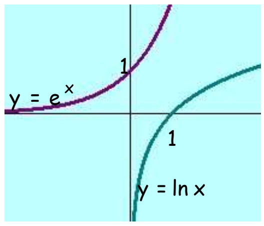








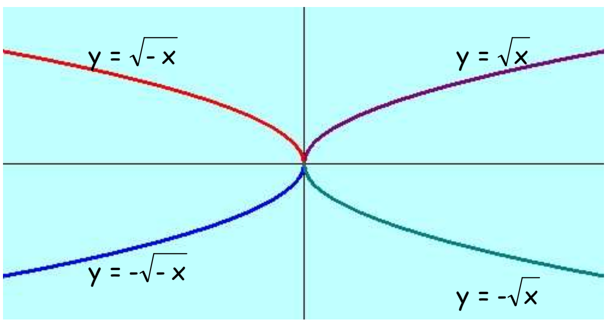


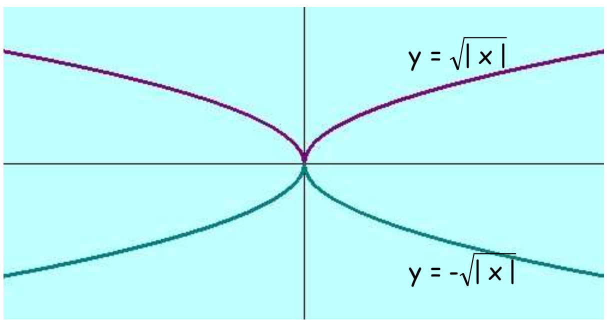


κι άλλες πολλές γραφικές παραστάσεις…

- αν $g(x) = f(x-α)$ η c_g είναι η c_f *μετακινημένη οριζόντια* κατά α
- αν $g(x) = f(x)+β$ η c_g είναι η c_f *μετακινημένη κατακόρυφα* κατά β
- αν $g(x) = f(-x)$ η c_g είναι η *συμμετρική* της c_f *ως προς* τον άξονα *y΄y*
- αν $g(x) = -f(x)$ η c_g είναι η *συμμετρική* της c_f *ως προς* τον άξονα *x΄x*
- αν $g(x) = -f(-x)$ η c_g είναι η *συμμετρική* της c_f *ως προς* το *O(0,0)*
- αν $\forall x \in A_f$ ισχύει $-x \in A_f$ και :
  - $f(-x) = f(x)$ η f είναι *άρτια* και η c_f *συμμετρική ως προς* τον *y΄y*
  - $f(-x) = -f(x)$ η f είναι *περιττή* και η c_f *συμμετρική ως προς* O(0,0)
- η c_f έχει κοινό σημείο με τον y΄y το (0,f(0)), αν βέβαια $0 \in A_f$
  η c_f έχει κοινά σημεία με τον x΄x τα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της: $f(x) = 0$
  η c_f είναι πάνω (κάτω) από τον x΄x όταν: $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$
- τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) των c_f και c_g έχουν τετμημένες τις λύσεις της: $f(x) = g(x)$
  η c_f είναι πάνω (κάτω) από τη c_g όταν: $f(x) > g(x)$ $(f(x) < g(x))$

όπως…





αρκετά ασχοληθήκαμε όμως με όλα αυτά…

Vincent Willem van Gogh (1853-1890) Starry night (1889)