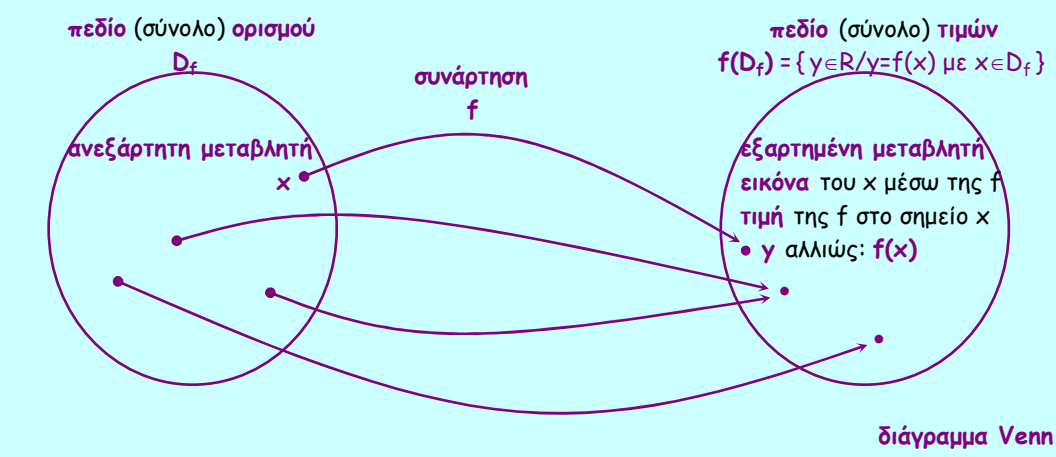
συνάρτηση...

λέγεται μία διαδικασία (κανόνας, αλγόριθμος) με βάση την οποία σε **κάθε** στοιχείο ενός συνόλου αντιστοιχίζουμε **ένα ακριβώς** στοιχείο ενός άλλου συνόλου.



η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγράφεται με μία ισότητα της μορφής $y = f(x)$ (**τύπος της f**) η οποία εκφράζει τη σχέση εξάρτησης του y από το x

ξεφεύγοντας για λίγο από τα μαθηματικά μπορούμε να πούμε ότι συνάρτηση ειδικότερα είναι η σχέση εξάρτησης δύο μεγεθών
π.χ. του διαστήματος s και του χρόνου t στη Φυσική ή της τιμής πώλησης P και του κόστους παραγωγής K στην Οικονομία

για την ονομασία μίας συνάρτησης (αν της δώσουμε όνομα !) και τον συμβολισμό των μεταβλητών της μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε γράμματα Λατινικά ή Ελληνικά, πεζά ή κεφαλαία, έτσι **π.χ.** ο κανόνας (συνάρτηση): «πενταπλασίασε έναν αριθμό αφού τον πολλαπλασιάσεις με τον εαυτό του» μπορεί να περιγραφεί με τις εκφράσεις: $f(x) = 5x^2$ ή $y = 5x^2$ ή $h(x) = 5x^2$ ή $h = 5t^2$ κ.α.

Θα ασχοληθούμε με **πραγματικές συναρτήσεις** (δηλ. $f(A_f) \subseteq R$) **μίας πραγματικής μεταβλητής** (δηλ. $A_f \subseteq R$)

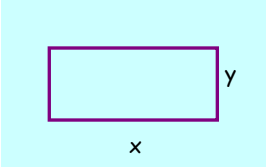
για να ορισθεί μία συνάρτηση f απαιτούνται: •το A_f
•η εικόνα f(x) του κάθε x του A_f (ή ο τρόπος εύρεσής της)

αν το A_f μίας συνάρτησης f δεν δίνεται, τότε συμφωνούμε να θεωρούμε ως A_f :
το ευρύτερο υποσύνολο του R για τα στοιχεία x του οποίου έχει νόημα η έκφραση f(x)

για **παράδειγμα** το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x\sqrt{x+1}}$ είναι το $A_f = (-1,0) \cup (0,3]$
(αφού πρέπει: $3-x \geq 0$ και $x \neq 0$ και $x+1 > 0$)

ενώ το εμβαδόν (ως συνάρτηση της βάσης x) ενός ορθογωνίου με περίμετρο 40, είναι:

$E = xy = x(20 - x)$ (αφού $2x+2y=40$, συνεπώς $y=20-x$)
δηλαδή: $E(x) = x(20 - x)$ με $D = (0, 20)$ (αφού είναι $x > 0$ και $y > 0$ δηλ. $20-x > 0$)

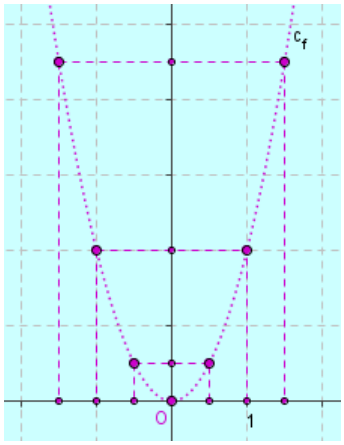


γραφική παράσταση (c_f)...

μίας συνάρτησης f ονομάζουμε την απεικόνιση του συνόλου $G = \{(x, y)/x \in A_f \text{ και } y = f(x)\}$
σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δηλαδή το σύνολο των σημείων (x, f(x))
δηλ. τη γραμμή (αν προκύπτει γραμμή !) με εξίσωση (c_f): $y = f(x)$

για **παράδειγμα** ας χαράξουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
$f(x) = 2x^2$, $x \in [-3/2, 3/2]$
με σημεία της που θα βρούμε από τον ακόλουθο **πίνακα τιμών** της

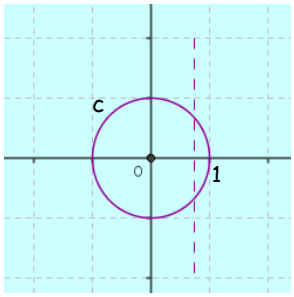
x	-3/2	.	-1	.	-1/2	.	0	.	1/2	.	1	.	3/2
$Y=f(x)=x^2$	9/2	.	2	.	1/2	.	0	.	1/2	.	2	.	9/2



δεν είναι όμως κάθε γραμμή γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης
όπως για **παράδειγμα** η (c): $x^2 + y^2 = 1$,

αφού $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ \text{ή} \\ y = -\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$ (δηλ. κάθε $x \in [-1,1]$ αντιστοιχεί σε δύο y)

η c βεβαίως σχηματίζεται απ' τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων,
των: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$



είναι φανερό ότι μία κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο!

✍ κοινά σημεία (αν υπάρχουν) της c_f με τους άξονες
είναι το (0,f(0)) και τα σημεία $(x_o,0)$ όπου x_o είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

✍ η c_f βρίσκεται «πάνω» (αντ. «κάτω») από τον $x'x$
για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ (αντ. $f(x) < 0$)

✍ κοινά σημεία των c_f, c_g δύο συναρτήσεων f και g

είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ δηλ. τα σημεία με τετμημένη ρίζα της $f(x) = g(x)$

✍ η c_f βρίσκεται «πάνω» (αντ. «κάτω») από τη c_g
για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ (αντ. $f(x) < g(x)$)

για **παράδειγμα** ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x+1$, $x\in R$

$y=f(x) \overset{\text{για } x=0}{\Rightarrow} y=-1$ άρα η c_f έχει με τον y΄y κοινό σημείο το $(0,-1)$

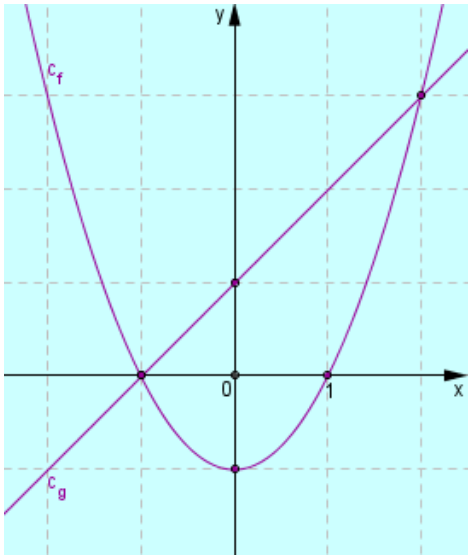
$y=f(x) \overset{\text{για } y=0}{\Rightarrow} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$ άρα η c_f έχει με τον x΄x κοινά σημεία τα $(-1,0)$ και $(1,0)$

$y=g(x) \overset{\text{για } x=0}{\Rightarrow} y=1$ άρα η c_g έχει με τον y΄y κοινό σημείο το $(0,1)$

$y=g(x) \overset{\text{για } y=0}{\Rightarrow} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ άρα η c_g έχει με τον x΄x κοινό σημείο το $(-1,0)$

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

άρα οι c_f, c_g έχουν κοινά σημεία τα $(-1,0)$ και $(2,3)$



$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^2-1>x+1 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)>0$

$\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$

άρα η c_f βρίσκεται «πάνω» από τη c_g όταν $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
και βέβαια «κάτω» από τη c_g όταν $x\in(-1,2)$

ισότητα και πράξεις...

δύο συναρτήσεις f,g λέγονται **ίσες** (συμβ. **f = g**) όταν $A_f=A_g=A$ και $\forall x\in A: f(x)=g(x)$
ενώ για δύο συναρτήσεις f,g ορίζουμε ως:

άθροισμα των f,g τη συνάρτηση: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ με $A_{f+g}=A_f\cap A_g$

διαφορά των f,g τη συνάρτηση: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ με $A_{f-g}=A_f\cap A_g$

γινόμενο των f,g τη συνάρτηση: $(fg)(x)=f(x)g(x)$ με $A_{fg}=A_f\cap A_g$

πηλίκο των f,g τη συνάρτηση: $(f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $A_{f/g}=A_f\cap A_g-\{x\in A_g: g(x)=0\}$

σύνθεση...

για δύο συναρτήσεις f και g, ορίζουμε (αν αυτό είναι δυνατό) ως **σύνθεση** της g με την f (**fog**)
τη συνάρτηση με $A_{fog}=\{x\in A_g: g(x)\in A_f\}$ και $\forall x\in A_{fog}: (fog)(x)=f(g(x))$

μονοτονία και ακρότατα...

f **γνησίως αύξουσα** (συμβ. ↑) στο διάστημα $\Delta \subseteq A_f \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2 \in \Delta:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f **γνησίως φθίνουσα** (συμβ.↓) στο διάστημα $\Delta \subseteq A_f \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2 \in \Delta:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

αν f ↑ ή ↓ στο Δ τότε η f λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ, ενώ
αν f ↑ ή ↓ στο A_f τότε η f λέγεται γνησίως μονότονη στο A_f ή απλά γνησίως μονότονη

- αν f ↑ στο Δ τότε η f διατηρεί τη διάταξη του Δ δηλαδή $\forall \kappa, \lambda \in \Delta: \kappa > \lambda \Rightarrow f(\kappa) > f(\lambda)$, ενώ
  αν f ↓ στο Δ τότε η f αλλάζει τη διάταξη του Δ δηλαδή $\forall \kappa, \lambda \in \Delta: \kappa > \lambda \Rightarrow f(\kappa) < f(\lambda)$
- αν f ↑ στο Δ τότε «περπατώντας» προς τα δεξιά πάνω στη c_f όταν η τετμημένη «μας» ανήκει στο Δ «ανεβαίνουμε» ενώ αν f ↓ στο Δ «κατεβαίνουμε»

αν για κάθε $x(\in A_f)$ που είναι «κοντά» στο $x_o(\in A_f)$ ισχύει: $f(x) \le f(x_o)$ (αντ. $f(x) \ge f(x_o)$) τότε λέμε ότι η f έχει (παρουσιάζει) στο x_o (για $x=x_o$) **τοπικό μέγιστο** (αντ. τοπικό ελάχιστο) το $y_0 = f(x_0)$, ενώ

αν για κάθε $x \in A_f$ ισχύει: $f(x) \le f(x_o)$ (αντ. $f(x) \ge f(x_o)$) τότε λέμε ότι
η f έχει (παρουσιάζει) στο x_o (για $x = x_o$) **ολικό μέγιστο** (αντ. ολικό ελάχιστο) το $y_0 = f(x_0)$

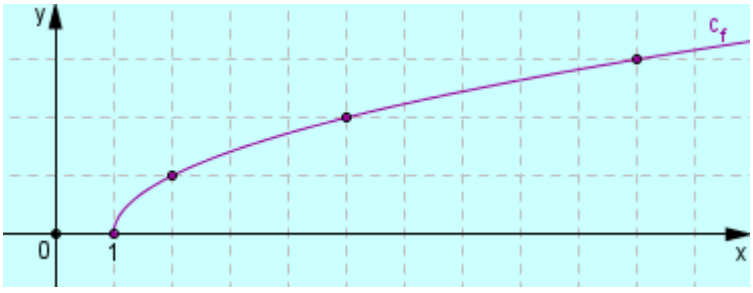
τα τοπικά ή ολικά μέγιστα και ελάχιστα της f λέγονται **ακρότατα** της f (ακρότατες τιμές της f)

για **παράδειγμα** ας δούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$, που έχει $A_f = [1,+\infty)$

$\forall x_1,x_2 \in [1,+\infty)$ ισχύουν:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα



$\forall x \in [1,+\infty)$ ισχύουν: $x \ge 1 \Rightarrow f(x) \ge f(1)$ (αφού f ↑) άρα η f έχει στο 1 ολικό ελάχιστο το 0 (= f(1))

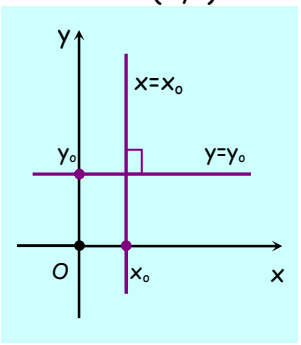
η συνάρτηση f(x)=αx+β...

- προφανώς $A_f = \mathbb{R}$ και $f(A_f) = \mathbb{R}$ (συνεπώς η f δεν έχει ακρότατα)

- $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 < x_2 \Rightarrow$
  - αν $\alpha < 0$: $\alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα f ↓
  - αν $\alpha = 0$: $0x_1 + \beta = 0x_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ άρα η f είναι **σταθερή** $(f(x) = \beta)$
  - αν $\alpha > 0$: $\alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα f ↑

η c_f είναι η **ευθεία** (ε): $y = \alpha x + \beta$ που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-\frac{\beta}{\alpha},0)$ (αν $\alpha \neq 0$) και $B(0,\beta)$

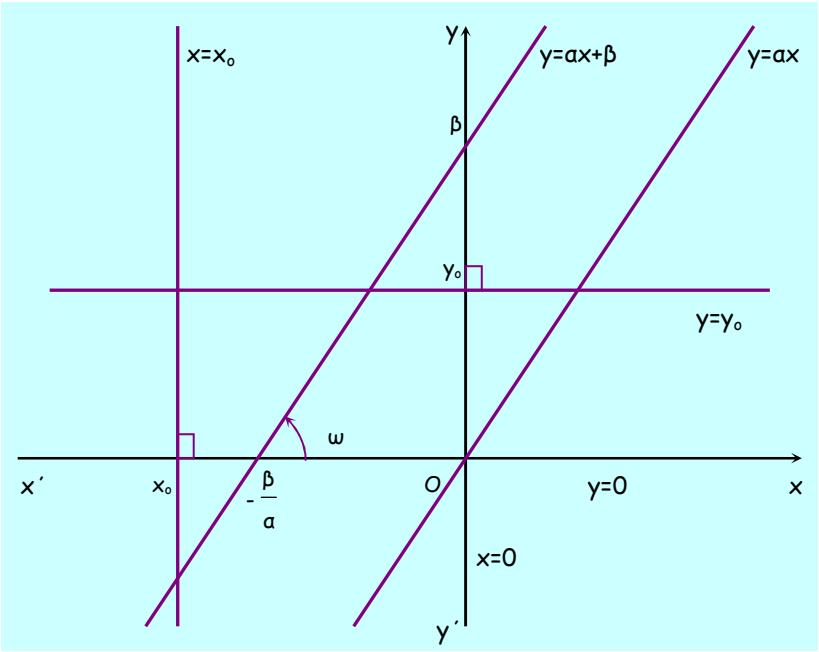
τη γωνία **ω** που γράφει η ημιευθεία Ax περιστρεφόμενη κατά τη θετική φορά γύρω από το A μέχρι να ταυτισθεί με την ε, τη λέμε **γωνία της ε με τον x΄x** (προφανώς: $0 \leq \omega < 180^\circ$)
αν $\alpha = 0$ οπότε ε // x΄x ορίζουμε $\omega = 0$ και αποδεικνύεται ότι **εφω = α**
ο α καθορίζει τη διεύθυνση της ε και γι αυτό λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ε (συμβ. **λ_ε**)
αν $\beta = 0$ δηλ. $f(x) = \alpha x$, η c_f είναι η ευθεία $y = \alpha x$ η οποία προφανώς διέρχεται από το O(0,0)
η **ευθεία** γραμμή που αποτελείται απ' τα σημεία της μορφής (x_o,y)
έχει εξίσωση **$x = x_o$**, είναι **κατακόρυφη** (δηλ. $\perp x΄x$)
και δεν ορίζεται για αυτήν συντελεστής διεύθυνσης ενώ,
η ήδη γνωστή **οριζόντια ευθεία $y = y_o$** (γραφική παράσταση σταθερής συνάρτησης)
έχει συντελεστή διεύθυνσης 0, αφού είναι παράλληλη στον x΄x.



η εξίσωση μιας ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή:
$Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$)

για ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντιστοίχως ισχύουν:
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ενώ **$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$**

ας δούμε τώρα όλα τα είδη των ευθειών και τις εξισώσεις τους



η συνάρτηση (τριώνυμο) $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq 0)$, $x\in R$ ...

αν **α > 0**: η f ↓ στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$, ↑ στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$, έχει για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ **ελάχιστο** το $y=f(-\frac{\beta}{2\alpha})=-\frac{\Delta}{4\alpha}$

αν **α < 0**: η f ↑ στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$, ↓ στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$, έχει για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ **μέγιστο** το $y=f(-\frac{\beta}{2\alpha})=-\frac{\Delta}{4\alpha}$

η f έχει γραφική παράσταση την **παραβολή** με εξίσωση: $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ η οποία έχει:

άξονα συμμετρίας την ευθεία: $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ και **κορυφή** το σημείο: $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, f(-\frac{\beta}{2\alpha}))$

το τριώνυμο χρειάζεται οργάνωση...

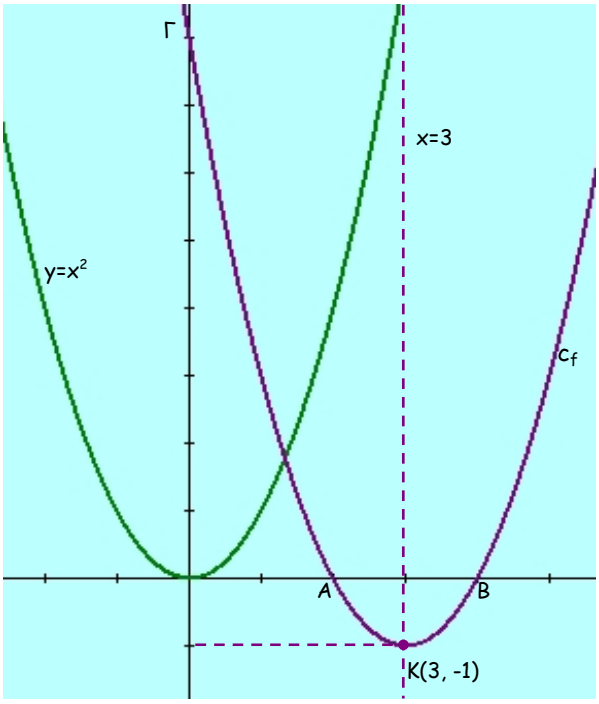
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	ρίζες	μορφή	πρόσημο
$\Delta>0$	$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha(x-x_1)(x-x_2)$	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ 0 0 ομόσημο του α / ετερόσημο του α / ομόσημο του α
$\Delta=0$	$\rho=x_1=x_2=\frac{-\beta}{2\alpha}$	$\alpha(x-\rho)^2$	$-\infty$ ρ $+\infty$ 0 ομόσημο του α / ομόσημο του α
$\Delta<0$	———	———	$-\infty$ $+\infty$ ομόσημο του α

- $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ $\quad$ $P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$
- αν $x+y=S$ και $xy=P$ τότε οι x,y (αν υπάρχουν) είναι οι ρίζες της: $\omega^2-S\omega+P=0$ και αντιστρόφως

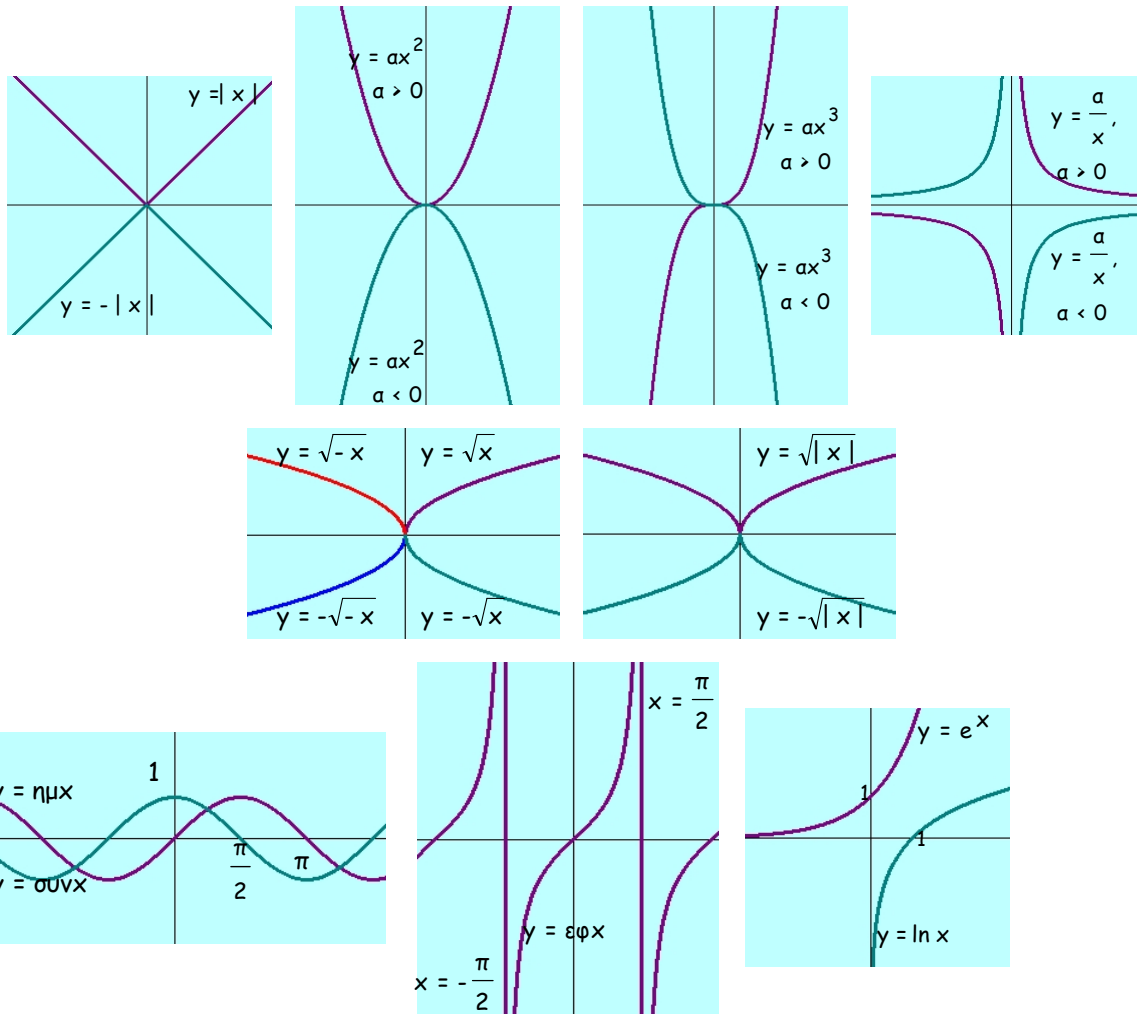
ας **μελετήσουμε** για **παράδειγμα** την $f(x)=x^2-6x+8$, η οποία έχει $\alpha=1>0$ και $-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-6}{2\cdot 1}=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y=f(x)	$+\infty$ ↘	min το f(3) = -1	↗ $+\infty$

η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία: x = 3 και κορυφή το σημείο K(3, - 1)



κι άλλες γνωστές συναρτήσεις...



όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Λέμε ότι: το **όριο** της συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_0 είναι l (συμβολικά: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$) αν:
η τιμή f(x) τείνει στο l (είναι περίπου l) όταν το x τείνει στο x_0 (είναι περίπου x_0)

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[\lambda f(x)] = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

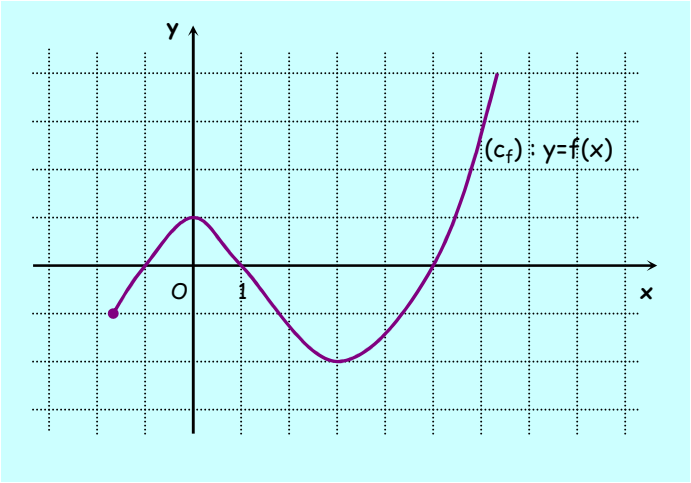
f **συνεχής** στο $x_0 \in A_f \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (...η c_f ως γραμμή δεν διακόπτεται στο $(x_0, f(x_0))$...)

f **συνεχής** στο Δ $\overset{ορ}{\Leftrightarrow}$ f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \Delta$

οι **γνωστές** συναρτήσεις(πολυωνυμικές, ρητές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές) καθώς και τα αποτελέσματα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, είναι συναρτήσεις **συνεχείς** (στο πεδίο ορισμού τους)

μία εικόνα, χίλιες λέξεις...

βλέποντας τη γραφική παράσταση (c_f) κάποιας συνάρτησης f
δηλ. την καμπύλη με εξίσωση: y = f(x)...



πεδίο ορισμού της f : $A_f = [-3/2,+\infty)$

σύνολο τιμών της f : $f(A_f) = [-2,+\infty)$

η c_f τέμνει τον y΄y στο (0,1)

η c_f τέμνει τον x΄x στα (-1,0),(1,0)&(5,0)

δηλ. η εξίσωση f(x)=0 έχει ρίζες: -1, 1, 5

$\forall x_1, x_2 \in [-3/2,0]$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. f ↑ (γνησίως αύξουσα) στο [- 3/2,0]

$\forall x_1, x_2 \in [0,3]$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ δηλ. f ↓ (γνησίως φθίνουσα) στο [0,3]

$\forall x_1, x_2 \in [3,+\infty)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. f ↑ (γνησίως αύξουσα) στο [3, +∞)

η τιμή f(- 3/2) (= - 1) είναι η μικρότερη απ' τις τιμές της f όταν το x είναι "κοντά" στο - 3/2
δηλ. η f έχει στο - 3/2 τοπικό ελάχιστο το - 1

η τιμή f(0) (= 1) είναι η μεγαλύτερη απ' τις τιμές της f όταν το x είναι "κοντά" στο 0
δηλ. η f έχει στο 0 τοπικό μέγιστο το 1

η τιμή f(3) (= - 2) είναι η μικρότερη απ' τις τιμές της f όταν το x είναι "κοντά" στο 3
δηλ. η f έχει στο 3 τοπικό ελάχιστο το - 2

η c_f έχει "πιο χαμηλό" σημείο το (3, - 2) ενώ δεν έχει "πιο ψηλό" σημείο
δηλ. η f έχει στο 3 ολικό ελάχιστο το - 2 ενώ δεν έχει ολικό μέγιστο

όταν το x παίρνει τιμές "κοντά" στο 6, το y παίρνει τιμές "κοντά" στο 3
δηλ. $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 3$

όταν το x παίρνει "πολύ μεγάλες" τιμές και το y παίρνει "πολύ μεγάλες" τιμές
δηλ. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

η συνέχεια της καμπύλης δεν διακόπτεται για καμιά τιμή του x
δηλ. η f είναι συνεχής σε όλο το A_f

στην πράξη τώρα...

1► $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-1+\sqrt[3]{7x+6}) = 18-1+\sqrt[3]{27} = 17+3 = 20$

2► $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-5x}{x^2-5} = \dfrac{0}{-5} = 0$

3► $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)(x-\frac{7}{2})}{(x+1)(x-1)}$ (παραγοντοποίηση τριωνύμου κλπ.)

$= \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-7}{x-1} = \dfrac{-2-7}{-1-1} = \dfrac{9}{2}$

4► $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+5x-6} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+6)}$ (σχήμα Horner κλπ.)

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+6} = \dfrac{3}{8}$

5► $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

6► $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-4}{\sqrt{3t-2}-2} = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+2)(\sqrt{3t-2}+2)}{(\sqrt{3t-2}-2)(\sqrt{3t-2}+2)} = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+2)(\sqrt{3t-2}+2)}{3(t-2)} = \dfrac{4(\sqrt{4}+2)}{3} = \dfrac{16}{3}$

7► $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & , x\le 1 \quad \{\text{δηλαδή: } x\in(-\infty,1]\} \\ x+1 & , x>1 \quad \{\text{δηλαδή: } x\in(1,+\infty)\} \end{cases}$

αν $x\in(-\infty,1)$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(3x^2-1) = 2$

αν $x\in(1,+\infty)$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

} άρα: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική

η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική

αφού $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$, η f είναι συνεχής και στο 1

} άρα: η f είναι συνεχής (στο πεδίο ορισμού της)

8► $f(x)=\begin{cases}2x-3 & , x<0\\ x^2+1 & , x\geq 0\end{cases}$

αν $x\in(-\infty,0)$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x-3)=-3$

αν $x\in(0,+\infty)$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$

άρα: δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

συνεπώς: η f δεν είναι συνεχής στο 0

η f είναι βέβαια συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική

μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η f είναι συνεχής στο $R/\{0\}$

9► $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & , x\neq 2\\ 5 & , x=2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4\neq f(2)$ συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 2

η f είναι βέβαια συνεχής στο $R/\{2\}$ ως ρητή

παράγωγος...

✍ μία συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** στο σημείο $x_o\in A_f$ όταν:

υπάρχει και είναι **πραγματικός αριθμός** το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$

το οποίο τότε συμβολίζεται $f'(x_o)$,λέγεται **παράγωγος αριθμός** της f στο x_o και είναι η **τιμή της συνάρτησης f΄** (παραγώγου της f) στο σημείο x_o (ή αλλιώς για $x=x_o$)

✍ **παράγωγος** της f (συμβολικά: f΄) είναι η **συνάρτηση** που αντιστοιχεί τα σημεία του A_f , στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, στους παραγώγους τους και γενικά: $A_{f'}\subseteq A_f$, αφού μπορεί να υπάρχουν σημεία του A_f στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη

✍ **δεύτερη παράγωγος** της f (συμβολικά: f΄΄) λέγεται η παράγωγος της f΄

ομοίως (επαγωγικά) ορίζεται η **ν-οστή παράγωγος** της f

γεωμετρική ερμηνεία:

$f'(x_o)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της c_f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$

φυσική σημασία:

$f'(x_o)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους $y(=f(x))$ ως προς το μέγεθος x, όταν $x=x_o$

δηλ. ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το y καθώς μεταβάλλεται το x , όταν $x=x_o$

παραγώγιση...

λέγεται η διαδικασία υπολογισμού της f΄ χρησιμοποιώντας:

✍ τον ορισμό (στα σημεία πηδήματος ή αλλαγής τύπου της f) ή (συνηθέστερα)

✍ τους τύπους και κανόνες που ακολουθούν:

f(x)	f΄(x)
c	0
x	1
x^p	px^{p-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
ημx	συνx
συνx	-ημx
εφx	$\frac{1}{συν^2x} = 1+εφ^2x$
e^x	e^x
lnx	$\frac{1}{x}$

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $[\frac{1}{f(x)}]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
- $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$

στην πράξη τώρα...

10► Να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στο σημείο $M(π,0)$

▼ $f(x) = ημx$, $A_f = R$

$\forall x \in R$: $f'(x) = συνx$

έστω (εφ): $y = λx + β$, τότε αφού $λ = f'(π) = συνπ = -1$ είναι (εφ): $y = -x + β$

κι επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το $M(π,0)$, ισχύει: $0 = -π + β$, άρα: $β = π$

συνεπώς (εφ): $y = -x + π$

11► Η πλευρά α ενός ισοπλεύρου τριγώνου μεταβάλλεται.

Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου όταν $α = \sqrt{3}$ cm

▼ $E(α) = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$, $α > 0$ $\forall α > 0$: $E'(α) = \frac{α\sqrt{3}}{2}$

ο ρυθμός μεταβολής του Ε ως προς α, όταν $α = \sqrt{3}$ cm, είναι: $E'(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$ cm²/cm

ερμηνεία :

όταν το ύψος είναι $\sqrt{3}$ cm, αύξησή του κατά 1cm προκαλεί αύξηση εμβαδού κατά 1.5 cm²

12► Η συνάρτηση θέσης ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα είναι: $x(t) = t^3 - 12t$, όπου x (cm) είναι η απόστασή του απ' την αρχή μέτρησης των διαστημάτων και t (sec) είναι ο χρόνος.

Να βρεις την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού στο 1ο sec της κίνησής του

▼ $x(t) = t^3 - 12t$, $t \geq 0$

$\forall\, t \geq 0$: $x'(t) = 3t^2 - 12$

$x''(t) = 6t$

η ταχύτητα (ρυθμός μεταβολής του διαστήματος ως προς το χρόνο) του κινητού όταν $t = 1$ είναι: $x'(1) = -9$ cm/sec

η επιτάχυνση (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο) του κινητού όταν $t = 1$ είναι: $x''(1) = 6$ cm/sec/sec

και ξεχνώντας για λίγο τα πεδία ορισμού...

13► $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{(1-\ln x)'n^2-(1-\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}$$
$$=\frac{x(2\ln x-3)}{x^4}$$
$$=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

14► $f(x)=3\ln x-x^3$

$$f'(x)=(3\ln x)'-(x^3)'$$
$$=3(\ln x)'-3x^2$$
$$=\frac{3}{x}-3x^2$$
$$=\frac{3-3x^3}{x}$$

$$f''(x)=(\frac{3}{x})'-(3x^2)'$$
$$=3(\frac{1}{x})'-3(x^2)'$$
$$=-\frac{3}{x^2}-6x$$
$$=-\frac{3+6x^3}{x^2}$$

15► $f(x)=x^2e^x$

$$f'(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'$$
$$=2xe^x+x^2e^x$$
$$=x(x+2)e^x$$

$$f''(x)=(2xe^x)'+(x^2e^x)'$$

$$=(2x)'e^x+2x(e^x)'+(x^2)'e^x+x^2(e^x)'$$
$$=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$$
$$=(x^2+4x+2)e^x$$

16► $f(x)=(x^2-x)^3$

$$f'(x)=3(x^2-x)^2(x^2-x)'$$
$$=3(x^2-x)^2(2x-1)$$

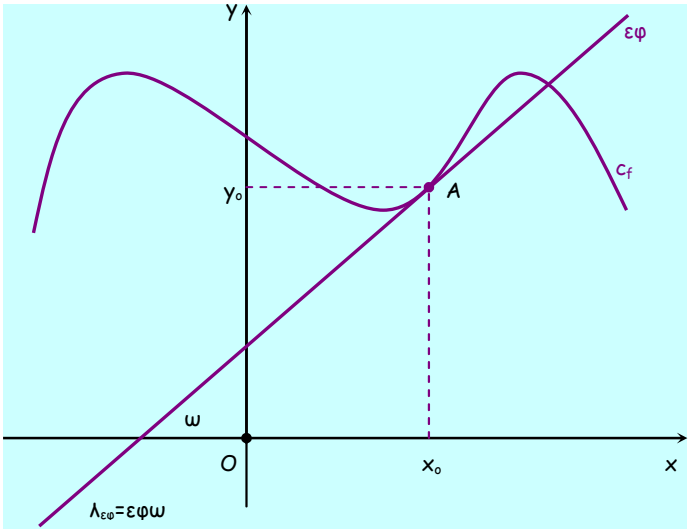
17► $f(x)=\eta\mu^3 5x$

$$f'(x)=3\eta\mu^2 5x(\eta\mu 5x)'$$
$$=3\eta\mu^2 5x\sigma\upsilon 5x(5x)'$$
$$=15\eta\mu^2 5x\sigma\upsilon 5x$$

18► $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

$$f'(x)=(x)'\sqrt{4-x^2}+x(\sqrt{4-x^2})'$$
$$=\sqrt{4-x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)'$$
$$=\sqrt{4-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

συνθήκες στο σημείο επαφής c_f – εφαπτομένης



✍ **$A \in c_f$**
οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της c_f δηλ. $y_o = f(x_o)$

✍ **$A \in (εφ)$**
οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της (εφ)

✍ **$λ_{εφ} = f'(x_o)$**

19► αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o,y_o)$

▼ σύμφωνα με τα προηγούμενα αν $(εφ): y = αx + β$

ισχύουν : $y = f'(x_o)x + β$

$y_o = f'(x_o)x_o + β$

$f(x_o) = f'(x_o)x_o + β$

$β = f(x_o) - f'(x_o)x_o$

άρα $(εφ): y = f'(x_o)x + f(x_o) - f'(x_o)x_o$ ή αλλιώς **$(εφ): y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$**

20► να βρεις τον $λ \in R$ ώστε η ευθεία $(ε): y = λx + 1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x + 2$ και να βρεις το σημείο επαφής

▼ $A_f = R$ $\forall x \in R$: $f'(x) = 2x + 1$

αν (x_o,y_o) το σημείο επαφής, για να εφάπτεται η (ε) στη c_f στο (x_o,y_o) πρέπει:

$$\begin{cases} y_o = x_o^2 + x_o + 2 \\ y_o = λx_o + 1 \\ λ = 2x_o + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_o = x_o^2 + x_o + 2 \\ x_o^2 + x_o + 2 = (2x_o + 1)x_o + 1 \\ λ = 2x_o + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_o = x_o^2 + x_o + 2 \\ x_o^2 = 1 \\ λ = 2x_o + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 2 \\ λ = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 4 \\ λ = 3 \end{cases}$$

άρα η (ε) εφάπτεται στη c_f για $λ = -1$ στο $A(-1,2)$ και για $λ = 3$ στο $B(1,4)$

εφαρμογές της παραγώγου...

αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $x_o \in \Delta$, τότε:

μονοτονία

- αν $f'(x) > 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- αν $f'(x) < 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

ακρότατα: κριτήριο 1ης παραγώγου

- αν η f΄ μηδενίζεται στο x_o αλλάζοντας πρόσημο από − σε +,
τότε η f παρουσιάζει (έχει) στο x_o (για $x = x_o$) ελάχιστο (τοπικό ή ολικό) το $f(x_o)$
- αν η f΄ μηδενίζεται στο x_o αλλάζοντας πρόσημο από + σε −,
τότε η f παρουσιάζει (έχει) στο x_o (για $x = x_o$) μέγιστο (τοπικό ή ολικό) το $f(x_o)$

ακρότατα: κριτήριο 2ης παραγώγου

- αν $f'(x_o) = 0$ και $f''(x_o) > 0$, τότε η f έχει στο x_o ελάχιστο το $f(x_o)$
- αν $f'(x_o) = 0$ και $f''(x_o) < 0$, τότε η f έχει στο x_o μέγιστο το $f(x_o)$

στην πράξη τώρα...

21► Εξετάζουμε ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων την $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in R$

▼ $f(x) = x^3 - 12x$, $A_f = R$

$\forall x \in R$: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗		τ.μ. το 16	↘	τ.ε. το -16	↗	

η συνάρτηση f: είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$
είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,2]$
παρουσιάζει για $x = -2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2) = 16$
παρουσιάζει για $x = 2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -16$

αλλιώς :

$\forall x \in R$: $f''(x) = 6x$
αφού $f'(-2) = 0$ και $f''(-2) = -12 < 0$, η f έχει στο −2 μέγιστο το $f(-2) = 16$
αφού $f'(2) = 0$ και $f''(2) = 12 > 0$, η f έχει στο 2 ελάχιστο το $f(2) = -16$

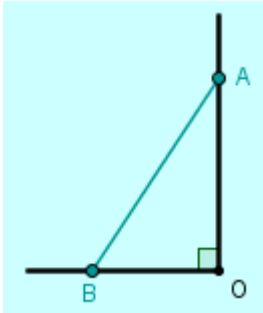
σειρά σου τώρα...

1. Ένα κινητό διανύει 50m με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Να εκφράσεις την ταχύτητά του υ ως συνάρτηση της διάρκειας t sec της κίνησής του.
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής;

2. Ένας πρατηριούχος υγρών καυσίμων μας προμηθεύει πετρέλαιο για το χειμώνα με το ακόλουθο κοστολόγιο: 0.47€/lt για τα πρώτα λίτρα μέχρι και 1000 lt
0.45€/lt για τα υπόλοιπα λίτρα μέχρι και 3000 lt και
0.42€/lt για τα υπόλοιπα λίτρα.
Να βρεις το κόστος K προμήθειας x λίτρων πετρελαίου ως συνάρτηση του x

3. Σε ένα ντεπόζιτο υπάρχουν 2800 lt πετρελαίου. Βυτιοφόρο με 6000 lt, αρχίζει να το γεμίζει με σταθερή παροχή 200 lt/min. Να βρεις:
i. τις ποσότητες του πετρελαίου στο ντεπόζιτο και το βυτίο ως συνάρτηση του χρόνου
ii. μετά πόσα min η ποσότητα του πετρελαίου στο ντεπόζιτο θα είναι όση και στο βυτίο

4. Δίπλα βλέπεις μία σκάλα AB μήκους 3 μέτρων που στηρίζεται στον τοίχο AO. Το άκρο της B που γλιστράει απέχει από τον τοίχο απόσταση $BO = 1 + t$ όπου t ($t \geq 0$) είναι ο χρόνος σε sec.
Να βρεις: i. Πόσο απέχει αρχικά η σκάλα από τον τοίχο
ii. Πότε θα πέσει η σκάλα
iii. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος ως συνάρτηση του χρόνου t



5. Να βρεις τα πεδία ορισμού των ακολούθων συναρτήσεων:

i. $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$ ii. $y = \sqrt{1 - |x|}$ iii. $s(t) = \dfrac{3|t-1|}{t\sqrt{t+2}}$

iv. $d(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2 - x - 2}$ v. $g(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2-|s|}}$ vi. $U = \dfrac{3v}{v^7 - v}$

vii. $R(w) = \dfrac{w^2 - 3w + 2}{|w| + w}$ viii. $s(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{x} - 6}$ ix. $R = \dfrac{\sqrt{2\theta + 1}}{\theta^2 - 1}$

6. Αν $f(x) = x^2 + 1$, $x \in R$ να λύσεις την εξίσωση $f(x+1) = f(x) + 1$

7. Από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + c$, όπου $c \in R$, βρες εκείνη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 7)$

8. Ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+x$, $x\in R$ έχουν τεταγμένη διπλάσια από την τετμημένη τους;

9. Να εξετάσεις αν έχουν κοινά σημεία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x)=\sqrt{x-5}$ και $g(x)=2+\sqrt{3-x}$

10. Βρες τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των ακολούθων συναρτήσεων με τους άξονες συντεταγμένων:

i. $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ ii. $s(t)=\dfrac{|t-2|-1}{t^2-t}$ iii. $y=\sqrt{\dfrac{x+8}{x+2}}$ iv. $s=\dfrac{x^2-2x+2}{x^6+1}$

11. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα x΄x, όταν:

i. $f(x)=x^3-x^2+x-1$ ii. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-5x+4)}{x^2-6x+8}$

12. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i. $f(x)=x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ii. $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

13. Βρες τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των ακολούθων συναρτήσεων:

i. $f(x)=x^3-3x+1$ και $g(x)=x+1$ ii. $f(x)=|x|+1$ και $g(x)=2x^2$

14. Αν $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$, ποιες είναι οι συναρτήσεις fg και $\dfrac{f}{g}$;

15. Να υπολογίσεις τα ακόλουθα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+5x-10}{x^3-2x^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$ iii. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3(x^2-2)}-x}{x-\sqrt{3}}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x+1}}$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-x^2}{|x|+x^2}$ vi. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

16. Βρες (αν υπάρχουν) τα όρια των ακολούθων συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & , x\neq -1\\ 5 & , x=-1\end{cases}$ στο -1 ii. $f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & , x<1\\ 4 & , x=1\\ 5x & , x>1\end{cases}$ στο 1

iii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & , x\in(-\infty,5]\\ 3+\eta\mu x & , x\in(5,+\infty)\end{cases}$ στο 0 iv. $f(x)=\begin{cases}e^x & , x\leq 0\\ \sigma\upsilon x-x^2 & , x>0\end{cases}$ στο 0

17. Να εξετάσεις ως προς τη συνέχεια τις ακόλουθες συναρτήσεις:

i. $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<2\\ 0 & , x=2\\ x^3-x, & x>2\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x<0\\ x+2 & , 0\leq x<1\\ 2x+1 & , x\geq 1\end{cases}$ iii. $f(x)=\begin{cases}x^2-7 & , x<3\\ 2 & , x=3\\ 2x-4 & , x>3\end{cases}$

18. Βρες τις τιμές των κ, λ, μ ($\in R$) ώστε να είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & , x\neq -2\\ \lambda & , x=-2\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}\kappa^2x^3+(\lambda^2+4)x & , x<1\\ \mu & , x=1\\ 4\kappa x^2+2\lambda x-1 & , x>1\end{cases}$

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(3)=\sqrt{3}$, να υπολογίσεις το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(f(x)-\sqrt{3})\sqrt{3}}{(f^2(x)-3)}$$

20. Να βρεις τις παραγώγους των ακολούθων συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ln\sigma\upsilon x$ ii. $g(t)=t\sqrt{t^2-2}$ iii. $y=\eta\mu e^{x^2+1}$

iv. $g(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$ v. $h(\omega)=\omega e^{\frac{2-\omega^2}{2}}$ vi. $t(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

vii. $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$, όπου g, h συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R με $g(x)>0$, $\forall x\in R$

21. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\mu)$, να αποδείξεις ότι: $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$

22. Αν $f(x)=\eta\mu^2 x$, να αποδείξεις ότι: $f''(x)+4f(x)=2$

23. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\forall x\in R$: $f(x^2)=x^5$, να αποδείξεις ότι: $f'(4)=20$

24. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και $\forall x\in(0,+\infty)$: $f(x^2)+f(x^3)=5\ln x+4$, να βρεις την $f'(1)$

25. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R , η f είναι άρτια και $\forall x\in R$: $g(2x-3)=6x-f(x-2)$

i. να αποδείξεις ότι η f' είναι περιττή
ii. να αποδείξεις ότι $f'(0)=0$
iii. να βρεις την $g'(1)$

26. Ένα κινητό πάνω σε έναν άξονα, τη χρονική στιγμή t (sec), όπου $0\le t\le 5$ έχει διανύσει απόσταση $s(t)=t^3-(9/2)t^2+15t+4$ (m). Ποια είναι η αρχική του ταχύτητα; Πότε έχει ταχύτητα 9 m/sec; Ποια είναι η επιτάχυνσή του όταν t=0.5sec;

27. Το κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος είναι: $K(x)=x^2/3+2x+20$ χιλιάδες €
και οι εισπράξεις από την πώλησή τους είναι: $E(x)=52x-x^2$ χιλιάδες €.
Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του κέρδους P(x) όταν πωλούνται
i. 18 μονάδες προϊόντος και ii. 30 μονάδες προϊόντος

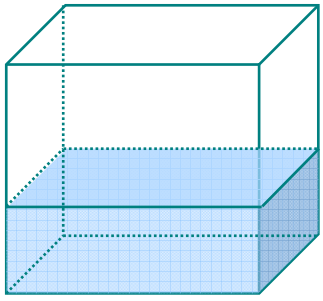
28. Μία σφαιρική χιονόμπαλα έχει ακτίνα $r=4-t^2$ cm, όπου t είναι ο χρόνος σε sec.
Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της χιονόμπαλας
(Δίνεται ότι: $E=4\pi r^2$ και $V=4/3\pi r^3$)

29. Αν η επιφάνεια μίας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm^2/sec, να βρεις το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος της όταν r = 85 cm

30. Ένα σημείο M(x,y) κινείται στην καμπύλη $y=x^3-x$.
Τη χρονική στιγμή t_o η τετμημένη του είναι 6cm και ελαττώνεται με ρυθμό 2 cm/s.
Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κατά τη χρονική στιγμή t_o

31. Ένα υγρό απλώνεται πάνω σε ένα ύφασμα σχηματίζοντας κυκλικό λεκέ του οποίου το εμβαδόν αυξάνεται με ρυθμό 5π cm^2/min.
Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του λεκέ κατά τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το εμβαδόν του είναι $36\pi cm^2$

32. Δίπλα βλέπεις μια κυβική δεξαμενή με πλευρά 2m την οποία γεμίζουμε νερό με ένα λάστιχο που έχει παροχή 1lt/sec.
Να βρεις το ρυθμό ανόδου της στάθμης του νερού



33. Καθώς αδειάζει μία κυλινδρική δεξαμενή νερού με διάμετρο βάσης 40cm, η στάθμη του νερού κατεβαίνει με σταθερό ρυθμό 1.5cm/min. Με τι ρυθμό ελαττώνεται ο όγκος του;

34. Σε θερμοκρασία 20°C ο όγκος V (σε λίτρα) 1.33gr O_2 είναι: $V = \frac{1}{P}$,
όπου P (σε ατμόσφαιρες) είναι η πίεση του O_2
i. ποιος είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του V ως προς P ,
όταν η πίεση P μεταβάλλεται από 2atm σε 3atm;
ii. ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς P όταν είναι P = 2atm;

35. Να βρεις την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης (c_f) της συνάρτησης $f(x) = x^6 - 5x$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°

36. Βρες την εφαπτομένη της c_f της $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

37. Να βρεις την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln x$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x

38. Να βρεις την εφαπτομένη της c_f της $f(x) = \sqrt{20 - x^2}$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $2x - y + 3 = 0$

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \ln\sqrt{x}$.
Να βρεις την ευθεία η οποία είναι κάθετη στον x΄x και τέμνει τις c_f , c_g σε σημεία στα οποία οι εφαπτομένες τους είναι παράλληλες

40. Να αποδείξεις ότι η ευθεία $y = -x$ εφάπτεται στη c_f της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ και να βρεις το σημείο επαφής

41. Να βρεις τους πραγματικούς κ, λ ώστε η ευθεία $y = 3x$ να εφάπτεται στη c_f της $f(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ στο σημείο M(1,3)

42. Να βρεις τους πραγματικούς κ, λ ώστε η ευθεία $y = 3x$ να εφάπτεται στη c_f της $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2$ στο σημείο τετμημένης 2

43. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύει $\forall x \in R$: $g(x) = f(x^3 + x - 1)$.
Η ευθεία $y = 3x + 2$ εφάπτεται στη c_f στο σημείο τετμημένης 1.
Να βρεις την εφαπτομένη της c_g στο σημείο $A(1, g(1))$

44. Να βρεις το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες η εφαπτομένη της c_f της $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \neq 0)$ στο σημείο $M(x_o, \frac{\alpha}{x_o})$

45. Να μελετήσεις ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-2,5)$ ii. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

46. Να μελετήσεις ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$ ii. $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$ iii. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

iv. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ v. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^4}{4} + x^2}$ vi. $f(x) = (x^2 - x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x$

47. Να βρεις τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, για τις οποίες είναι γνησίως αύξουσα η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 6x + 5$

48. i. να μελετήσεις ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων τη συνάρτηση: $f(x) = (x - 1)e^x + 1$
ii. να λύσεις την εξίσωση: $xe^x + 1 = e^x$

49. i. να αποδείξεις ότι μία συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ, έχει στο Δ το πολύ μία ρίζα
ii. να λύσεις την εξίσωση: $e^x - 1 + \ln(x + 1) = 0$

50. Να αποδείξεις ότι $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]: 2\ln(\eta\mu x) \le \eta\mu^2 x - 1$

51. i. να μελετήσεις ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων τη συνάρτηση: $f(x) = e^x - x + 2$
ii. να βρεις τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η c_f

52. i. να μελετήσεις ως προς τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
ii. να αποδείξεις ότι $\forall x \in (0, +\infty): e^x \ge x^e$

53. Βρες τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda$ έχει τη μεγαλύτερη ελάχιστη τιμή

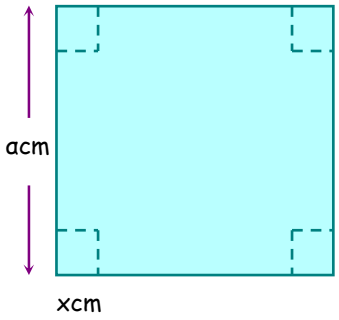
54. Να αποδείξεις ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με ίσες πλευρές μήκους acm, το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το ορθογώνιο

55. Να βρεις το σημείο Μ της c_f της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, το οποίο απέχει από το σημείο $A(\frac{9}{2}, 0)$ τη μικρότερη απόσταση και να αποδείξεις ότι η εφαπτομένη της c_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ

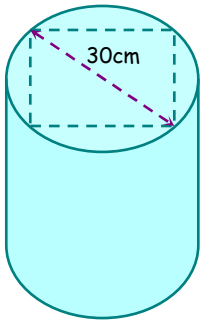
56. Αν $x + y = 1$, για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών x, y γίνεται ελάχιστη η τιμή της παράστασης $e^x + e^y$;

57. Θέλουμε να περιφράξουμε μία ορθογώνια περιοχή με (σταθερό) εμβαδόν Ε από τις τρεις μόνο πλευρές. Να αποδείξεις ότι η οικονομικότερη περίφραξη επιτυγχάνεται όταν η μία διάσταση είναι διπλάσια της άλλης

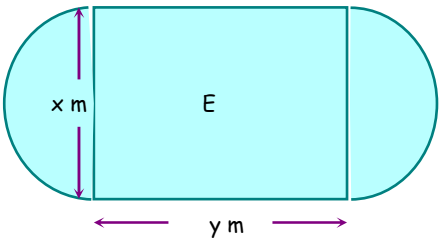
58. Ένας λαμαρινάς έχει μία τετραγωνική λαμαρίνα πλευράς acm και θέλει να κατασκευάσει ένα ντεπόζιτο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τη μέγιστη δυνατή χωρητικότητα.
Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου που πρέπει να κόψει από τις τέσσερις πλευρές της λαμαρίνας;



59. Από έναν κυλινδρικό κορμό δένδρου με διάμετρο 30cm θέλουμε να κατασκευάσουμε μία δοκό με κάθετη τομή ορθογώνιο.
Αν η αντοχή της δοκού είναι ανάλογη του εμβαδού της κάθετης τομής, να βρεις τις διαστάσεις της ανθεκτικότερης δοκού που μπορούμε να κατασκευάσουμε



60. Ο γνωστός μας στίβος του κλασικού αθλητισμού που βλέπεις δίπλα, αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ίσα ημικύκλια.
Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρεις τις διαστάσεις του στίβου (x και y) ώστε το εμβαδόν Ε του ορθογώνιου μέρους του να είναι μέγιστο



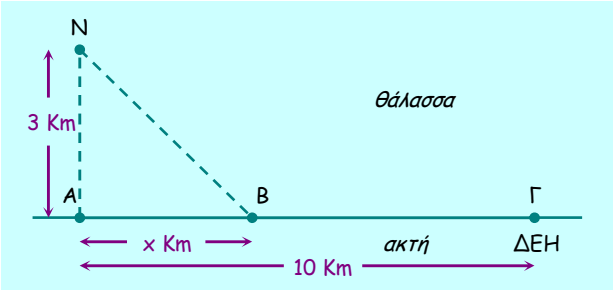
61. Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\frac{x^3}{4}$, $0<x<3$.
Να βρεις ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x να γίνει μέγιστος

62. Το κόστος των καυσίμων ενός αεροπλάνου είναι: $\frac{υ^2}{1000}+100$ €/h, όπου υ είναι η ταχύτητά του σε Km/h, η οποία θεωρείται σταθερή σε όλη την πτήση.
Ποια είναι η πιο οικονομική ταχύτητα για μία πτήση 2000 Km ;

63. Ένα πρακτορείο διοργανώνει μία εκδρομή για 30 τουλάχιστον άτομα με τιμή συμμετοχής 400€. Για να αυξήσει το κέρδος του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: « για κάθε επιπλέον (των 30) άτομο που θα συμμετάσχει, η τιμή συμμετοχής για όλα τα άτομα μειώνεται κατά 5€ ».
Πόσα άτομα πρέπει να συμμετάσχουν για να έχει τα μέγιστα δυνατά έσοδα;

64. Ένα νησάκι Ν, απέχει απόσταση ΝΑ = 2.5 Km από μία ευθύγραμμη ακτή και θα συνδεθεί με υποσταθμό της ΔΕΗ που βρίσκεται στο σημείο Γ της ακτής.

Το καλώδιο της σύνδεσης πρόκειται να ακολουθήσει τη διαδρομή ΓΒΝ. Να επιλέξεις το σημείο Β το οποίο ελαχιστοποιεί το κόστος της σύνδεσης αν είναι γνωστό ότι κάθε Km υπόγειας σύνδεσης κοστίζει 1000€ ενώ κάθε Km υποβρύχιας σύνδεσης κοστίζει 1500€

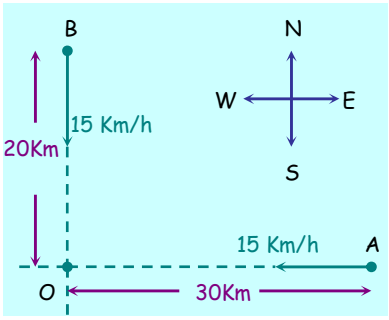


Όπως θα διαπιστώσεις, ο ισχυρισμός ότι η προτιμότερη διαδρομή είναι η ΓΑΝ είναι λανθασμένος, κι έτσι θα επιβεβαιωθεί για μία ακόμη φορά ότι η απλοϊκή «απλή λογική» είναι κακός σύμβουλος!

65. Ένα πλοίο βρίσκεται στο στίγμα Α, 30Km ανατολικά του στίγματος Ο και κινείται δυτικά με ταχύτητα 15Km/h. Ένα άλλο πλοίο βρίσκεται στο στίγμα Β, 20Km βόρεια του Ο και κινείται νότια με ταχύτητα 15Km/h.

i. να βρεις την απόσταση s(t) των δύο πλοίων ύστερα από t ώρες.

ii. ύστερα από πόσες ώρες γίνεται ελάχιστη η απόσταση;



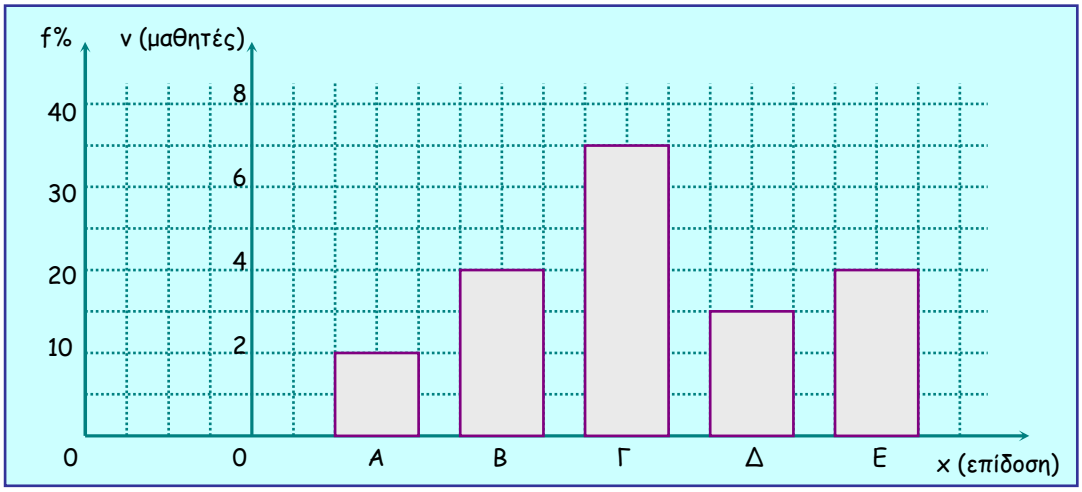
Pablo Picasso (1881-1973) Les Demoiselles d' Avignon (1907)

στατιστική στην πράξη...

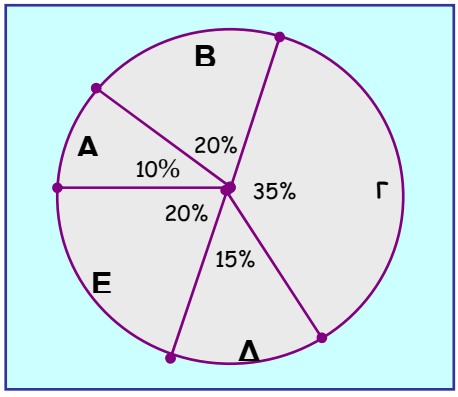
1 ▶ πίνακας κατανομής συχνοτήτων-σχετικών συχνοτήτων

επίδοση στα μαθηματικά τιμές μεταβλητής x_i	μαθητές συχνότητα v_i	ποσοστό μαθητών σχετική συχνότητα $f_i\%$	γωνία κυκλικού διαγράμματος φ_i^o
Α	2	$\frac{2}{20}=10\%$	$\frac{2}{20}360^o=36^o$
Β	4	$\frac{4}{20}=20\%$	$\frac{4}{20}360^o=72^o$
Γ	7	$\frac{7}{20}=35\%$	$\frac{7}{20}360^o=126^o$
Δ	3	$\frac{3}{20}=15\%$	$\frac{3}{20}360^o=54^o$
Ε	4	$\frac{4}{20}=20\%$	$\frac{4}{20}360^o=72^o$
σύνολα	σύνολο μαθητών μέγεθος δείγματος $v=\Sigma v_i=20$	100%	360^o

ραβδόγραμμα συχνοτήτων-σχετικών συχνοτήτων



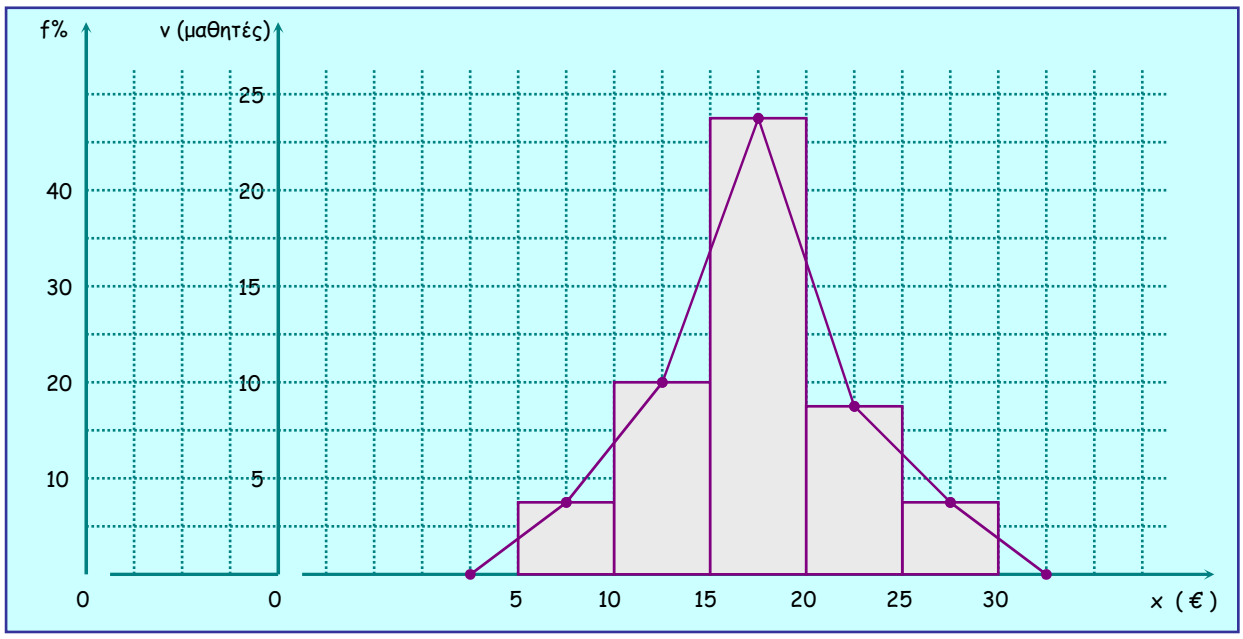
κυκλικό διάγραμμα



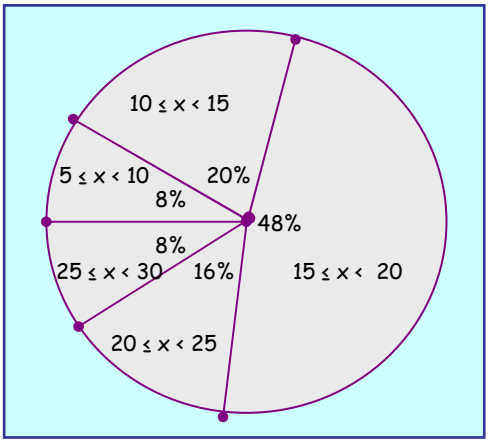
2 ▶ πίνακας κατανομής συχνοτήτων-σχετικών συχνοτήτων

χαρτζηλίκι μαθητών τιμές μεταβλητής x_i (€)	μαθητές συχνότητα v_i	ποσοστό μαθητών σχετική συχνότητα f_i%	γωνία κυκλικού διαγράμματος φ_i^o
$5 \le x < 10$	4	8%	29°
$10 \le x < 15$	10	20%	72°
$15 \le x < 20$	24	48%	173°
$20 \le x < 25$	8	16%	58°
$25 \le x < 30$	4	8%	29°
σύνολα	σύνολο μαθητών μέγεθος δείγματος $v=\Sigma v_i=50$	100%	360°

ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων-σχετικών συχνοτήτων



κυκλικό διάγραμμα



3 ▶

χρόνος επίλυσης ενός προβλήματος Φυσικής τιμές μεταβλητής x_i (min)	μαθητές συχνότητα v_i	$v_i x_i$
2	1	2
3	3	9
5	5	25
8	2	16
10	2	20
15	2	30
σύνολα	σύνολο μαθητών μέγεθος δείγματος $v=\Sigma v_i=15$	άθροισμα όλων των χρόνων άθροισμα όλων των παρατηρήσεων $\Sigma x_i=\Sigma v_i x_i=102$

- ο μέσος χρόνος για τη λύση του προβλήματος

  δηλ. η μέση τιμή (μέσος όρος) της μεταβλητής x είναι: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{\sum v_i}=\frac{\sum v_i x_i}{v}=\frac{102}{15}\approx 6.8\text{min}$

- ο επικρατέστερος χρόνος για τη λύση του προβλήματος
  δηλ. η επικρατούσα τιμή της μεταβλητής x είναι: $M_o = 5$ min

- ο διάμεσος χρόνος για τη λύση του προβλήματος δηλ. ο χρόνος που χρειάστηκε ο ενδιάμεσος μαθητής δηλ. ο $8^{ος}$ μαθητής (αφού οι μαθητές τοποθετηθούν σε μία σειρά ως προς το χρόνο λύσης)
  δηλ. η διάμεσος τιμή της μεταβλητής x είναι: $\delta = 5$ min

4 ▶

ύψος αθλητών παιδικού τμήματος σωματείου στίβου τιμές μεταβλητής x (cm)	κέντρο κλάσης x_i	αθλητές συχνότητα v_i	$v_i x_i$
$125 \le x < 135$	130	15	1950
$135 \le x < 145$	140	20	2800
$145 \le x < 155$	150	15	2250
$155 \le x < 165$	160	25	4000
$165 \le x < 175$	170	15	2550
σύνολα		σύνολο αθλητών μέγεθος δείγματος $v=\Sigma v_i=90$	άθροισμα όλων των υψών άθροισμα όλων των παρατηρήσεων $\Sigma x_i=\Sigma v_i x_i=13550$

- το μέσο ύψος (μέσος όρος του ύψους) των αθλητών

  δηλ. η μέση τιμή της μεταβλητής x είναι: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{\sum v_i}=\frac{\sum v_i x_i}{v}=\frac{13550}{90}\approx 150.5\text{cm}$

5▶ Ο μέσος όρος (μέση τιμή) του βάρους των 10 αγοριών ενός τμήματος είναι 54 Kg, ενώ ο μέσος όρος του βάρους των 12 κοριτσιών του τμήματος είναι 48 Kg. Να βρεις τον μέσο όρο του βάρους όλων των μαθητών του τμήματος.

▼

ο μέσος όρος του βάρους είναι: $\dfrac{\text{άθροισμα των βαρών όλων των μαθητών}}{\text{αριθμός όλων των μαθητών}}$

γιατί: $\dfrac{\text{άθροισμα βαρών αγοριών}}{10} = 54$

ενώ: $\dfrac{\text{άθροισμα βαρών κοριτσιών}}{12} = 48$

$= \dfrac{(\text{αθρ. βαρών αγοριών}) + (\text{αθρ. βαρών κοριτσιών})}{10+12}$

$= \dfrac{10 \cdot 54 + 12 \cdot 48}{22} = \dfrac{1116}{22} \approx 50.73 Kg$

6▶ Μία βιοτεχνία απασχολεί 5 εργαζομένους στην παραγωγή με μέσο μισθό 650€ και 3 εργαζόμενους στη διανομή με μέσο μισθό 750€. Πόσους εργαζομένους απασχολεί η βιοτεχνία στη διοίκηση, αν είναι γνωστό ότι ο μέσος μισθός των διοικητικών υπαλλήλων είναι 1000€ ενώ ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων είναι 750;

▼

Έστω ότι η βιοτεχνία απασχολεί x διοικητικούς υπαλλήλους, τότε:

$$\frac{5 \cdot 650 + 3 \cdot 750 + x \cdot 1000}{5+3+x} = 750 \Leftrightarrow 5500+1000x=6000+750 \Leftrightarrow 250x=500 \Leftrightarrow x=2$$

συνεπώς η βιοτεχνία απασχολεί 2 διοικητικούς υπαλλήλους.

7▶ Δίπλα βλέπεις την κατανομή του χρόνου που χρειάζεται ένας μαθητής κάθε πρωί για να πάει στο σχολείο του. Αφού συμπληρώσεις τον πίνακα, να βρεις τη μέση τιμή του χρόνου αυτού.

▼

$\overline{x} = \ldots$

χρόνος x_i (min)	ημέρες v_i	$v_i x_i$
4	15	
5	30	
6	45	
15	40	
20	15	
22	5	
σύνολα	$v=$	$\Sigma v_i x_i =$

8 ▶ Δίπλα βλέπεις την κατανομή της ταχύτητας των αυτοκινήτων σε ένα σημείο της "Εθνικής", όπως αυτή προέκυψε από έναν έλεγχο της Τροχαίας. Αφού συμπληρώσεις τον πίνακα να βρεις τη μέση τιμή της.

▼

$\bar{x}$ = ...

ταχύτητα x (Km/h)	κέντρο κλάσης x_i	αυτοκίνητα v_i	$v_i x_i$
$50 \le x < 70$		5	
$70 \le x < 90$		35	
$90 \le x < 110$		40	
$110 \le x < 130$		15	
$130 \le x < 150$		5	
σύνολα		$v=$	$\Sigma v_i x_i =$

9 ▶ Δίπλα βλέπεις την κατανομή του νούμερου των παπουτσιών αγοριών 6 ετών.
Αφού συμπληρώσεις τον πίνακα να βρεις τη μέση τιμή του.

▼

$\bar{x}$ = ...

νούμερο x_i	αγόρια v_i	ποσοστό αγοριών f_i%	$v_i x_i$
29	6	10	
30			
31		30	
32		20	
33		20	
σύνολα	$v=$		$\Sigma v_i x_i =$

10 ▶ Δύο διαδοχικές τιμές x_i, x_{i+1} μίας μεταβλητής ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους 50, έχουν αντίστοιχα σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_i =30% και F_{i+1} =42%.

▼ Η συχνότητα της τιμής x_{i+1} είναι: v_{i+1} = ...

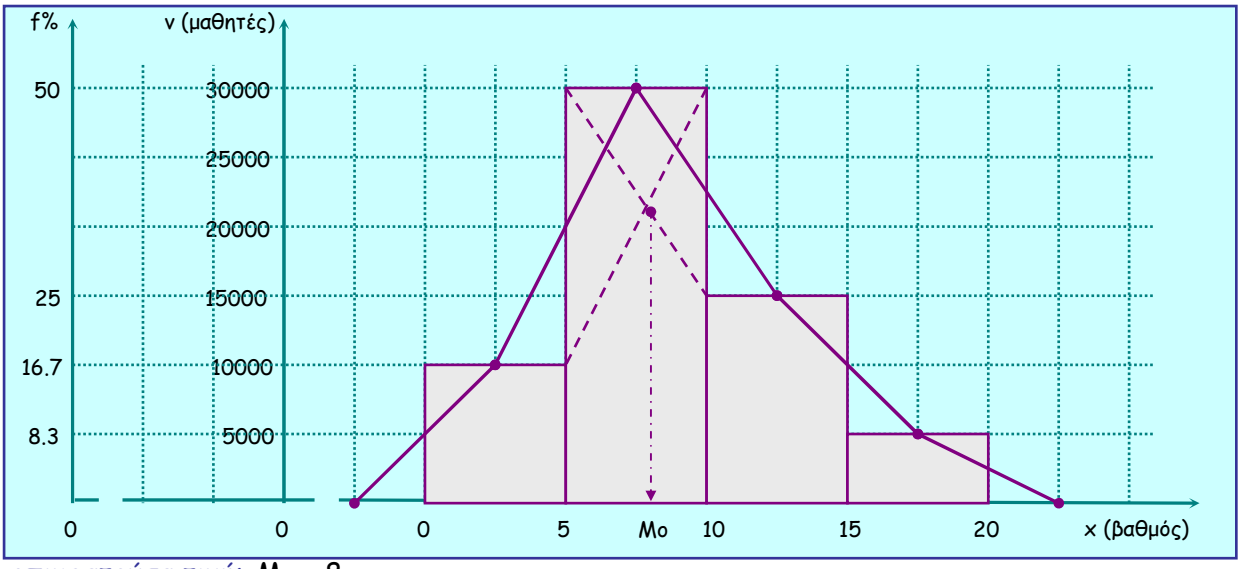
11 ▶ Ας συζητήσουμε τώρα για την επίδοση των υποψηφίων στο μάθημα των Μαθηματικών στις Γενικές εξετάσεις κάποιας χρονιάς για την εισαγωγή στα ΑΕΙ και ΤΕΙ.

♦ *κατανομή συχνοτήτων*

βαθμός	κέντρο κλάσης	(μαθητές) συχνότητα	σχ. συχν.	αθρ. συχν.	σχ. αθρ. συχν.	στήλες υπολογισμών		
x	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$v_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
$0 \le x < 5$	2.5	10000	16.7	10000	16.7	25000	90.25	902500
$5 \le x < 10$	7.5	30000	50	40000	66.7	225000	20.25	607500
$10 \le x < 15$	12.5	15000	25	55000	91.7	187500	0.25	3750
$15 \le x < 20$	17.5	5000	8.3	60000	100	87500	30.25	151250
σύνολα		Σv_i =60000	100			$\Sigma v_i x_i$ =725000		$\Sigma v_i(x_i-\bar{x})^2$ =1665000

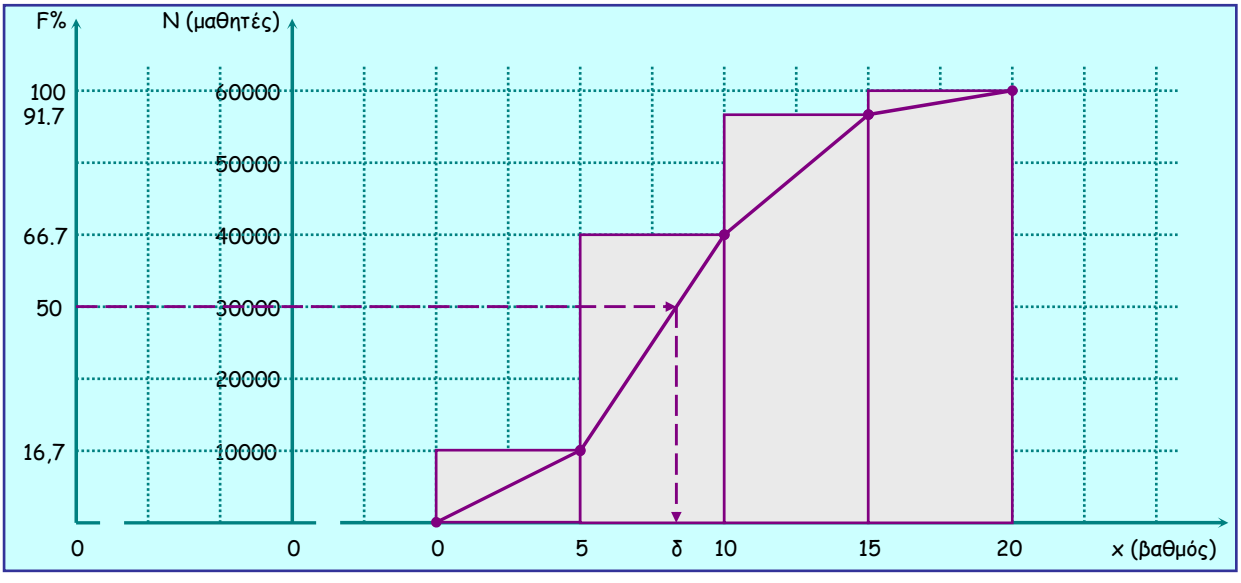
♦ *μέση τιμή:* $\bar{x} = \frac{\Sigma v_i x_i}{v} = \frac{725000}{60000} \approx 12$ ♦ *τυπική απόκλιση:* $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma v_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{1665000}{60000}} = \sqrt{27.75} \approx 5.3$

♦ *ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων*



♦ *επικρατούσα τιμή:* $M_o = 8$

♦ *ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων*



♦ *διάμεσος:* $\delta = 8$

12 ▶ Αφού συμπληρώσεις τον πίνακα, να βρεις:

$\bar{x}$ =

s =

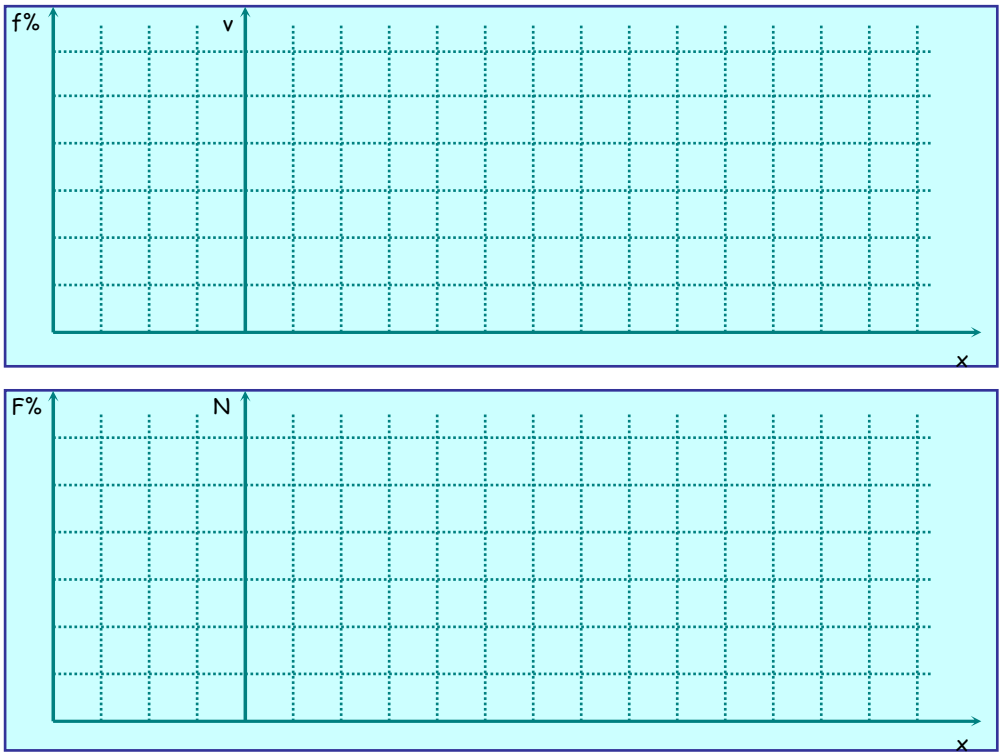
βαθμός στα μαθηματικά	μαθητές	στήλες υπολογισμών		
x_i	v_i	$v_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
9	7			
10	3			
11	4			
13	4			
14	1			
15	2			
16	2			
17	1			
18	1			
σύνολα	v =	$\Sigma v_i x_i$ =		$\Sigma v_i(x_i-\bar{x})^2$ =

13 ▶ Αφού συμπληρώσεις τον ακόλουθο πίνακα

x	x_i	v_i	f_i%	N_i	F_i%	$v_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
$5 \le x < 7$		25						
$7 \le x < 9$		8						
$9 \le x < 11$		11						
$11 \le x < 13$		4						
$13 \le x < 15$		2						
αθροίσματα								

να βρεις: $\bar{x}$ = s =

κατασκεύασε τώρα ιστόγραμμα και πολύγωνο v-f και N-F και πες: δ =... και M_o =...



14► Μετά την υπαγόρευση ενός κειμένου σε 80 μαθητές μετρήσαμε τα ορθογραφικά λάθη που έκαναν.
Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα δίπλα:

Λάθη	Μαθητές
0	10
1	22
2	23
3	15
4	6
5	3
6	1

♦ πίνακας κατανομής συχνοτήτων

					στήλες υπολογισμών		
x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$v_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
0	10	$\frac{10}{80}=12.5\%$	10	12.5%	0	4	40
1	22	$\frac{22}{80}=27.5\%$	32	40%	22	1	22
2	23	$\frac{23}{80}=28.75\%$	55	68.75%	46	0	0
3	15	$\frac{15}{80}=18.75\%$	70	87.5%	45	1	15
4	6	$\frac{6}{80}=7.5\%$	76	95%	24	4	24
5	3	$\frac{3}{80}=3.75\%$	79	98.75%	15	9	27
6	1	$\frac{1}{80}=1,25\%$	80	100%	6	16	16
σύνολα	σύνολο μαθητών μέγεθος δείγματος ν=80	100%			158		144

♦ μέτρα θέσης

. **επικρατούσα τιμή:** $M_o = 2$

. **διάμεσος τιμή:** $\delta = \frac{40^{η}\ \text{παρατήρηση} + 41^{η}\ \text{παρατήρηση}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

. **μέση τιμή:** $\bar{x} = \frac{\sum v_i x_i}{v} = \frac{158}{80} \approx 2$

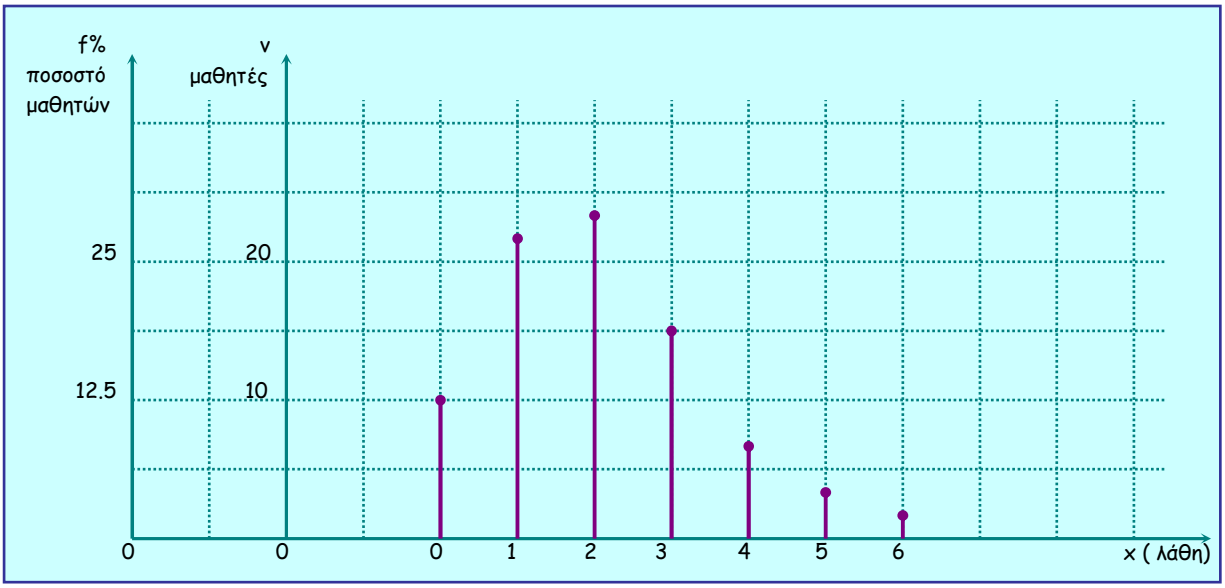
♦ μέτρα διασποράς

. **εύρος:** $R = 6-0 = 6$

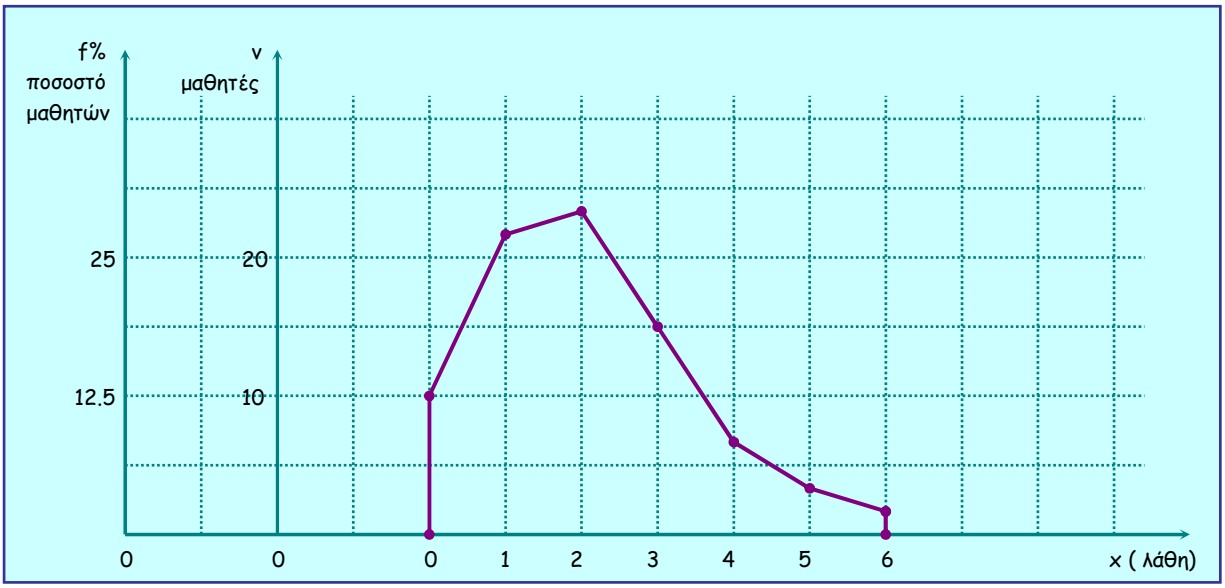
. **διακύμανση:** $s^2 = \frac{\sum v_i(x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{144}{80} = 1.8$

. **τυπική απόκλιση:** $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.8} \approx 1.34$

♦ διάγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων



♦ πολύγωνο συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων



15► Δίπλα βλέπουμε τα αποτελέσματα ενός ελέγχου της τροχαίας σχετικά με τις ταχύτητες (σε Km/h) των αυτοκινήτων που περνούν μπροστά από ένα σχολείο.

ταχύτητα x	αυτοκίνητα
$0 \le x < 10$	3
$10 \le x < 20$	7
$20 \le x < 30$	30
$30 \le x < 40$	50
$40 \le x < 50$	20
$50 \le x < 60$	10

♦ πίνακας κατανομής συχνοτήτων

						στήλες υπολογισμών		
κλάση	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$v_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
[0, 10)	5	3	$\frac{3}{120}$ = 2.5%	3	2.5%	15	841	2523
[10, 20)	15	7	$\frac{7}{120}$ = 5.8%	10	8.3%	105	361	2527
[20, 30)	25	30	$\frac{30}{120}$ = 25%	40	33.3%	750	81	2430
[30, 40)	35	50	$\frac{50}{120}$ = 41.7%	90	75%	1750	1	50
[40, 50)	45	20	$\frac{20}{120}$ = 16.7%	110	91.7%	900	121	2420
[50, 60)	55	10	$\frac{10}{120}$ = 8.3%	120	100%	550	441	4410
σύνολα		v=120	100%			4070		14360

♦ μέτρα θέσης

. **επικρατούσα τιμή:** $M_o = 34$ (βλ. ιστόγραμμα συχνοτήτων)

. **διάμεσος τιμή:** $\delta = 34$ (βλ. πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων)

. **μέση τιμή:** $\bar{x} = \frac{\sum v_i x_i}{v} = \frac{4070}{120} \approx 34$

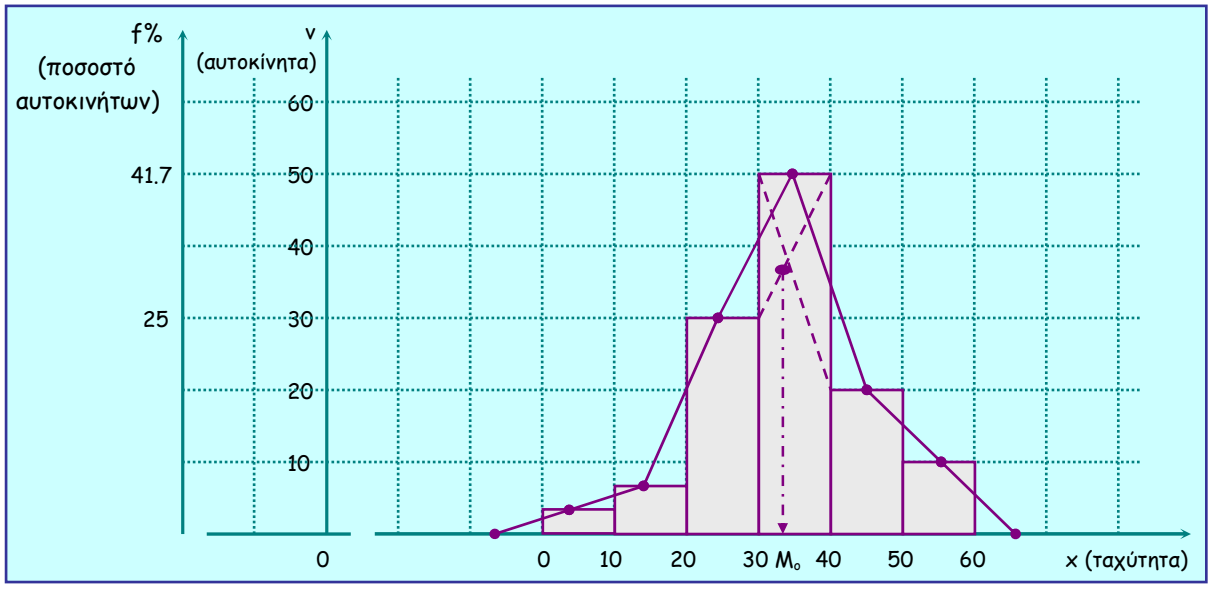
♦ μέτρα διασποράς

. **εύρος:** $R = 60-0 = 60$

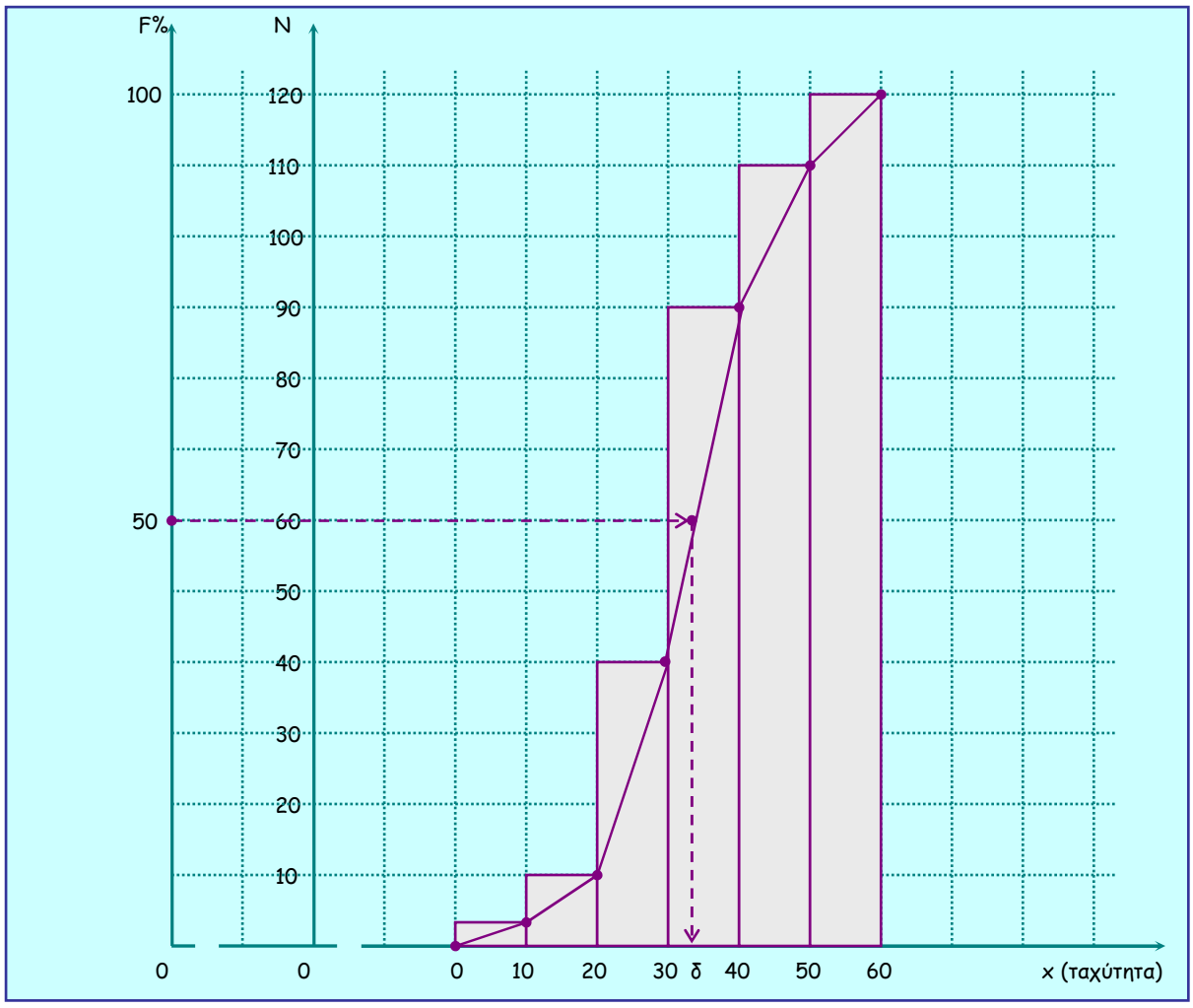
. **διακύμανση:** $s^2 = \frac{\sum v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{14360}{120} \approx 119.7$

. **τυπική απόκλιση:** $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{119.7} \approx 11$

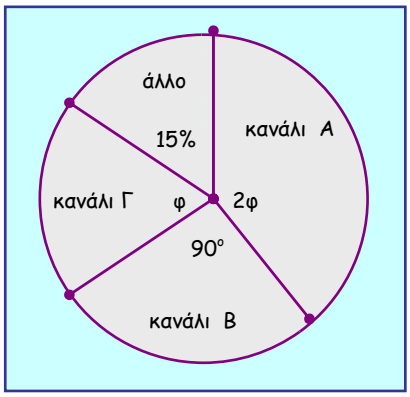
♦ ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων-σχετικών συχνοτήτων



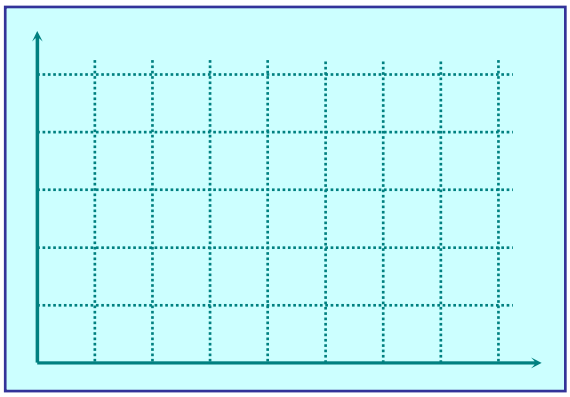
♦ ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων-αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων



16 ▶ Με βάση τις πληροφορίες τηλεφωνικής δημοσκόπησης δείγματος τηλεθεατών (Λιμένας: 22.58 - 20/01/06) που σου δίνονται δίπλα, να κατασκευάσεις ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για την κατανομή της τηλεθέασης των καναλιών Α, Β, Γ και «άλλου».

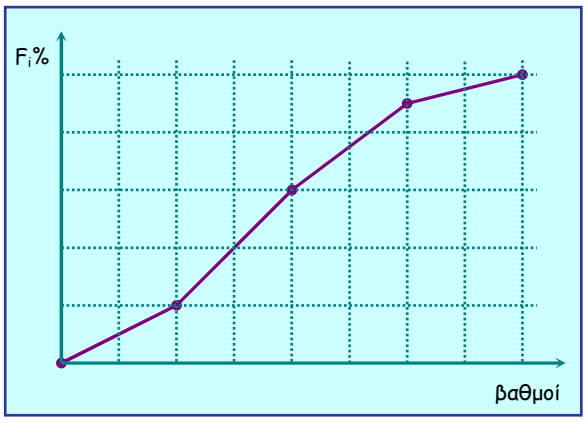


▼



17 ▶ Ένας μαθηματικός αφού ομαδοποίησε σε ισοπλατείς κλάσεις τους βαθμούς 50 γραπτών του Ιουνίου στην άλγεβρα της α΄ λυκείου, έφτιαξε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων που βλέπεις:

i. πόσοι γράψανε κάτω από τη βάση;
ii. πόσοι γράψανε πάνω από 15;
iii. ποιος είναι ο διάμεσος των βαθμών;
iv. ποιος είναι ο μέσος όρος των βαθμών;



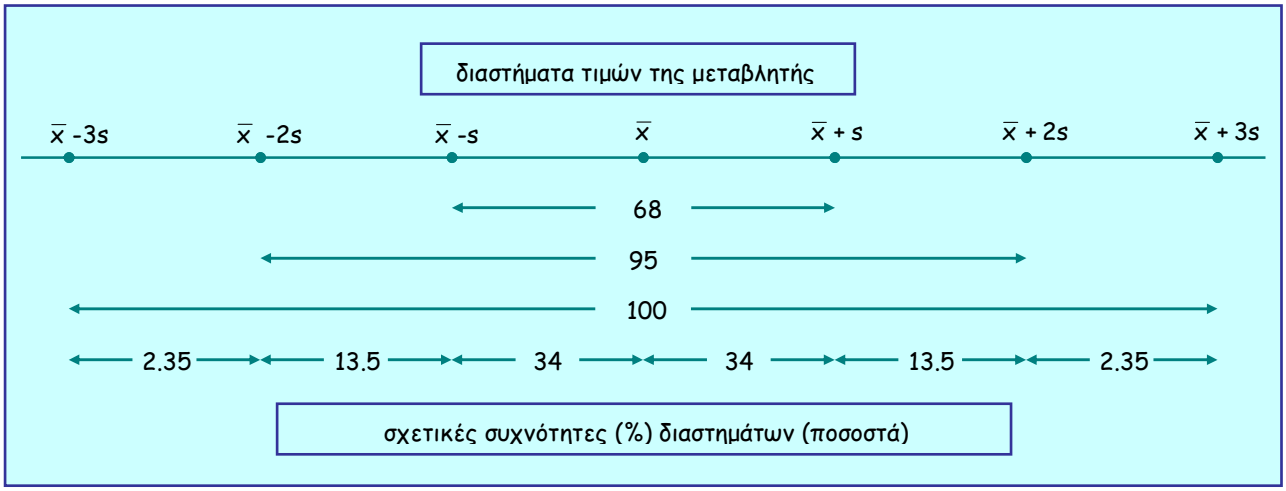
▼

18 ▶ Μία βιομηχανία κατασκευάζει λαμπτήρες με μέσο χρόνο ζωής 1800 ώρες και τυπική απόκλιση 150 ώρες. Η κατανομή του χρόνου ζωής των λαμπτήρων είναι περίπου κανονική. Τι ποσοστό λαμπτήρων αναμένεται να έχει χρόνο ζωής:

i. το πολύ 1800 ώρες; ii. πάνω από 1950 ώρες;

iii. από 1500 έως 1950 ώρες; iv. κάτω από 1500 ώρες;

▼ αφού η κατανομή θεωρείται κανονική, ισχύουν:



τα αναμενόμενα ποσοστά είναι: i. 50% αφού $1800 = \bar{x}$

ii. 13.5+2.5=16% αφού $1950 = \bar{x} + s$

iii. 13.5+68=81.5% αφού $1500 = \bar{x} - 2s$ ενώ $1950 = \bar{x} + s$

iv. 2.5% αφού $1500 = \bar{x} - 2s$

19 ▶ Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν για να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερα από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερα από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

i. βρες το μέσο χρόνο και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής των μαθητών.
ii. εξέτασε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
iii. αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000, πόσοι μαθητές θα έχουν χρόνο διαδρομής από 14 μέχρι 16 λεπτά;
iv. μία μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Βρες πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (C.V.).

(4ο θέμα γενικών εξετάσεων 2001)

▼

i. αφού η κατανομή είναι κανονική, ο μέσος χρόνος είναι ο διάμεσος χρόνος
άρα $\bar{x} = 12$ λεπτά (αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερα από 12 λεπτά)
το 50 - 16 = 34% των μαθητών χρειάζεται χρόνο από 10 μέχρι 12 λεπτά , κι επειδή στην κανονική κατανομή το 68/2=34% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο $(\bar{x}-s, \bar{x})$ είναι: $\bar{x}-s=10 \Leftrightarrow s=\bar{x}-10=12-10=2$ λεπτά

ii. c.v. $=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{12}=0.1666\ldots \approx 0.167=16.7\% > 10\%$ συνεπώς το δείγμα είναι ανομοιογενές

iii. στην κατανομή του χρόνου που εξετάζουμε είναι: $(14,16) = (\bar{x}+s, \bar{x}+2s)$
και ξέρουμε ότι στην κανονική κατανομή στο $(\bar{x}+s, \bar{x}+2s)$
βρίσκεται περίπου το $\frac{95-68}{2}=13.5\%$ των παρατηρήσεων
συνεπώς από 14 μέχρι 16 λεπτά θα χρειασθούν: $\frac{13.5}{100}\cdot 4000 = 540$ μαθητές

iv. η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι: $\bar{x}+5=17$ λεπτά ,
ενώ η τυπική απόκλιση (που δεν μεταβάλλεται) είναι: 2 λεπτά ,
συνεπώς ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος είναι $\frac{2}{17} \approx 11.8\%$
άρα ο c.v. μεταβάλλεται (μειώνεται) κατά 4.9 (περίπου) μονάδες

20 ▶ Αν το δείγμα $t_1, t_2, \ldots, t_v$ έχει διασπορά 0, να αποδείξεις ότι: $t_1 = t_2 = \ldots = t_v$.

▼

21 ▶ Να αποδείξεις ότι: $s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2 f_i$.

▼

22 ▶ Γνωρίζοντας τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X, να βρεις τη μέση τιμή και την απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής $Y = \alpha X + \beta$.

Ποια είναι η μέση τιμή και η απόκλιση της $Y = \dfrac{X - \overline{X}}{s_X}$;

▼

23 ▶ Ένα δείγμα έχει c.v. 30%.
Αυξάνοντας όλες τις παρατηρήσεις κατά 1 μονάδα προκύπτει δείγμα με c.v. 20%.
Ποια ήταν η μέση τιμή του αρχικού δείγματος;

▼

24 ▶ Μία δημοσκόπηση σε 5 πόλεις, δίνει σε ένα κόμμα τα ακόλουθα εκλογικά ποσοστά:

32, 35, 51, 38 και 44%

i. υπολόγισε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής του δείγματος των ποσοστών.

ii. αν το εκλογικό ποσοστό του κόμματος αυξηθεί κατά 2 μονάδες σε κάθε πόλη, να εξετάσεις αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των ποσοστών.

▼

25 ▶ Ένας ερευνητής για να μελετήσει την επίδραση των Γενικών Εξετάσεων στο βάρος των μαθητών παίρνει ένα δείγμα ποντικών που αποτελείται κατά

10% από ποντίκια ράτσας Α που το καθένα ζυγίζει 500gr
20% από ποντίκια ράτσας Β που το καθένα ζυγίζει 400gr
30% από ποντίκια ράτσας Γ που το καθένα ζυγίζει 300gr
40% από ποντίκια ράτσας Δ που το καθένα ζυγίζει 200gr

Να βρεις πόσο τουλάχιστον πρέπει να αυξήσει το βάρος του κάθε ποντικιού ώστε το δείγμα να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές (δηλ. να έχει C.V. ≤ 10%)

▼

paul gauguin (1848-1903) *«the midday nap» (1894)*

ορισμοί...

- πείραμα του οποίου η επανάληψη δεν έχει επακριβώς προβλέψιμο αποτέλεσμα το λέμε **πείραμα τύχης**, τα **δυνατά αποτελέσματα** (ω_i) ενός πειράματος τύχης τα λέμε και **δυνατές περιπτώσεις** ή **απλά** (ή και **στοιχειώδη**) **ενδεχόμενα** του πειράματος και το σύνολό τους (Ω) **δειγματικό χώρο** του πειράματος τύχης

- το σύνολο με στοιχεία ένα ή περισσότερα από τα ω_i λέγεται **ενδεχόμενο** (ή γεγονός), **απλό** αν είναι μονομελές ή **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία . Όταν το αποτέλεσμα μιας εκτέλεσης ενός πειράματος είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου A, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο A **πραγματοποιείται** (ή **συμβαίνει**). Τα στοιχεία του A λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίηση του A και το πλήθος τους συμβολίζεται $N(A)$

- ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι το **βέβαιο ενδεχόμενο** που πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω
ενώ δεχόμαστε ως **αδύνατο ενδεχόμενο** το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης

- **κλασικός ορισμός πιθανότητας:**
σε πείραμα τύχης με **ισοπίθανα** απλά ενδεχόμενα (που συμβαίνουν ίδιο αριθμό φορών σε επαρκές πλήθος επαναλήψεων του πειράματος)
ορίζουμε ως **πιθανότητα ενδεχομένου** A: $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

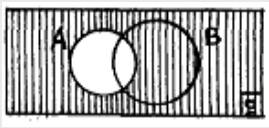
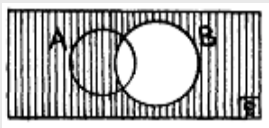
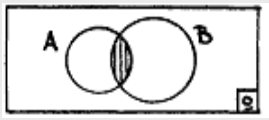
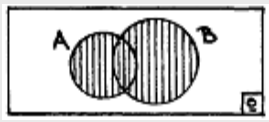
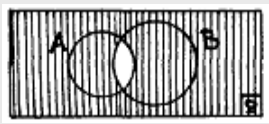
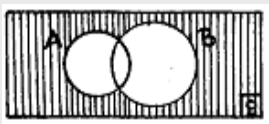
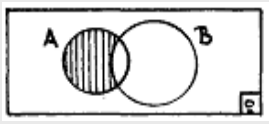
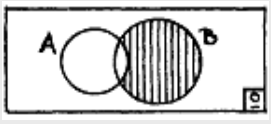
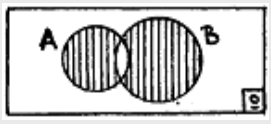
- **αξιωματικός ορισμός πιθανότητας:**
έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ ένας δ.χ. με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων
σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό $P(\omega_i)$ (**πιθανότητα του ω_i**), ώστε:
  - $0 \le P(\omega_i) \le 1$
  - $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_v) = 1$

  ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ορίζουμε τον πραγματικό:
  $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_\kappa)$ ενώ ορίζουμε: $P(\varnothing) = 0$

  (αν τα ω_i είναι ισοπίθανα, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου)

- αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές τότε **σχετική συχνότητα** του A ονομάζουμε το λόγο: $f_A = \dfrac{\kappa}{v}$
στην πράξη, ιδιαίτερα αν δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας,
παίρνουμε: $P(A) = \lim\limits_{v \to +\infty} f_A$

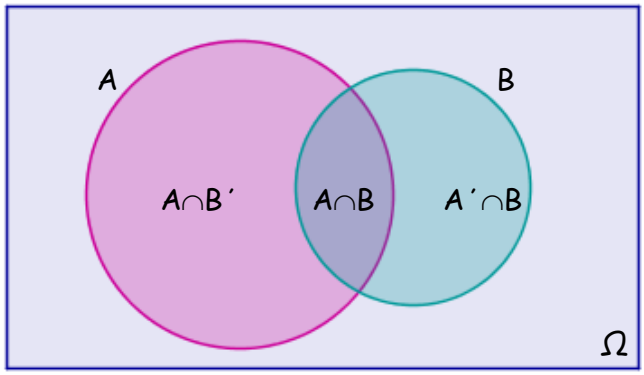
ενδεχόμενα και πιθανότητες...

λεκτική και συμβολική διατύπωση	διάγραμμα Venn	πιθανότητα
δεν πραγματοποιείται το A **A΄** *(όχι A)* (**αντίθετο** ή **συμπληρωματικό** του Α)		**P(A΄) = 1 - P(A)**
δεν πραγματοποιείται το B **B΄** *(όχι B)* (αντίθετο ή συμπληρωματικό του Β)		**P(B΄) = 1 - P(B)**
τα A και B πραγματοποιούνται ταυτόχρονα **A ∩ B** *(A και B)* (**τομή** των Α και Β)		**P(A ∩ B)**
πραγματοποιείται το A ή το B ή και τα δύο **A ∪ B** *(A ή B)* (**ένωση** των Α και Β)		**P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)**
τα A και B δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα **(A ∩ B)΄** **(= A΄∪B΄)** (v. de morgan)		**P[(A ∩ B)΄]=1 - P(A ∩ B) ...=P(A΄∪ B΄)**
δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B **(A∪ B)΄** **(= A΄∩B΄)** (v. de morgan)		**P[(A ∪ B)΄]=1 - P(A ∪ B) ...=P(A΄∩ B΄)**
πραγματοποιείται μόνο το A **A - B** **(= A ∩ B΄)** (**διαφορά** του Β από το Α)		**P(A - B) = P(A) - P(A ∩ B)**
πραγματοποιείται μόνο το B **B - A** **(= A΄∩ B)** (διαφορά του Α από το Β)		**P(B - A) = P(B) - P(A ∩ B)**
πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A και B **(A - B) ∪ (B - A)** **(= (A ∪ B) ∩ (A ∩ B)΄)**		**P[(A-B)∪(B-A)] = P(A∪B)- P(A∩B)** **= P(A)+P(B)-2P(A∩B)**

δύο ενδεχόμενα Α και Β...

όταν δεν είναι **ξένα** δηλαδή όταν

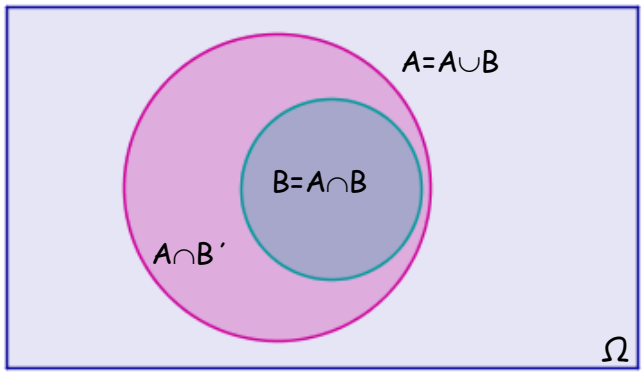
$A \cap B \neq \varnothing$



όταν η **πραγματοποίηση** του Β **συνεπάγεται** την **πραγματοποίηση** του Α δηλαδή όταν

$B \subseteq A$

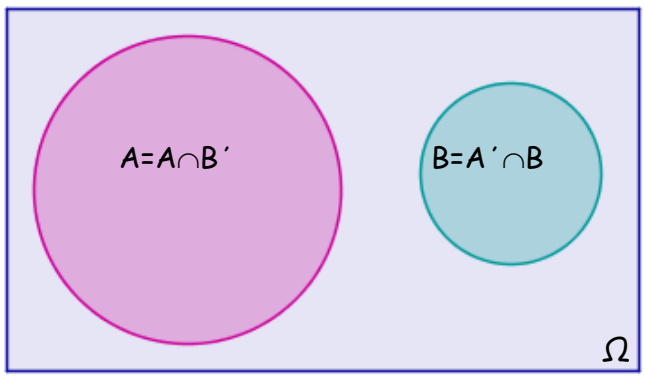
οπότε: $P(B) \leq P(A)$



όταν είναι ξένα (**ασυμβίβαστα**) δηλαδή όταν

$A \cap B = \varnothing$

οπότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



πάντα: $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$ $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

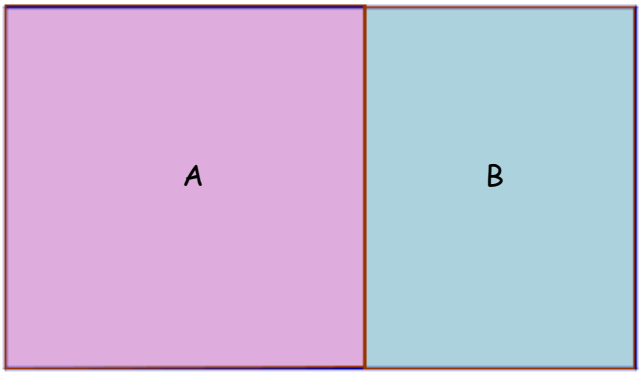
δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα...

$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = \Omega$

$B = A'$ $A = B'$ $(A')' = A$ $(B')' = B$

(και βέβαια: $\Omega' = \varnothing$ ενώ $\varnothing' = \Omega$)



στην πράξη τώρα...

1► αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξεις ότι:

i. $P(\text{«πραγματοποιείται το } A \text{ αλλά όχι το } B\text{»}) = P(A) - P(A \cap B)$

ii. $P(\text{«πραγματοποιείται ακριβώς ένα απ' τα } A \text{ και } B\text{»}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

▼ i. το ενδεχόμενο «πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B» είναι το: $A \cap B'$

ισχύει: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ και τα $A \cap B$ και $A \cap B'$ είναι προφανώς ξένα

συνεπώς: $P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')]$

$= P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$\Leftrightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

ii. το ενδεχόμενο «πραγματοποιείται ακριβώς ένα απ' τα A και B» είναι το: $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$

$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$ αφού τα $A \cap B'$ και $A' \cap B$ είναι προφανώς ξένα

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$

2► αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με: $P(A) = \frac{2}{5}$ και $P(B) = \frac{4}{5}$, δείξε ότι:

i. $P(A \cup B) \geq \frac{2}{5}$ ii. $P(A \cap B) \geq \frac{1}{5}$ iii. τα A και B δεν είναι ξένα iv. $P(A' \cap B) \leq \frac{3}{5}$

▼ i. $P(A \cup B) \geq \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$, που ισχύει αφού: $(A \cap B) \subseteq B$

ii. $P(A \cap B) \geq \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$, που ισχύει

iii. αφού $P(A \cap B) \geq \frac{1}{5}$ είναι: $P(A \cap B) \neq 0$ συνεπώς τα A και B δεν είναι ξένα

iv. $P(A' \cap B) \leq \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{5}$, που ισχύει

3► δύο παίκτες Α και Β παίζουν από 50€ με τη συμφωνία να τα κερδίσει ο Α αν σε 5 διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος εμφανισθούν περισσότερες κεφαλές (Κ) και ο Β αν εμφανισθούν περισσότερα γράμματα (Γ). Ρίχνουν το νόμισμα 3 φορές, εμφανίζονται 2Κ και 1Γ και για κάποιον λόγο υποχρεώνονται να σταματήσουν. Πώς πρέπει να μοιρασθούν τα 50€ ;

▼ Θα πρέπει να μοιρασθούν τα 100€ ανάλογα με την πιθανότητα που έχει ο καθένας τους να κερδίσει αν συνεχίσουν τις ρίψεις

τα δυνατά αποτελέσματα των δύο ρίψεων είναι: ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ

$P(\text{«κερδίζει ο Α»}) = P(\text{«τουλάχιστον 1 Κ»}) = \frac{3}{4}$

$P(\text{«κερδίζει ο Β»}) = P(\text{«2Γ»}) = \frac{1}{4}$

συνεπώς ο Α πρέπει να πάρει: $\frac{3}{4}100 = 75€$ και ο Β: $\frac{1}{4}100 = 25€$

4► από τα εξαρτήματα που παράγει μία βιομηχανία:

72% είναι αποδεκτά (Α)
12% είναι πολύ μεγάλα (M_1)
8% είναι πολύ μικρά (M_2)
15% έχουν λάθος ετικέτα (E_1)
2% έχουν σωστή ετικέτα σε λάθος θέση (E_2)

Να βρεις την πιθανότητα ένα τυχαίως επιλεγμένο εξάρτημα:

i. να είναι ελαττωματικό λόγω μεγέθους (Μ)
ii. να μην είναι ελαττωματικό λόγω μεγέθους
iii. να είναι ελαττωματικό λόγω ετικέτας (Ε)
iv. να είναι ελαττωματικό λόγω μεγέθους ή λόγω ετικέτας
v. να είναι ελαττωματικό λόγω μεγέθους και λόγω ετικέτας

▼ i. $P(M) = P(M_1 \cup M_2)$
$= P(M_1) + P(M_2)$ αφού προφανώς: $M_1 \cap M_2 = \varnothing$
$= 12\% + 8\% = 20\%$

ii. $P(M') = 1 - P(M) = 20\%$

iii. $P(E) = P(E_1 \cup E_2)$
$= P(E_1) + P(E_2)$ αφού προφανώς: $E_1 \cap E_2 = \varnothing$
$= 15\% + 2\% = 17\%$

iv. ισχύουν προφανώς: $(M \cup E) \cup A = \Omega$ και $(M \cup E) \cap A = \varnothing$
συνεπώς: $(M \cup E)' = A$
άρα: $P(M \cup E) = 1 - P[(M \cup E)']$
$= 1 - P(A) = 28\%$

v. $P(M \cap E) = P(M) + P(E) - P(M \cup E) = 20\% + 17\% - 28\% = 9\%$

5► σε μία έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 20% δεν έχει μηχανή, το 40% δεν έχει λάστιχα και το 15% δεν έχει ούτε μηχανή ούτε λάστιχα. Να βρεις την πιθανότητα ένα τυχαίως επιλεγμένο αυτοκίνητο της έκθεσης να έχει μηχανή και λάστιχα.

▼ $P(M \cap \Lambda) = 1 - P[(M \cap \Lambda)'] = 1 - P(M' \cup \Lambda') = 1 - [P(M') + P(\Lambda') - P(M' \cap \Lambda')] = 1 - (0.2 + 0.4 - 0.15) = 0.55$ δηλ. 55%

6► έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει
$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω: $A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$ $(x \in R)$

i. να βρεις τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

ii. να βρεις την τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$

iii. αν $x = -1$ να αποδείξεις ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$
και να υπολογίσεις τις πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$

▼ i. $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow 11P(5) = 1 \Leftrightarrow P(5) = \frac{1}{11}$

συνεπώς: $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \frac{2}{11}$ και $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{11}$

ii. πρέπει καταρχήν $-1 \in A$ δηλαδή $x^2 - x - 3 = -1$ δηλ. $x^2 - x - 2 = 0$ οπότε $x = -1$ ή $x = 2$

αν $x = -1$: $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$ οπότε $A \cap B = \{-1, 3\}$
αν $x = 2$: $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 3, 8, -3\}$ οπότε $A \cap B = \{3\}$
άρα είναι: $x = -1$

iii. $P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$

$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$

$P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{11}$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \frac{5}{11} + 1 - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$

σειρά σου τώρα...

1. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$4P^2(A) + 9P^2(B) - 4P(A) - 12P(B) + 5 = 0$, να αποδείξεις ότι τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα

2. Αν για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P^2(A) + P^2(A') = 1$,
να αποδείξεις ότι το Α είναι το βέβαιο ή το αδύνατο ενδεχόμενο

3. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $A \subseteq B$, να αποδείξεις ότι:
i. $P(A' \cap B) = P(B) - P(A)$ ii. $P(A \cap B') = 0$

4. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A') = P(A \cup B')$ και
$P(B') = P(A' \cup B)$, να αποδείξεις ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα και ότι $P(A) = P(B)$

5. Αν Α,Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξεις ότι: $P(A - B) + P(B - A) \leq 1$

6. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω
με $P(A) = P(A \cup B')$ και $P(B) = P(A' \cap B)$ να αποδείξεις ότι τα Α, Β είναι συμπληρωματικά

7. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A') = 0.15$ και $P(B') = 0.65$,
να αποδείξεις ότι: $0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.35$

8. Σε έναν κουμπαρά υπάρχουν 20 κέρματα των 50λεπτών και άγνωστο πλήθος κερμάτων του 1€ και των 2€. Αν η πιθανότητα να πάρουμε στην τύχη ένα κέρμα του 1€ είναι 1/3, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε στην τύχη ένα κέρμα των 2€ είναι 1/4, να βρεις πόσα € υπάρχουν στον κουμπαρά

9. Σε ένα εργοστάσιο συσκευασίας ροδάκινων, ύστερα από βλάβη ενός μηχανήματος διαλογής διαπιστώθηκε ότι ο αριθμός των ροδάκινων με μέγεθος σύμφωνο με τις προδιαγραφές είναι 2πλάσιος από τον αριθμό των ροδάκινων με μέγεθος μικρότερο (μ) και 5πλάσιος από τον αριθμό των ροδάκινων με μέγεθος μεγαλύτερο (Μ) του μεγέθους των προδιαγραφών. Αν διαλέξουμε στην τύχη ένα ροδάκινο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μέγεθος εκτός προδιαγραφών;

10. Ο μέσος μισθός των εργαζομένων σε μία εταιρεία είναι 960€.
Ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 1000€, ενώ των γυναικών είναι 800€.
Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν εργαζόμενο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

11. Σε μία τάξη με 30 μαθητές, οι 15 έχουν ποδήλατο, οι 10 έχουν μηχανάκι και 4 έχουν και ποδήλατο και μηχανάκι. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή της τάξης, να βρεις τις πιθανότητες των ενδεχομένων: i. «ο μαθητής δεν έχει ποδήλατο ούτε μηχανάκι»
ii. «ο μαθητής έχει μόνο ποδήλατο»

12. Ένας τυχαία επιλεγμένος κάτοικος ενός χωριού οδηγεί αυτοκίνητο με πιθανότητα 1/3, οδηγεί μηχανάκι με πιθανότητα 1/5, ενώ η πιθανότητα να μην οδηγεί ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι είναι 8/15. Αν 100 κάτοικοι του χωριού οδηγούν και αυτοκίνητο και μηχανάκι πόσους κατοίκους έχει το χωριό;

13. Αν x είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός «τίμιου» ζαριού, να βρεις την πιθανότητα οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 και x να έχουν μέση τιμή μικρότερη του 3

14. Από τους σπόρους που σπέρνει ένας γεωργός φυτρώνει μόνο το 90% κι απ' τα φυτά αυτά καρποφορεί μόνο το 80%. Αν ο γεωργός φυτέψει ένα σπόρο, να βρεις τις πιθανότητες των ενδεχομένων i. «ο σπόρος να φυτρώσει αλλά να μην καρποφορήσει»
ii. «ο σπόρος να καρποφορήσει»

15. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με: $P(A)+P(B)\neq 2\,P(A\cap B)$
Έστω επίσης η συνάρτηση $f(x)=[\,x-P(A\cup B)\,]^3-[\,x-P(A\cap B)\,]^3$, $x\in R$
i. να δείξεις ότι: $P(A\cap B)\neq P(A\cup B)$.
ii. αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξεις ότι: $f(P(A))=f(P(B))$.

η δουλειά μου αυτή είναι αφιερωμένη στα
«παιδιά»
που τέλειωσαν το λύκειο λιμένα το 2005 και 2006
ξέρουν αυτά...