Μαθηματικά Α΄ Δέσμης

Θέματα Γενικών Εξετάσεων 1990 - 2000

Επιμέλεια: Δ. Ποιμενίδης

www.sonom.gr

ιδιοχείρως

1990

Ζήτημα 1ο

Α|. "Αν Α και Β είναι πίνακες ν×ν και ισχύουν οι σχέσεις $A^2=A$ και $AB+BA=\mathbb{O}$ νά αποδείξετε ότι θά είναι : $AB=BA=\mathbb{O}$.

Β|. "Εστω Α, Β, Γ πίνακες ν×ν. "Αν ισχύει ότι $AB=\Gamma A=\mathbb{I}$, τότε νά αποδείξετε ότι ό Α είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=B=\Gamma$.

Γ|. "Εστω Α και Β πίνακες ν×ν όπου ό Β είναι αντιστρέψιμος. Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε θετικό ακέραιο κ ισχύει ή σχέση: $(BAB^{-1})^{\kappa}=BA^{\kappa}B^{-1}$.

---

www.sonom.gr

Α|.

$$AB+BA=\mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} A(AB+BA)=\mathbb{O} \\ (AB+BA)\cdot A=\mathbb{O} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2B+ABA=\mathbb{O} \\ ABA+BA^2=\mathbb{O} \end{cases} \Rightarrow A^2B=BA^2 \Rightarrow AB=BA$$

οπότε: $AB+BA=\mathbb{O} \Rightarrow 2AB=\mathbb{O} \Rightarrow AB=\mathbb{O}$ άρα $AB=BA=\mathbb{O}$.

Β|. $B=\mathbb{I}\cdot B=\Gamma AB=\Gamma\cdot\mathbb{I}=\Gamma$ συνεπώς είναι : $AB=BA=\mathbb{I}$

άρα (εξ ορισμού) ό Α είναι αντιστρέψιμος μέ $A^{-1}=B=\Gamma$.

Γ|. Θά αποδείξουμε τή ζητούμενη σχέση επαγωγικά:

i). γιά $\kappa=1$: $(BAB^{-1})^1=BA^1B^{-1}$ (ισχύει).

ii). γιά $\kappa=\nu$ ($\nu\in\mathbb{N}, \nu>1$): έστω ότι ισχύει ή : $(BAB^{-1})^{\nu}=BA^{\nu}B^{-1}$.

iii). γιά $\kappa=\nu+1$: Θά δείξω ότι ισχύει ή : $(BAB^{-1})^{\nu+1}=BA^{\nu+1}B^{-1}$.

πραγματικά:
$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^{\nu+1} &= (BAB^{-1})^{\nu}BAB^{-1} \\ &\overset{ii)}{=} BA^{\nu}B^{-1}BAB^{-1} \\ &= BA^{\nu}\mathbb{I}AB^{-1} \\ &= BA^{\nu+1}B^{-1}.\end{aligned}$$

Ζήτημα 2ο

Α]. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχὴς στὸ $[a, b]$ καὶ παραγωγίσιμη στὸ (a, b) τότε ὑπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ὥστε: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Β]. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^3}{3} + \left(\frac{b}{2}+\delta\right)x^2 + (\gamma-\delta)x + \delta$, ὅπου $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ καὶ ἰσχύει $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \gamma = 0$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τῆς C_f στὸ $(\xi, f(\xi))$ νἆναι παράλληλη στὸν $x'x$.

Α]. Θεωρία. (Θ.Μ.Τ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ). www.sonom.gr

Β].
- ἡ f εἶναι συνεχὴς στὸ $[0,1]$ (ὡς πολυωνυμική).
- ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη στὸ $(0,1)$ (ὡς πολυωνυμική).
- $$\left.\begin{array}{l} f(0) = \delta \\ f(1) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \delta + \gamma - \delta + \delta = \delta \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = f(1).$$

ἄρα σύμφωνα μὲ τὸ *Θ. Rolle* ὑπάρχει $\xi \in (0,1)$ μὲ $f'(\xi) = 0$ δηλαδὴ ὑπάρχει σημεῖο $(\xi, f(\xi))$ τῆς C_f μὲ ἐφαπτομένη παράλληλη στὸν $x'x$.

Ζήτημα 3ο

Α|. Θεωροῦμε τὸν κύκλο μὲ κέντρο $K(x_0,y_0)$ καὶ ἀκτίνα ρ, καὶ τὸ σημεῖο $A(x_1,y_1)$ αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο Α ἔχει ἐξίσωση: $(x-x_0)(x-x_1)+(y-y_0)(y-y_1)=\rho^2$.

Β|. Δίνονται ἡ εὐθεία (ε): $5x+3y+2=0$ καὶ ὁ κύκλος (c): $x^2+y^2-x-2=0$ ποὺ τέμνονται στὰ σημεῖα Μ καὶ Ν.

α|. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι γιὰ κάθε πραγματικὸ λ ἡ ἐξίσωση: $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$ παριστάνει κύκλο, ὁ ὁποῖος περνάει ἀπ' τὰ Μ καὶ Ν.
Γιὰ ποιὰ τιμὴ τοῦ λ ὁ κύκλος περνάει ἀπ' τὸ $O(0,0)$;

β|. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῆς ἐρώτησης α|. ἀνήκουν σὲ εὐθεία (ε_1), τῆς ὁποίας νὰ βρεῖτε τὴν ἐξίσωση.

Α|. Θεωρία. www.sonom.gr

Β|. α|. $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(5\lambda-1)x+3\lambda y+2\lambda-2=0 \quad ⊛$

οἱ συντεταγμένες τῶν Μ,Ν ἐπαληθεύουν τὶς (ε) καὶ (c) συνεπῶς καὶ τὴν ⊛ ἄρα ἡ ⊛ διέρχεται ἀπ' τὰ Μ, Ν. Ἡ ⊛ εἶναι τῆς μορφῆς $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ μέ:
$A^2+B^2-4\Gamma=\ldots=34\lambda^2-18\lambda+9>0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$
(ἀφοῦ τὸ τριώνυμο $34\lambda^2-18\lambda+9$ ἔχει $\Delta=18^2-4\cdot34\cdot9=18(18-68)<0$).
ἄρα ἡ ⊛ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο, ὁ ὁποῖο περνάει ἀπ' τὸ $O(0,0)$ ἄν-ν:
$0^2+0^2+(5\lambda-1)\cdot0+3\lambda\cdot0+2\lambda-2=0$ δηλ. ἄν-ν $\lambda=1$.

β|. Ἡ λ-παραμετρικὴ οἰκογένεια τῶν κύκλων ⊛ ἔχει κοινὴ χορδὴ ΜΝ συνεπῶς τὰ κέντρα ὅλων τῶν κύκλων θὰ βρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεία (ε_1) (τὴ μεσοκάθετο τοῦ ΜΝ).
Τὸ κέντρο ἑνὸς ἀπ' τοὺς κύκλους ⊛ π.χ. τοῦ κύκλου (γιὰ λ=0) $x^2+y^2-x-2=0$ δηλαδὴ τοῦ $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{3}{2})^2$ εἶναι $K(\frac{1}{2},0)$. $\varepsilon_1\perp MN \Rightarrow \varepsilon_1\perp\varepsilon \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{1}{\lambda_\varepsilon}=\frac{3}{5}$
ἀφοῦ ἡ (ε_1) περνάει ἀπ' τὸ Κ κι ἔχει $\lambda=\frac{3}{5}$ ἔχει ἐξίσωση (ε_1): $y=\frac{3}{5}(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow 6x-10y-3=0$.

<u>ἄλλη λύση</u>: Ἄν $K(x_0,y_0)$ τὸ κέντρο ἑνὸς ἀπ' τοὺς κύκλους ⊛, θὰ εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-\frac{A}{2}=-\frac{5\lambda-1}{2} \\ y_0=-\frac{B}{2}=-\frac{3\lambda}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=\frac{-2x_0+1}{5} \\ \lambda=-\frac{2y_0}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2y_0}{3}=\frac{-2x_0+1}{5} \Rightarrow 6x_0-10y_0-3=0$$

ἄρα τὰ κέντρα τῶν κύκλων ⊛ ἀνήκουν στὴν (ε_1): $6x-10y-3=0$.

3

Ζήτημα 4º

Δίνεται ή συνάρτηση f μέ $f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$.

Α]. Νά βρεῖτε τίς ἀσύμπτωτες τῆς γραφικῆς παράστασης τῆς f.

Β]. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό $E(a)$ τοῦ χωρίου πού περικλείεται μεταξύ τῆς C_f, τῆς εὐθείας $y=3x$ καί τῶν εὐθειῶν $x=1$ καί $x=a$ μέ $a>1$.

Γ]. Νά ὑπολογίσετε τό ὅριο τοῦ ἐμβαδοῦ $E(a)$ ὅταν $a\to+\infty$.

Α]. $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{1}{2x^3}\right)=3+0=3.$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

$\Rightarrow$ ἡ $y=3x$ εἶναι ἡ πλάγια ἀσύμπτωτη τῆς C_f στό $-\infty$ καί στό $+\infty$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(3x+\frac{1}{2x^2}\right)=0+(+\infty)=+\infty$$ ἄρα ἡ $x=0$ εἶναι κατακόρυφη ἀσύμπτωτη τῆς C_f.

Β]. ἄν $g(x)=3x$, οἱ f,g εἶναι συνεχεῖς στό $[1,a]$, συνεπῶς:

$$E(a)=\int_1^a|f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^a\left|\frac{1}{2x^2}\right|dx=\int_1^a\frac{1}{2x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2x}\right]_1^a=-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}.$$

Γ]. $$\lim_{a\to+\infty}E(a)=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

1991

Ζήτημα 1ο

Α|. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_k ένας υπόχωρος του ο οποίος παράγεται από κ διανύσματα του V. Αν απ' τα κ αυτά διανύσματα υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα, $1 \le \rho \le \kappa$, τα οποία μαζί με κάθε ένα απ' τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε να αποδείξετε ότι ο V_k έχει διάσταση ρ.

Β|. Αν $w = \dfrac{z+ai}{iz+a}$, με $a \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq ai$, να αποδείξετε ότι:

α|. ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

β|. ισχύει $|w| = 1$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός.

www.sonom.gr

Α|. Θεωρία.

Β|. α|. $w \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}+\overline{ai}}{\overline{iz}+\bar{a}} = \dfrac{-z-ai}{iz+a}$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-ai}{-i\bar{z}+a} = \frac{-z-ai}{iz+a}$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z}+az+a\bar{z}-ia^2 = iz\bar{z}-a\bar{z}-az-ia^2$$

$$\Leftrightarrow 2a(z+\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z+\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}.$$

β|. $|w| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z+ai|}{|iz+a|} = 1$

$$\Leftrightarrow |z+ai| = |iz+a|$$

$$\Leftrightarrow |z+ai|^2 = |iz+a|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+ai)(\overline{z+ai}) = (iz+a)(\overline{iz+a})$$

$$\Leftrightarrow (z+ai)(\bar{z}-ai) = (iz+a)(-i\bar{z}+a)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-iaz+ia\bar{z}+a^2 = z\bar{z}+iaz-ia\bar{z}+a^2$$

$$\Leftrightarrow 2ia(\bar{z}-z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}-z = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Ζήτημα 2ο

Α|. Έστω ακολουθία (a_ν) με $\lim a_\nu \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α|. υπάρχει φυσικός κ τέτοιος ώστε $a_{\nu+\kappa} \neq 0$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

β|. για τον παραπάνω κ η ακολουθία $b_\nu = \frac{1}{a_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.

Β|. Έστω $b \in (1, +\infty)$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_ν) με:

$a_1 = b^{1/b}$ και $a_{\nu+1} = (b^{1/b})^{a_\nu}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α|. η (a_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

β|. η (a_ν) είναι φραγμένη άνω απ' το b.

---

www.sokom.gr

Α|. α|. $\forall \varepsilon > 0$ άρα και για $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$ (όπου $\ell = \lim a_\nu$) υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\forall \rho \in \mathbb{N}$ με $\rho > \kappa$ νάναι $|a_\rho - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$ δηλαδή $\ell - \frac{|\ell|}{2} < a_\rho < \ell + \frac{|\ell|}{2}$ ⊛

• αν $\ell > 0$: ⊛ $\Leftrightarrow \frac{\ell}{2} < a_\rho < \frac{3\ell}{2}$ άρα $a_\rho > 0$

• αν $\ell < 0$: ⊛ $\Leftrightarrow \frac{3\ell}{2} < a_\rho < \frac{\ell}{2}$ άρα $a_\rho < 0$

$\Rightarrow$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ με $a_\rho \neq 0$ $\forall \rho > \kappa$ δηλαδή με $a_{\nu+\kappa} \neq 0$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

β|. αφού $\lim a_{\nu+\kappa} = \lim a_\nu = \ell \neq 0$ είναι: $\lim \frac{1}{a_{\nu+\kappa}} = \frac{1}{\ell}$ δηλαδή $\lim b_\nu = \frac{1}{\ell}$ συνεπώς αφού η b_ν είναι συγκλίνουσα θα είναι και φραγμένη.

Β|. α|. Θα δείξω επαγωγικά ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$: $a_\nu < a_{\nu+1}$.

i|. για ν=1 : $a_1 < a_2 \Leftrightarrow b^{1/b} < (b^{1/b})^{b^{1/b}} \Leftrightarrow \frac{1}{b}\ln b < b^{1/b}\frac{1}{b}\ln b \Leftrightarrow 1 < b^{1/b}$ ισχύει αφού $b > 1$

ii|. για $\nu = \kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}, \kappa > 1$): έστω ότι ισχύει $a_\kappa < a_{\kappa+1}$.

iii|. για $\nu = \kappa + 1$: Θα δείξω ότι $a_{\kappa+1} < a_{\kappa+2}$

πραγματικά ii|$\Rightarrow a_\kappa < a_{\kappa+1} \Rightarrow (b^{1/b})^{a_\kappa} < (b^{1/b})^{a_{\kappa+1}} \Rightarrow a_{\kappa+1} < a_{\kappa+2}$

άρα η (a_ν) είναι ↑.

β|. Θα δείξω επαγωγικά ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$: $a_\nu < b$.

i| για ν=1 ; $a_1 < b \Leftrightarrow b^{1/b} < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < 1 \Leftrightarrow b > 1$ ισχύει.

ii| για $\nu = \kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}, \kappa > 1$): έστω ότι ισχύει $a_\kappa < b$.

iii| για $\nu = \kappa + 1$: Θα δείξω ότι $a_{\kappa+1} < b$

πραγματικά ii|$\Rightarrow a_\kappa < b \Rightarrow (b^{1/b})^{a_\kappa} < (b^{1/b})^{b} \Rightarrow a_{\kappa+1} < b$

άρα η (a_ν) είναι φραγμένη άνω απ' τον b.

Ζήτημα 3ο

Α. Άν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x\,dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε:

α). Δείξτε ότι $\forall \nu > 2$ ισχύει: $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$

β). Υπολογίστε τό I_5.

Β. Δίνεται ή συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

α). Νά βρείτε τά διαστήματα μονοτονίας τής f.

β). Νά υπολογίσετε τό εμβαδό τοῦ χωρίου πού ορίζεται άπ' τήν C_f, τόν $x'x$ καί τίς ευθείες $x = 1$ καί $x = 4$.

Α. α). άρκεῖ νά δείξω ότι $\forall \nu > 2$: $I_\nu + I_{\nu-2} = \frac{1}{\nu-1}$, πραγματικά:

$$I_\nu + I_{\nu-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,(1+\varepsilon\varphi^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,(\varepsilon\varphi x)'\,dx =$$

$$= \left[\frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\nu-1}.$$

β). $I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = -\frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx = -\frac{1}{4} + \left[-\ln \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Β. α). $f'(x) = \ldots = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$ όπου $g(x) = 2x - 2 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γιά $x > 0$ είναι $4x\sqrt{x} > 0$ καί $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$ άρα $g \uparrow$ στό $(0, +\infty)$.

συνεπώς: $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0$

$x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1) = 0$

άρα: $f'(x) < 0$ $\forall x \in (0,1)$ δηλ. $f \downarrow$ στό $(0,1]$ (άφού f συνεχής στό 1).

$f'(x) > 0$ $\forall x \in (1,+\infty)$ δηλ. $f \uparrow$ στό $[1,+\infty)$ (άφού f συνεχής στό 1).

β). $\forall x \in [1,4]$ είναι: $x \geq 1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x) \geq f(1) = 1$ συνεπώς $f(x) > 0$ καί:

$$E = \int_1^4 |f(x)|\,dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx - \int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 - \int_1^4 (\sqrt{x})' \ln x\,dx$$

$$= \frac{14}{3} - \left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^4 + \int_1^4 \sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{14}{3} - 4\ln 2 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= \frac{20}{3} - 4\ln 2.$$

Ζήτημα 4ο

Α]. Δίνεται ή έλλειψη: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Νά βρείτε τήν εξίσωση τής υπερβολής ή όποια έχει τίς ίδιες εστίες μέ τήν παραπάνω έλλειψη και εφάπτεται στήν ευθεία $x-y+1=0$.

Β]. Βρείτε τίς εξισώσεις τών ευθειών πού εφάπτονται συγχρόνως στόν κύκλο $x^2+y^2=4$ και στήν παραβολή $y^2=3x$.

---

www.sonom.gr

Α]. ή έλλειψη είναι τής μορφής: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ άρα έχει $\gamma^2=a^2-b^2=25-16=9$

ή ζητούμενη υπερβολή θά είναι τής μορφής $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ μέ $A^2+B^2=\gamma^2$ (αφού έχει τίς ίδιες εστίες μέ τήν έλλειψη) άρα είναι: $A^2+B^2=9$ (1)

γιά νά εφάπτεται στήν $y=x+1$ θά πρέπει τό (Σ) $\begin{cases}\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1\\ y=x+1\end{cases}$ νά έχει μία λύση, συνεπώς πρέπει νάχει μία λύση ή εξίσωση: $\frac{x^2}{A^2}-\frac{(x+1)^2}{B^2}=1$

δηλ. ή εξίσωση: $(B^2-A^2)x^2-2A^2x-A^2-A^2B^2=0$

άρα πρέπει νάναι $\Delta=0 \Leftrightarrow \dots\ A^2-B^2=1$ (2)

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases}A^2=5\\ B^2=4\end{cases}$ άρα ή ζητούμενη υπερβολή είναι ή: $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

Β]. Άν $y=ax+b$ μία ζητούμενη ευθεία, τότε θά έχουν μία λύση τά συστήματα

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y=ax+b\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases}y^2=3x\\ y=ax+b\end{cases}$$

δηλαδή μία λύση οί εξισώσεις:

$$(a^2+1)x^2+2abx+b^2-4=0 \quad \text{και} \quad a^2x^2+(2ab-3)x+b^2=0$$

συνεπώς θά έχουν $\Delta=0$ δηλαδή:

$$\begin{cases}a^2b^2-(a^2+1)(b^2-4)=0\\ (2ab-3)^2-4a^2b^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases}4a^2-b^2=-4\\ 12ab=9\end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{4}\\ b=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}a=-\frac{\sqrt{2}}{4}\\ b=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

συνεπώς οί ζητούμενες ευθείες είναι οί:

$$y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

1992

Ζήτημα 1ο

Α]. Αν $u=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ και $A=\begin{bmatrix}συνθ & -ημθ\\ ημθ & συνθ\end{bmatrix}$, $θ\in(0,π)$, δείξτε ότι οι πίνακες u και Au είναι γρ. ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $Π_{2\times1}$.

Β]. **α].** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$.

β]. Να δείξετε ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο διέρχεται απ' την εικόνα μιας ρίζας της εξίσωσης $z^4+1=0$.

---

www.sonom.gr

Α]. για $λ_1,λ_2\in\mathbb{R}$ είναι: $λ_1u+λ_2A\cdot u=\mathbb{O}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow (Σ)\begin{cases}xλ_1+(xσυνθ-yημθ)λ_2=0\\ yλ_1+(xημθ+yσυνθ)λ_2=0\end{cases}$

αφού $D=\begin{vmatrix}x & xσυνθ-yημθ\\ y & xημθ+yσυνθ\end{vmatrix}=\ldots=(x^2+y^2)ημθ\neq0$ (γιατί $x\neq0, y\neq0$ και $θ\in(0,π)$)

το (Σ) έχει μοναδική λύση την $λ_1=λ_2=0$ άρα τα u και $A\cdot u$ είναι γρ.αν.

Β]. **α].** $z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0\Leftrightarrow z^2-\sqrt{2}z+i\sqrt{2}z-2i=0$

$$\Leftrightarrow z(z-\sqrt{2})+i\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$$

$$\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})=0$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{2} \;\text{ ή }\; z=-i\sqrt{2}.$$

β]. οι εικόνες των ριζών που βρήκαμε πριν είναι $A(\sqrt{2},0)$ και $B(0,-\sqrt{2})$ και ορίζουν την ευθεία (ΑΒ): $y=x-\sqrt{2}$

$z^4+1=0\Leftrightarrow z^4=-1\Leftrightarrow z^4=συνπ+iημπ$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z_0=συν\frac{π}{4}+iημ\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z_1=συν\frac{3π}{4}+iημ\frac{3π}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z_2=συν\frac{5π}{4}+iημ\frac{5π}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z_3=συν\frac{7π}{4}+iημ\frac{7π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

οι εικόνες λοιπόν των ριζών της $z^4+1=0$ είναι τα σημεία

$M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $M_1\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $M_2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ και $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

η (ΑΒ) διέρχεται απ' το M_3 (αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της).

Ζήτημα 2ο

Α. Δείξτε ότι το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται απ' τον τύπο: $E=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

Β. α). Δίνονται οι ημιευθείες $y=\lambda x$ και $y=-\lambda x$ με $\lambda>0$ και $x>0$ και ευθεία (ε) η οποία τις τέμνει στα σημεία Α και Β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου Μ του ΑΒ.

β). Δείξτε ότι το Μ γράφει τον ένα κλάδο υπερβολής όταν η (ε) κινείται έτσι ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερό εμβαδό k^2.

www.sonom.gr

Α. Θεωρία.

Β. α). $\begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ y_A+y_B=2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ \lambda x_A-\lambda x_B=2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=x_M+\frac{y_M}{\lambda} \\ x_B=x_M-\frac{y_M}{\lambda} \end{cases}$ συνεπώς: $\begin{matrix} y_A=\lambda x_M+y_M \\ y_B=-\lambda x_M+y_M \end{matrix}$

β). $E_{OAB}=k^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}\right|=k^2$

$$\Leftrightarrow |x_Ay_B-x_By_A|=2k^2$$

$$\Leftrightarrow |x_A(-\lambda x_B)-x_B(\lambda x_A)|=2k^2$$

$$\Leftrightarrow |-2\lambda x_Ax_B|=2k^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda x_Ax_B=k^2 \quad (\text{αφού } x_A,\ x_B>0).$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(x_M+\frac{y_M}{\lambda}\right)\left(x_M-\frac{y_M}{\lambda}\right)=k^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(x_M^2-\frac{y_M^2}{\lambda^2}\right)=k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M^2}{\frac{k^2}{\lambda}}-\frac{y_M^2}{k^2\lambda}=1$$

συνεπώς το Μ διαγράφει τον ένα κλάδο (αφού $x_M>0$) της υπερβολής με εξίσωση: $\frac{x^2}{\frac{k^2}{\lambda}}-\frac{y^2}{k^2\lambda}=1$.

Ζήτημα 3ο

Α|.α|. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, με τιμές στο $(0,+\infty)$. Δείξτε ότι η $g(x)=\ln f(x)$, $x\in\Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει: $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$, $x\in\Delta$.

β|. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β|.α|. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση $f(x)=a^x-x$, $x\in\mathbb{R}$, $0<a<1$.

β|. Να βρείτε τα $\lambda\in\mathbb{R}$ για τα οποία: $a^{\lambda^2-4}-a^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$, $0<a<1$.

www.sonom.gr

Α|.α|. $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}$

$g\cup$ στο $\Delta\Leftrightarrow\forall x\in\Delta: g''(x)\geq 0\Leftrightarrow\forall x\in\Delta: f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$.

β|. $A_g=\mathbb{R}$. $g'(x)=\dots=\dfrac{2x}{x^2+2}$. $g''(x)=\dots=\dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

$g''(x)\geq 0\Leftrightarrow 4-2x^2\geq 0\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$.

άρα το μέγιστο διάστημα στο οποίο η $g\cup$ είναι το $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Β|.α|. $f'(x)=a^x\ln a-1$.

αλλά $0<a<1\Rightarrow\ln a<0\Rightarrow a^x\ln a<0\Rightarrow a^x\ln a-1<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα η $f\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

$f''(x)=a^x\ln^2 a>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα η $f\cup$ στο $\mathbb{R}$.

β|. $a^{\lambda^2-4}-a^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$

$\Leftrightarrow a^{\lambda^2-4}-(\lambda^2-4)=a^{\lambda-2}-(\lambda-2)$

$\Leftrightarrow f(\lambda^2-4)=f(\lambda-2)$

$\Leftrightarrow \lambda^2-4=\lambda-2$ (αφού η f είναι "1-1" ως γν. φθίνουσα).

$\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+2-1)=0$

$\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-1$.

Ζήτημα 4ο

Α]. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Νά υπολογίσετε τό εμβαδό τοῦ χωρίου ποὺ ὁρίζεται ἀπ' τὰ σημεῖα(x,y) μὲ $-1\le x\le 1$ καὶ $0\le y\le f(x)$.

Β]. α1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μία συνάρτηση f ὁρισμένη στό $\mathbb{R}$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f'=f$ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι $f(x)=ce^{x}$, ὅπου c πραγματική σταθερά.

β1. Νά βρεθεῖ ἡ συνάρτηση g, ὁρισμένη στό $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις: $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ καὶ $g(0)=1992$.

www.sonom.gr

Α]. Ἀφοῦ ἡ f συνεχής στό $[-1,1]$ (ὡς γινόμενο συνεχῶν) καὶ $f(x)>0$ $\forall x\in[-1,1]$, εἶναι:

$$E=\int_{-1}^{1}(x+4)e^{-x}dx=\int_{-1}^{1}(-e^{-x})'(x+4)\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}(x+4)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}e^{-x}dx$$

$$=\left[-e^{-x}(x+4)\right]_{-1}^{1}+\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$$\dots=4e-\frac{6}{e}.$$

Β]. α1. (Θεωρία): ἐφαρμογή στό σχολικό βιβλίο.

β1. $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow g'(x)\sigma\upsilon\nu x-g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'=g(x)\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \dfrac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x-g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$ (ἀφοῦ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$).

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\dfrac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

ἄρα (σύμφωνα μέ τό α1 ἐρώτημα) εἶναι $\dfrac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^{x}$ $(c\in\mathbb{R})$.

συνεπῶς $g(x)=ce^{x}\sigma\upsilon\nu x$

κι ἀφοῦ $g(0)=1992\Leftrightarrow c=1992$

εἶναι $g(x)=1992e^{x}\sigma\upsilon\nu x$.

1993

Ζήτημα 1ο

Α. Τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{x}$ τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση $(\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$.

α. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι: $(\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1)(\vec{\alpha}\vec{x}) = \vec{\gamma}\vec{\alpha}$

β. Ἄν $\vec{\beta}\vec{\alpha} \neq 1$ νὰ ἐκφράσετε τὸ $\vec{x}$ ὡς συνάρτηση τῶν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ καὶ $\vec{\gamma}$.

Β. Γιὰ τὸν ἀντιστρέψιμο πίνακα A τύπου $\nu\times\nu$ ὁρίζουμε τὰ πολυώνυμα:

$f(x) = |A - xI|$, $g(x) = |A^{-1} - xI|$ ὅπου I ὁ μοναδιαῖος $\nu\times\nu$ πίνακας καὶ $x \in \mathbb{R}$.

Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἂν $f(x_0) = 0$ τότε: α. $x_0 \neq 0$ καὶ β. $g(\frac{1}{x_0}) = 0$.

www.sonom.gr

Α. α. $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta} - \vec{x} \Rightarrow \vec{\gamma}\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta}\vec{\alpha} - \vec{x}\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma}\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta}\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\vec{x} \Rightarrow \vec{\gamma}\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\vec{x}(\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1)$

$\Rightarrow (\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1)(\vec{\alpha}\vec{x}) = \vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

β. $(\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1)(\vec{\alpha}\vec{x}) = \vec{\gamma}\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{x} = \dfrac{\vec{\gamma}\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1}$ συνεπῶς:

$$(\vec{\alpha}\vec{x})\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x} \Rightarrow \frac{\vec{\gamma}\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1}\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x} \Longrightarrow \vec{x} = \frac{\vec{\gamma}\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\vec{\alpha} - 1}\cdot\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

Β. α. ἂν $x_0 = 0$ τότε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow |A - x_0 I| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$

ΑΤΟΠΟ ἀφοῦ ὁ A εἶναι ἀντιστρέψιμος συνεπῶς εἶναι $x_0 \neq 0$.

β. $g(\frac{1}{x_0}) = |A^{-1} - \frac{1}{x_0}I| = |A^{-1} - \frac{1}{x_0}AA^{-1}| = |(I - \frac{1}{x_0}A)A^{-1}| = |(-\frac{1}{x_0})(A - x_0 I)||A^{-1}| \overset{*}{=}$

$= (-\frac{1}{x_0})^{\nu}|A - x_0 I||A^{-1}| = (-\frac{1}{x_0})^{\nu} f(x_0)|A^{-1}| = 0$.

* εἶναι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ καὶ $A \in \Pi_{\nu\times\nu}$: $|\lambda A| = |\lambda I A| = |\lambda I||A| = \lambda^{\nu}|A|$.

Ζήτημα 2ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z\in\mathbb{C}$ και $Re(z)\neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(-\frac{1}{\bar{z}})=f(z)$.

β. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί $z=ax+\beta yi$ με $a,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $a\beta x\neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $Re(f(z))=0$.

Β. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $a>\beta>0$ και το σημείο $K(0,2\beta)$. Μια μεταβλητή ευθεία με συντ. διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο K και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της στα σημεία M και N.

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MN ως συνάρτηση του λ.

β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος αυτός να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

www.sonom.gr

Α. α. $f(-\frac{1}{\bar{z}})=\frac{(-\frac{1}{\bar{z}}-1)(\overline{-\frac{1}{\bar{z}}}+1)}{-\frac{1}{\bar{z}}+(\overline{-\frac{1}{\bar{z}}})}=\frac{(-\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}})(-\frac{1}{z}+1)}{-\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}=\frac{-\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}}\,\frac{z-1}{z}}{-\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}}=\frac{\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z\bar{z}}}{\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}=f(z).$

β. $f(z)=\frac{z\bar{z}+z-\bar{z}-1}{z+\bar{z}}=\frac{|z|^2+2Im(z)-1}{2Re(z)}=\frac{a^2x^2+\beta^2y^2+2\beta yi-1}{2ax}=\frac{a^2x^2+\beta^2y^2-1}{2ax}+\frac{2\beta y}{2ax}i$

$Re(f(z))=0 \Leftrightarrow a^2x^2+\beta^2y^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\beta^2}}=1$ (*)

συνεπώς τα σημεία M για τα οποία είναι $Re(f(z))=0$ ανήκουν στην έλλειψη με εξίσωση (*) (η οποία βέβαια για $\beta=a$ είναι ο κύκλος $x^2+y^2=(\frac{1}{a})^2$) από την οποία εξαιρούνται τα σημεία $(0,-\frac{1}{\beta}),(0,\frac{1}{\beta})$ (αφού $x\neq 0$).

Β. α. η ευθεία με συντ. διεύθυνσης λ που περνά από το $K(0,2\beta)$ είναι η $y=\lambda x+2\beta$ και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της δηλαδή τις $x=a$ και $x=-a$ στα $M(a,\lambda a+2\beta)$ και $N(-a,-\lambda a+2\beta)$.

ο κύκλος με διάμετρο MN έχει κέντρο το $\left(\frac{x_M+x_N}{2},\frac{y_M+y_N}{2}\right)=(0,2\beta)$ δηλ. το K και ακτίνα $(MK)=\sqrt{(a-0)^2+(\lambda a+2\beta-2\beta)^2}=\sqrt{a^2+\lambda^2a^2}$ συνεπώς έχει εξίσωση:

$$(c):\ x^2+(y-2\beta)^2=a^2+\lambda^2a^2$$

β. για να διέρχεται ο (c) από τις εστίες $(-\gamma,0)$ και $(\gamma,0)$ (όπου: $\gamma^2=a^2-\beta^2$) της έλλειψης πρέπει να είναι: $\gamma^2+(0-2\beta)^2=a^2+\lambda^2a^2 \Leftrightarrow \gamma^2+4\beta^2=a^2+\lambda^2a^2$

$$\Leftrightarrow a^2-\beta^2+4\beta^2=a^2+\lambda^2a^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2=3\frac{\beta^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{\sqrt{3}\beta}{a} \text{ ή } \lambda=\frac{\sqrt{3}\beta}{a}.$$

Ζήτημα 3ο

Α]. Να αποδείξετε ότι, άν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

α]. Υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$.

β]. Υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$.

Β]. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, $x>0$.

α]. Να εξετάσετε τη μονοτονία της f.

β]. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

Α]. Θεωρία (Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού). www.sonom.gr

Β]. α]. $f'(x) = -\dfrac{\left(\sqrt{1+x^4}\right)'}{1+x^4} = -\dfrac{2x^3}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} < 0 \quad \forall x>0$ άρα $f \downarrow$ στό $(0,+\infty)$.

β] για $x>0$ ή $f\downarrow$ στό $[x,x+1]$ συνεπώς έχει στό $[x,x+1]$:

μέγιστο: $M = f(x)$
ελάχιστο: $m = f(x+1)$

συνεπώς σύμφωνα μέ τό Α] είναι:

$f(x+1)\,(x+1-x) \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x)\,(x+1-x)$ δηλαδή: $f(x+1) \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x)$

αλλά : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+(x+1)^4}} + 4\right) = 0+4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4\right) = 0+4 = 4 \end{cases}$

άρα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 4$.

άλλη λύση:

σύμφωνα μέ τό Α] υπάρχει $\xi\in[x,x+1]$ μέ $\int_x^{x+1} f(t)dt = f(\xi)(x+1-x) = f(\xi)$

άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} f(\xi) \overset{\text{αφού } \xi\geq x \text{ και } x\to+\infty}{\underset{\text{είναι και } \xi\to+\infty}{=}} \lim\limits_{\xi\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^4}} + 4 = 0+4 = 4$.

Ζήτημα 4ο

Α|. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους $10m$ του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2\,m/sec$ και η θέση του πάνω στον Ox δίνεται απ' τη συνάρτηση $g(t) = vt$, $t \in [0,5]$ όπου t ο χρόνος σε sec.

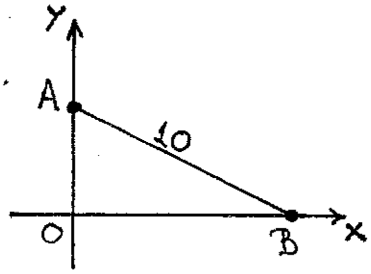
α|. Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β|. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία είναι $(OA) = 6m$;

Β|. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_a^x e^{-t} f(t)\,dt = e^{-x} - e^{-a} - e^{-x} f(x) \quad \text{με } x, a \in \mathbb{R}.$$

Α|.α|.



$$E(t) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\sqrt{(AB)^2 - (OB)^2}\,(OB)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{100 - v^2t^2}\;vt$$
$$= t\sqrt{100 - 4t^2}$$
$$= 2t\sqrt{25 - t^2}$$

β|. $(OA) = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{25 - t^2} = 6 \Leftrightarrow 25 - t^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4\,sec$ (αφού $t \in [0,5]$).

$$\left.\frac{dE(t)}{dt}\right|_{t=4sec} = 2\sqrt{25 - t^2} + 2t\left.\frac{-2t}{2\sqrt{25 - t^2}}\right|_{t=4sec} = -\frac{14}{3}\;m^2/sec.$$

Β|. αφού η $e^{-t}f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο συνεχών) η $\int_a^x e^{-t}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η $f(x) = \dfrac{-\int_a^x e^{-t}f(t)dt + e^{-x} - e^{-a}}{e^{-x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων)

$$\frac{d\left(\int_a^x e^{-t}f(t)dt\right)}{dx} = \frac{d\left(e^{-x} - e^{-a} - e^{-x}f(x)\right)}{dx} \Rightarrow e^{-x}f(x) = -e^{-x} + e^{-x}f(x) - e^{-x}f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

αλλά: $\int_a^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x} - e^{-a} - e^{-x}f(x) \xRightarrow{\text{για } x=a} 0 = e^{-a} - e^{-a} - e^{-a}f(a) \Rightarrow f(a) = 0$

και: $f(a) = 0 \Leftrightarrow -a + c = 0 \Leftrightarrow c = a$

άρα: $f(x) = -x + a,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

1994

Ζήτημα 1ο

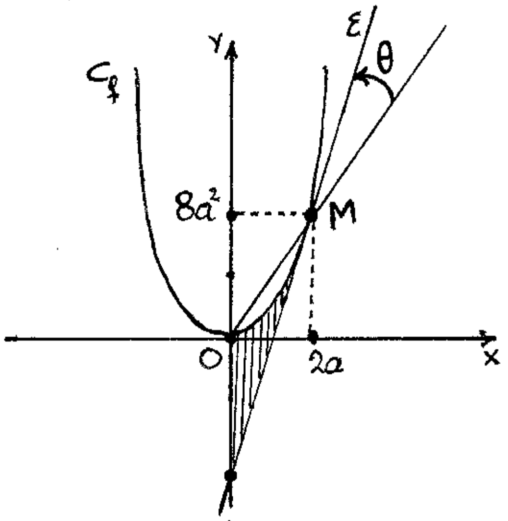
Α]. Δίνεται ή συνάρτηση $f(x)=2x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α]. Άν ε είναι ή έφαπτομένη της C_f στό $M(2a, 8a^2)$, $a>0$ νά βρείτε τό έμβαδό τοῦ χωρίου πού περικλείεται άπ' τήν C_f, τήν ε και τόν άξονα $y'y$.

β]. Έστω θ ή γωνία πού σχηματίζει ή ε μέ τήν ΜΟ (Ο ή άρχή τῶν άξόνων).
Νά έκφράσετε τήν εφθ ώς συνάρτηση τοῦ α και νά βρεῖτε τήν μέγιστη τιμή της εφθ όταν τό α μεταβάλλεται ($a>0$).

Β]. Άν ή συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στό $[1,e]$ μέ $0<f(x)<1$ και $f'(x)\geq 0$ νά άποδείξετε ότι ύπάρχει μόνο ένας άριθμός $x_0\in(1,e)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0)+x_0\ln x_0=x_0$.

Α].



α]. $f'(x)=4x$. (ε): $y-8a^2=8a(x-2a)\Leftrightarrow y=8ax-8a^2$

οί τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων της C_f και της ε είναι οί ρίζες της έξίσωσης: $2x^2-(8ax-8a^2)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-8ax+8a^2=0 \Leftrightarrow 2(x^2-4ax+4a^2)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-2a)^2=0 \Leftrightarrow x=2a$ άρα τό $M(2a, 8a^2)$ είναι τό μόνο κοινό σημεῖο τῶν C_f, ε συνεπῶς:

$$E=\int_0^{2a}|2x^2-8ax+8a^2|\,dx=\ldots=\frac{16a^3}{3}.$$

β]. $$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\lambda_\varepsilon-\lambda_{MO}}{1+\lambda_\varepsilon\lambda_{MO}}=\frac{8a-\frac{8a^2}{2a}}{1+8a\,\frac{8a^2}{2a}}=\frac{4a}{1+32a^2}.$$

άν $g(a)=\dfrac{4a}{1+32a^2}$, $a\in(0,+\infty)$ τότε $g'(a)=\ldots=\dfrac{4(1-32a^2)}{(1+32a^2)^2}$.

a	0		$1/\sqrt{32}$		$+\infty$
g'		+	0	−	
g		↗	M	↘	

συνεπώς ή μέγιστη τιμή της g (δηλαδή της εφθ) είναι $g(1/\sqrt{32})=\ldots=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Β]. Άρκεῖ νά δείξω ότι ή έξίσωση $f(x)+x\ln x=x$ δηλαδή ή $f(x)+x\ln x-x=0$ έχει άκριβῶς μια ρίζα στό $(1,e)$. Έστω $\varphi(x)=f(x)+x\ln x-x$ τότε:

- ή φ είναι συνεχής στό $[1,e]$ ώς άποτέλεσμα πράξεων συνεχῶν συναρτήσεων.
  (ή f είναι συνεχής στό $[1,e]$ άφοῦ είναι παραγωγίσιμη στό $[1,e]$).
- $\varphi(1)=f(1)-1<0$. $\varphi(e)=f(e)>0$ δηλαδή $\varphi(1)\varphi(e)<0$

άρα σύμφωνα μέ τό Θ. Bolzano ή φ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στό $(1,e)$.

$\varphi'(x)=f'(x)+\ln x>0$ $\forall x\in(1,e)$ (άφοῦ $f'(x)\geq 0$ και $\ln x>0$ γιατί $x>1$)

ή φ ↑ στό $(1,e)$ συνεπῶς έχει τό πολύ μια ρίζα στό $(1,e)$

άρα ή φ έχει άκριβῶς μια ρίζα x_0 στό $(1,e)$.

Ζήτημα 2ο

Α|. Στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν, νά βρεῖτε τίς κοινές ρίζες τῶν ἐξισώσεων:
(1) $(z^2+1)^2+z^3+z=0$ καί (2) $z^{16}+2z^{14}+1=0$.

Β|. Θεωροῦμε τούς μιγαδικούς z, w καί w_1 τέτοιους ὥστε:
$w=z-zi$ καί $w_1=\frac{1}{a}+ai$, $a\in\mathbb{R}^*$. Νά δείξετε ὅτι ἄν τό a μεταβάλλεται στό $\mathbb{R}^*$ καί ἰσχύει $w=\overline{w_1}$, τότε ἡ εἰκόνα Ρ τοῦ z στό μιγαδικό ἐπίπεδο, κινεῖται σέ μία ὑπερβολή.

www.sokom.gr

Α|. $(1)\Leftrightarrow (z^2+1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \\ \text{ἤ} \\ z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^3-1}{z-1}=0 \\ z\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow z^3=1 \text{ καί } z\neq 1 \end{cases}$ (ἀφοῦ τό 1 προφανῶς δέν εἶναι ρίζα τῆς (1)).

οἱ ρίζες λοιπόν τῆς (1) εἶναι οἱ ρίζες τῆς $z^2=-1$ δηλαδή οἱ $-i$ καί i καί οἱ ρίζες τῆς $z^3=1$ πού εἶναι διάφορες τοῦ 1.

ἄν $z^2=-1$ τότε: $(2)\Leftrightarrow (z^2)^8+2(z^2)^7+1=0 \Leftrightarrow (-1)^8+2(-1)^7+1=0 \Leftrightarrow 1-2+1=0$
πού ἰσχύει συνεπῶς οἱ ρίζες τῆς $z^2=-1$ εἶναι καί ρίζες τῆς (2).

ἄν $z^3=1$ (μέ $z\neq 1$) τότε: $(2)\Leftrightarrow (z^3)^5 z+2(z^3)^4 z^2+1=0 \Leftrightarrow z+2z^2+1=0$
$\Leftrightarrow z^2+z+1+z^2=0 \Leftrightarrow z^2=0$ πού δέν ἰσχύει (ἀφοῦ $z^2=0 \Rightarrow z^3=0$ ἄτοπο)
συνεπῶς οἱ ρίζες τῆς $z^3=1$ (μέ $z\neq 1$) δέν εἶναι ρίζες τῆς (2).

Ἄρα κοινές ρίζες τῶν (1) καί (2) εἶναι οἱ $-i$ καί i.

Β|. Ἔστω $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ τότε:

$$w=\overline{w_1} \Leftrightarrow z-zi=\overline{\frac{1}{a}+ai}$$
$$\Leftrightarrow x+yi-(x+yi)i=\frac{1}{a}-ai$$
$$\Leftrightarrow x+y-(x-y)i=\frac{1}{a}-ai$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{a} \\ x-y=a \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{1}{x-y} \Leftrightarrow x^2-y^2=1.$$

ἄρα ὅταν $w=\overline{w_1}$ καί $a\in\mathbb{R}^*$ ἡ εἰκόνα $P(x,y)$ τοῦ z κινεῖται στήν ὑπερβολή: $x^2-y^2=1$.

Ζήτημα 3ο

Α|. Έστω $\rho \in \mathbb{R}$, $A(x)$ και $B(x)$ πολυώνυμα μέ πραγματικούς συντελεστές, ώστε $B(\rho) \neq 0$ και τό $A(x)$ έχει βαθμό ≥ 2. Νά αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$, τέτοιο ώστε $A(x)B(x) = (x-\rho)^2 f(x)$ άν και μόνο άν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

Β|. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος τοῦ 1. Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν κ, λ γιά τίς όποῖες τό πολυώνυμο: $Q(x) = x^\nu(\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα τό $(x-2)^2$.

Α|. i). $A(x)B(x) = (x-\rho)^2 f(x) \xRightarrow{\text{γιά } x=\rho} A(\rho)B(\rho) = 0 \Rightarrow A(\rho) = 0$

$[A(x)B(x)]' = [(x-\rho)^2 f(x)]' \Rightarrow A'(x)B(x) + A(x)B'(x) = 2(x-\rho)f(x) + (x-\rho)^2 f'(x)$

$\xRightarrow{\text{γιά } x=\rho} A'(\rho)B(\rho) = 0 \Rightarrow A'(\rho) = 0$

ii). Άν $A(\rho) = 0$ και $A'(\rho) = 0$ τότε:

$A(x) = (x-\rho)\Pi_1(x)$ (1)

$A'(x) = \Pi_1(x) + (x-\rho)\Pi_1'(x) \xRightarrow{\text{γιά } x=\rho} \Pi_1(\rho) = 0$ άρα $\Pi_1(x) = (x-\rho)\Pi_2(x)$

συνεπῶς (1) $\Rightarrow A(x) = (x-\rho)^2\Pi_2(x) \Rightarrow A(x)B(x) = (x-\rho)^2\Pi_2(x)B(x)$

(κι άν $f(x) = \Pi_2(x)B(x)$) $= (x-\rho)^2 f(x)$.

Β|. Είναι $Q(x) = A(x)B(x)$ όπου $A(x) = \nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8$ και $B(x) = x^\nu$ και $B(2) = 2^\nu \neq 0$ συνεπῶς σύμφωνα μέ τό Α|. Τό $(x-2)^2$ είναι παράγοντας τοῦ $Q(x)$ άν και μόνο άν: (είναι $A'(x) = 3\nu x^2 + 2\kappa x + \lambda$).

$$\begin{cases} A(2) = 0 \\ A'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\nu + 4\kappa + 2\lambda + 8 = 0 \\ 12\nu + 4\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4\nu + 2 \\ \lambda = 4\nu - 8 \end{cases}.$$

άλλη λύση: γιά νάναι $Q(x) = (x-2)^2 F(x)$ πρέπει και αρκεῖ (αφοῦ τό $x-2$ δέν διαιρεῖ τό x^ν γιατί $2^\nu \neq 0$) τό $(x-2)$ νά διαιρεῖ τό $\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8$ αλλά και τό πηλίκο αυτῆς τῆς διαίρεσ.

δουλεύοντας λοιπόν μέ τό σχῆμα τοῦ Horner:

ν	κ	λ	8	
	2ν	$4\nu+2\kappa$	$8\nu+4\kappa+2\lambda$	2
ν	$2\nu+\kappa$	$4\nu+2\kappa+\lambda$	$\boxed{8\nu+4\kappa+2\lambda+8}$	2
	2ν	$8\nu+2\kappa$		
ν	$4\nu+\kappa$	$\boxed{12\nu+4\kappa+\lambda}$		

πρέπει και αρκεῖ νάναι:

$$\begin{cases} 8\nu + 4\kappa + 2\lambda + 8 = 0 \\ 12\nu + 4\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4\nu + 2 \\ \lambda = 4\nu - 8 \end{cases}$$

Ζήτημα 4ο

Α. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μὲ ἑστία τὸ σημεῖο $E(\frac{p}{2}, 0)$ καὶ διευθετοῦσα τὴν εὐθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$ εἶναι ἡ: $y^2 = 2px$.

Β. Ἔστω ν θετικὸς ἀκέραιος καὶ $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2\nu\}$ ἕνας δειγματικὸς χῶρος. Δίνονται οἱ πιθανότητες $P(k) = \frac{1}{2^k}$ γιὰ $k = 1, 2, 3, \ldots, 2\nu$, νὰ ὑπολογίσετε:

α. τὴν πιθανότητα $P(0)$.

β. τὴν πιθανότητα $P(A)$ τοῦ ἐνδεχομένου $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2\nu\}$.

Α. Θεωρία.

Β. α. $P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(2\nu)$

$$\Rightarrow \quad 1 = P(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2\nu}}$$

$$\Rightarrow \quad P(0) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2\nu}}\right)$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

(ἄθροισμα 2ν ὅρων γεωμ. προόδου μὲ $a_1 = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$).

$$\ldots = \frac{1}{2^{2\nu}}.$$

β. $P(A) = P(2) + P(4) + \ldots + P(2\nu)$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2\nu}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^2}\left[\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\nu} - 1\right]}{\frac{1}{2^2} - 1}$$

(ἄθροισμα ν ὅρων γεωμ. προόδου μὲ $a_1 = \frac{1}{2^2}, \lambda = \frac{1}{2^2}$).

$$\ldots = \frac{2^{2\nu} - 1}{3 \cdot 2^{2\nu}}.$$

1995

Ζήτημα 1º

Α]. Έστω A, B $\nu\times\nu$ πίνακες τέτοιοι ώστε $A = B^2 + I$ και $B^4 = 0$.

α). Νά αποδείξετε ότι:

i). $\forall k \in \mathbb{N}^*: A^k = I + kB^2$ ii). ό πίνακας $I + A^6 - A^8$ είναι αντιστρέψιμος.

β). Άν ό ν είναι περιττός, νά αποδείξετε ότι: $|2A - 3I| \leq 0$

Β]. α). Νά αποδείξετε ότι γιά οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ άν και μόνο άν $Re(z_1\bar{z}_2) = 0$

β). Έστω μία συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στό $[a, b]$ και οί μιγαδικοί $z = a^2 + i f(a)$, $w = f(b) + i b^2$ μέ $ab \neq 0$. Άν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ νά αποδείξετε ότι ή $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στό $[a, b]$.

Α]. α). i). 1. γιά $k=1$: $A^1 = I + B^2$ (ισχύει) www.sonom.gr

2. γιά $k = p$ ($p \in \mathbb{N}, p > 1$) έστω ότι ισχύει: $A^p = I + pB^2$

3. γιά $k = p+1$ θά δείξω ότι ισχύει: $A^{p+1} = I + (p+1)B^2$, πραγματικά:

$A^{p+1} = A^p A \overset{2.}{=} (I + pB^2)(I + B^2) = I + B^2 + pB^2 + pB^4 = I + (p+1)B^2$.

ii). Έστω $X = I + A^6 - A^8 \overset{i).}{=} I + I + 6B^2 - I - 8B^2 = I - 2B^2$, τότε

$2B^2 = I - X \Rightarrow 4B^4 = I - 2X + X^2 \Rightarrow -X^2 + 2X = I \Rightarrow X(-X + 2I) = I$

άρα $X^{-1} = -X + 2I = -I + 2B^2 + 2I = 2B^2 + I = A^2$.

β). $|2A - 3I| = |2B^2 + 2I - 3I| = |2B^2 - I| = |-X| = (-1)^\nu |X| = -|X| < 0$ γιατί:

$XX^{-1} = I \Rightarrow |X||X^{-1}| = |I| \Rightarrow |X||A^2| = 1 \Rightarrow |X||A|^2 = 1 \Rightarrow |X| = \frac{1}{|A|^2} > 0$

* ή Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία άφησε ασχολίαστο τό ΛΑΘΟΣ: $|2A - 3I| \leq 0$ τό οποίο ήταν σοβαρό γιατί επηρέαζε τήν εξεταστική διαδικασία.

Β]. α). $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 0 \Leftrightarrow 2Re(z_1\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow Re(z_1\bar{z}_2) = 0$.

β). $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2 \overset{\alpha)}{\Longleftrightarrow} Re(w\bar{z}) = 0$ ① αλλά:

$w\bar{z} = (a^2 + i f(a))(f(b) - i b^2) = a^2 f(b) + b^2 f(a) + i(f(a)f(b) - a^2 b^2)$ οπότε

① $\Leftrightarrow a^2 f(b) + b^2 f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = -\frac{a^2}{b^2} f(b)$ άρα: $f(a)f(b) < 0$ ή $f(a) = f(b) = 0$

• άν $f(a)f(b) < 0$ αφού ή f είναι συνεχής στό $[a, b]$ σύμφωνα μέ τό Θ. Bolzano έχει ρίζα στό (a, b).

• άν $f(a) = f(b) = 0$ ή f έχει ρίζες τό a και τό b

ΑΡΑ σέ κάθε περίπτωση ή f έχει ρίζα στό $[a, b]$.

Ζήτημα 2ο

Α|. Δίνονται οἱ ἐλλείψεις $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ καί $C_2: a^2x^2+\beta^2y^2=1$ μέ $0<a<\beta$.
Ἡ ἡμιευθεία $y=(\epsilon\varphi\theta)x$, $x>0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ τέμνει τή C_1 στό $\Gamma_1(x_1,y_1)$ καί τή C_2 στό $\Gamma_2(x_2,y_2)$

α|. Ἄν λ_1 ὁ συντ. διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς C_1 στό Γ_1 καί λ_2 ὁ συντ. διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς C_2 στό Γ_2 νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lambda_1\lambda_2=(\epsilon\varphi\theta)^{-2}$.

β|. Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή μονοτονία ἡ συνάρτηση $f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ μέ $f(\theta)=\lambda_1\lambda_2$.

Β|. Δίνεται θετικός ἀκέραιος ν, τέτοιος ὥστε $(1+i)^\nu=16$. Ἔστω $\Omega=\{1,2,\dots,\nu\}$ δειγματικός χῶρος, πού ἀποτελεῖται ἀπό ἰσοπίθανα ἁπλά ἐνδεχόμενα.
Ἐπιλέγουμε τυχαίως ἕνα ἁπλό ἐνδεχόμενο $\lambda\in\Omega$. Ἄν $f(x)=2x^2-4x+\lambda$, $x\in\mathbb{R}$ νά βρεῖτε τήν πιθανότητα ἡ ἐξίσωση $f(x)=0$ νά μήν ἔχει πραγματικές ρίζες.

Α|α|. $\lambda_1=-\frac{\beta^2x_1}{a^2y_1}$ $(y_1=(\epsilon\varphi\theta)x_1\neq0)$ $\lambda_2=-\frac{a^2x_2}{\beta^2y_2}$ $(y_2=(\epsilon\varphi\theta)x_2\neq0)$ www.sokom.gr

συνεπῶς $\lambda_1\lambda_2=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}=\frac{x_1x_2}{(\epsilon\varphi\theta)x_1(\epsilon\varphi\theta)x_2}=(\epsilon\varphi\theta)^{-2}$.

β|. $\forall\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$: $f'(\theta)=-\frac{2}{\epsilon\varphi^3\theta}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}<0$ ἄρα $f\downarrow$ στό $(0,\frac{\pi}{2})$.

Β|. $(1+i)^\nu=16 \Rightarrow |(1+i)^\nu|=|16| \Rightarrow |1+i|^\nu=16 \Rightarrow (\sqrt{2})^\nu=16 \Rightarrow 2^{\frac{\nu}{2}}=2^4 \Rightarrow \nu=8$,

ἄρα $\Omega=\{1,2,\dots,8\}$,

ἡ $f(x)=0$ δέν ἔχει πραγματικές ρίζες ἄν καί μόνο ἄν εἶναι

$\Delta<0$ δηλ. $16-8\lambda<0$ δηλ. $\lambda>2$.

Συνεπῶς, ἄν A εἶναι τό ἐνδεχόμενο νά μήν ἔχει ἡ $f(x)=0$ ρίζες στό $\mathbb{R}$

εἶναι: $A=\{3,4,\dots,8\}$

καί $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Ζήτημα 3ο

Α]. Δίνονται οί πραγματικοί κ,λ μέ $\kappa<\lambda$ και ή $f(x)=(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3$ μέ $x\in\mathbb{R}$.
Νά αποδείξετε ότι:

α]. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$ γιά κάθε $x\neq\kappa$ και $x\neq\lambda$.

β]. ή συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω στό (κ,λ).

Β].α]. Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε συνάρτηση f συνεχή στό $[a,\beta]$ ισχύει: άν $f'(x)>0$ γιά κάθε $x\in(a,\beta)$ τότε ή f είναι γνησίως αύξουσα στό $[a,\beta]$.

β]. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Νά αποδείξετε ότι ή συνάρτηση $F(x)=\int_a^\beta f(x-t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$ μέ $a,\beta\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι άν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ μέ $F'(x_0)=0$ τότε $F(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Α]α]. $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3+3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2$ συνεπώς www.sonom.gr

$\forall x\in\mathbb{R}/\{\kappa,\lambda\}$: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3}+\dfrac{3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$.

β]. $\forall x\in(\kappa,\lambda)$: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\overset{a]}{=}\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$. $g''(x)=-\dfrac{5}{(x-\kappa)^2}-\dfrac{3}{(x-\lambda)^2}<0$
άρα ή g στρέφει τά κοίλα κάτω στό (κ,λ).

Β].α]. Θεωρία (βλ. σχολικό βιβλίο).

β]. Θέτω $u=x-t=\begin{cases}\xrightarrow{\text{γιά } t=\beta} x-\beta\\ \xrightarrow{\text{γιά } t=a} x-a\end{cases}$ όπότε $t=x-u$, $dt=-du$ και $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=\int_{x-a}^{x-\beta}-f(u)\,du=\int_{x-\beta}^{x-a}f(u)\,du=\int_{x-\beta}^{0}f(u)\,du+\int_0^{x-a}f(u)\,du=\int_0^{x-a}f(u)\,du-\int_0^{x-\beta}f(u)\,du$$

άν $\varphi(x)=\int_0^x f(u)\,du$ οί $\varphi(x-a)$ και $\varphi(x-\beta)$ είναι παραγωγίσιμες στό $\mathbb{R}$ ώς συνθέσεις παραγωγίσιμων στό $\mathbb{R}$ συναρτήσεων άρα και ή $F(x)=\varphi(x-a)-\varphi(x-\beta)$ είναι παραγωγίσιμη στό $\mathbb{R}$ ώς διαφορά παραγωγίσιμων στό $\mathbb{R}$ συναρτήσεων και $\forall x\in\mathbb{R}$: $F'(x)=\varphi'(x-a)-\varphi'(x-\beta)=f(x-a)-f(x-\beta)$, όπότε:

$F'(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0-a)=f(x_0-\beta)$

$\Leftrightarrow x_0-a=x_0-\beta$ (γιατί αφού $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)>0$ ή f είναι $\uparrow$ άρα "1-1")

$\Leftrightarrow a=\beta$

συνεπώς $\forall x\in\mathbb{R}$: $F(x)=\int_a^a f(x-t)\,dt=0$.

Ζήτημα 4ο

Α|. Θεωρούμε τούς πραγματικούς a, b μέ $0<a<b$, τή συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ γιά τήν όποία $\int_a^b f(t)dt=0$ καί τή συνάρτηση $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt,\ x\in(0,+\infty)$

Νά άποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε νά ισχύουν:

α|. ή έφαπτομένη τής γραφικής παράστασης τής g στό $(x_0, g(x_0))$ νάναι παράλληλη στόν $x'x$.

β|. $g(x_0)=2+f(x_0)$.

Β|. Νά βρείτε τή συνάρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ μέ συνεχή δεύτερη παράγωγο γιά τήν όποία ισχύουν: $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ καί $1+\int_0^x f''(t)\,\text{συν}t\,dt=\text{συν}^2x+\int_0^x f'(t)\,\text{ημ}t\,dt$.

---

www.sonom.gr

Α|.α|. άρκεί νά δείξω ότι υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τέτοιος ώστε $g'(x_0)=0$

- ή g είναι παραγωγίσιμη (άρα καί συνεχής) στό $[a,b]$

μέ $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{f(x)}{x}$

- $\left.\begin{array}{l} g(a)=2+\frac{1}{a}\int_a^a f(t)dt=2 \\ g(b)=2+\frac{1}{b}\int_a^b f(t)dt=2 \end{array}\right\}\Rightarrow g(a)=g(b)$

άρα σύμφωνα μέ τό Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τέτοιος ώστε $g'(x_0)=0$

β|. άπ' τό α| έχουμε:

υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $g'(x_0)=0$ δηλ. $-\frac{1}{x_0^2}\int_a^{x_0} f(t)dt+\frac{f(x_0)}{x_0}=0$

δηλ. $f(x_0)=\frac{1}{x_0}\int_a^{x_0} f(t)dt$

συνεπώς $g(x_0)=2+\frac{1}{x_0}\int_a^{x_0} f(t)dt=2+f(x_0)$.

Β|. $1+\int_0^x f''(t)\,\text{συν}t\,dt=\text{συν}^2x+\int_0^x f'(t)\,\text{ημ}t\,dt$

$\Leftrightarrow 1-\text{συν}^2x=\int_0^x\left(f'(t)\text{ημ}t-f''(t)\text{συν}t\right)dt$

$\Leftrightarrow 1-\text{συν}^2x=\left[-f'(t)\text{συν}t\right]_0^x$

$\Leftrightarrow 1-\text{συν}^2x=-f'(x)\text{συν}x+f'(0)\text{συν}0$

$\Leftrightarrow f'(x)\text{συν}x=\text{συν}^2x$

$\Leftrightarrow f'(x)=\text{συν}x \quad (\text{συν}x\neq 0\ \forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$

άρα $f(x)=\text{ημ}x+c \quad (c\in\mathbb{R})$

$f(0)=1995 \Leftrightarrow \text{ημ}0+c=1995 \Leftrightarrow c=1995$

συνεπώς $f(x)=\text{ημ}x+1995$.

1996

Ζήτημα 1ο

Α. Δίνονται οι $\nu\times\nu$ πίνακες A, B, Γ για τους οποίους ισχύουν:

$A+B+1996AB=O$ (1) $B+\Gamma+1996B\Gamma=O$ (2) και $\Gamma+A+1996\Gamma A=O$ (3)

α. Δείξτε ότι οι πίνακες: $I+1996A$, $I+1996B$ και $I+1996\Gamma$ είναι αντιστρέψιμοι και ότι $AB=B\Gamma=\Gamma A$.

β. Δείξτε ότι $A=B=\Gamma$.

Β. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $z=3+i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6=64$.

Α. α. Αν $K=I+1996A$, $\Lambda=I+1996B$, $M=I+1996\Gamma$ τότε $A=\frac{1}{1996}(K-I)$, $B=\frac{1}{1996}(\Lambda-I)$, $\Gamma=\frac{1}{1996}(M-I)$

(1) $\Rightarrow \dots$ $K\Lambda=I$

(2) $\Rightarrow \dots$ $\Lambda M=I$

άρα οι K, Λ, M είναι αντιστρέψιμοι.

www.sonom.gr

(1) $\xRightarrow{\cdot\Gamma}$ $A\Gamma+B\Gamma+1996AB\Gamma=O$

(2) $\xRightarrow{A\cdot}$ $AB+A\Gamma+1996AB\Gamma=O$

συνεπώς: $AB=B\Gamma$

(2) $\xRightarrow{\cdot A}$ $BA+\Gamma A+1996B\Gamma A=O$

(3) $\xRightarrow{B\cdot}$ $B\Gamma+BA+1996B\Gamma A=O$

συνεπώς: $B\Gamma=\Gamma A$

ΑΡΑ: $AB=B\Gamma=\Gamma A$.

β. από το α. έχουμε: $\Lambda^{-1}=K$ και $\Lambda^{-1}=M$ άρα $K=M$ δηλ. $A=\Gamma$

επίσης (3) $\Rightarrow \dots$ $MK=I$ συνεπώς $K=M^{-1}=\Lambda$ δηλ. $A=B$

ΑΡΑ: $A=B=\Gamma$

Β. $z^6=64 \Leftrightarrow z^6=64(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0)$

οι ρίζες της είναι οι $z_k=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{k\pi}{3}+i\eta\mu\frac{k\pi}{3}\right)$ όπου $k=0,1,\dots,5$.

με εικόνες τα σημεία $M_k\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{k\pi}{3}, 2\eta\mu\frac{k\pi}{3}\right)$

αυτά απέχουν από την εικόνα $A(3,\sqrt{3})$ του $z=3+i\sqrt{3}$ αποστάσεις:

$$d_k=(AM_k)=\sqrt{\left(3-2\sigma\upsilon\nu\frac{k\pi}{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-2\eta\mu\frac{k\pi}{3}\right)^2}=\dots=\begin{cases}2, & k=0\\ 2, & k=1\\ 4, & k=2\\ \sqrt{28}, & k=3\\ \sqrt{28}, & k=4\\ 4, & k=5\end{cases}$$

άρα η ελάχιστη απόσταση είναι 2 και η μέγιστη $\sqrt{28}$ $(=2\sqrt{7})$.

Ζήτημα 2ο

Α1. α1. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής σ' ἕνα διάστημα Δ καί γιά κάθε ἐσωτερικό σημεῖο $x \in \Delta$ εἶναι $f'(x)=0$ τότε ἡ f εἶναι σταθερή στό Δ.

β1. Ἄν οἱ f, g ἔχουν συνεχεῖς πρῶτες παραγώγους στό $\mathbb{R}$ καί $f'=g$, $g'=-f$ τότε νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχουν οἱ f'', g'' καί εἶναι συνεχεῖς, ἀποδεῖξτε ἀκόμα ὅτι $f''+f=g''+g=0$ καί ὅτι ἡ $h=f^2+g^2$ εἶναι σταθερή.

Β1. Θεωροῦμε τίς παραπάνω συναρτήσεις f καί g. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἄν x_1, x_2 εἶναι ρίζες τῆς f καί $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_1, x_2)$ τότε ἡ g ἔχει μία μόνο ρίζα στό (x_1, x_2).

---

www.sokom.gr

Α1. α1. Θεωρία.

β1. στό $\mathbb{R}$ εἶναι: ἡ f (ἄρα καί ἡ $-f$) παραγωγίσιμη μέ συνεχῆ πρώτη παράγωγο
ἡ g " " " "

καί $f'=g$, $g'=-f$ ἄρα ὑπάρχουν οἱ f'', g'' (καί εἶναι $f''=g'$, $g''=-f'$) καί εἶναι συνεχεῖς, ἐπίσης: $\forall x \in \mathbb{R}$ $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) =$
$= 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$ ἄρα h σταθερή στό $\mathbb{R}$.

$f''+f = g'+f = -f+f = 0$. $g''+g = -f'+f' = 0$.

Β1. $\left.\begin{array}{l} f \text{ παραγ. στό } [x_1,x_2] \\ f(x_1)=f(x_2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Θ. Rolle}}$ ἡ f' δηλ. ἡ g ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα στό (x_1,x_2)

ἔστω ὅτι ἡ g ἔχει στό (x_1,x_2) 2 ρίζες ρ_1, ρ_2, ἔστω $\rho_1<\rho_2$ τότε θά εἶναι

$\left.\begin{array}{l} g \text{ παραγ. στό } [\rho_1,\rho_2] \\ g(\rho_1)=g(\rho_2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Θ. Rolle}}$ ἡ g' δηλ. ἡ $-f$ ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα στό $(\rho_1,\rho_2) \subset (x_1,x_2)$ ΑΤΟΠΟ ἀφοῦ $\forall x \in (x_1,x_2)$: $f(x) \neq 0$

ἄρα ἡ g ἔχει μία μόνο ρίζα στό (x_1,x_2).

Ζήτημα 3ο

Α. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α). η εφαπτομένη της έλλειψης στό σημείο πού ή διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου τέμνει τήν έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$.

Νά βρείτε τήν εκκεντρότητα της έλλειψης.

β). Έστω Α τό σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στό όποίο ή ευθεία $y=\lambda x$, $\lambda>0$ τέμνει τήν παραπάνω έλλειψη. Άν μ είναι ή κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στό Α τότε νά εκφράσετε τό γινόμενο $\lambda\mu$ ως συνάρτηση των ημιαξόνων a, β.

Β. Νά αποδείξετε τις ανισότητες:

α). $\eta\mu x<2x$, $x>0$

β). $\eta\mu x>x-\frac{x^3}{3}$, $x>0$.

---

www.sonom.gr

Α. α). Άν (x_0,y_0) είναι τό σημείο τομής τότε: $-\frac{x_0\beta^2}{y_0a^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\beta}{a}\right)^2=\frac{1}{2}$

(αφού $y_0=x_0\neq 0$ προφανώς) άρα $\varepsilon^2=1-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2=\frac{1}{2}$ συνεπώς $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

β). Άν $A(x_0,y_0)$ τότε: $-\frac{x_0\beta^2}{y_0a^2}=\mu \Rightarrow -\frac{x_0\beta^2}{\lambda x_0a^2}=\mu \Rightarrow \lambda\mu=-\frac{\beta^2}{a^2}$

(αφού $y_0=\lambda x_0\neq 0$ προφανώς).

Β. α). Έστω $f(x)=\eta\mu x-2x$, $x\in[0,+\infty)$, f συνεχής

$\forall x\in(0,+\infty)$: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2<0$ άρα $f\downarrow$ στό $[0,+\infty)$ συνεπώς:

$\forall x\in(0,+\infty)$: $x>0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow \eta\mu x-2x<0 \Rightarrow \eta\mu x<2x$.

β). Έστω $f(x)=\eta\mu x-x+\frac{x^3}{3}$, $x\in[0,+\infty)$, f συνεχής

$\forall x\in[0,+\infty)$: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+x^2$. $f''(x)=-\eta\mu x+2x>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$

άρα είναι $f'\uparrow$ στό $[0,+\infty)$ συνεπώς

$\forall x\in(0,+\infty)$ $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$ άρα $f\uparrow$ στό $[0,+\infty)$ συνεπώς

$\forall x\in(0,+\infty)$ $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$ δηλ. $\eta\mu x-x+\frac{x^3}{3}>0$

δηλ. $\eta\mu x>x-\frac{x^3}{3}$.

Ζήτημα 4ο

Α. Νά βρεθεί ή συνεχής συνάρτηση f γιά τήν όποία ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = f(x) + e^x .$$

Β. Ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό $[a,b]$ καί ισχύει $\forall x \in [a,b]$: $f(x) + f(a+b-x) = c$, ὅπου c σταθερός πραγματικός ἀριθμός. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$.

---

www.sonom.gr

Α. ἄν $\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = c$ ($c \in \mathbb{R}$) τότε $f(x) = c - e^x$ καί

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 e^{1-x}(c - e^x)\,dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 (ce^{1-x} - e)\,dx = c$$

$$\Leftrightarrow \left[-ce^{1-x} - ex\right]_0^1 = c$$

$$\Leftrightarrow -c - e + ce = c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{e}{e-2}$$

ἄρα $f(x) = \frac{e}{e-2} - e^x$.

Β. $f(x) + f(a+b-x) = c \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx = c(b-a)$

ἄν $u = a+b-x = \begin{cases} \xrightarrow{\text{γιά } x=b} a \\ \xrightarrow{\text{γιά } x=a} b \end{cases}$

τότε $x = a+b-u$
καί $dx = -du$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a -f(u)\,du = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(u)\,du = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{c(b-a)}{2}$$

$\forall x \in [a,b]: f(x) + f(a+b-x) = c \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{γιά } x=a} c = f(a) + f(b) \\ \xrightarrow{\text{γιά } x=\frac{a+b}{2}} c = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$

ΑΡΑ: $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$.

1997

Ζήτημα 1ο

Α]. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι μοναδικός.

Β]. Έστω ότι A, B είναι $\nu \times \nu$ πίνακες και έστω ότι οι πίνακες A, B και $2AB - 3I$, είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma = 2A - 3B^{-1}$ και $\Delta = (2A - 3B^{-1})^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

Α]. Θεωρία.

Β]. αφού ο πίνακας $2AB - 3I$ είναι αντιστρέψιμος έχουμε:

$$|2AB - 3I| \neq 0 \Leftrightarrow |2AB - 3B^{-1}B| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |(2A - 3B^{-1})B| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |2A - 3B^{-1}||B| \neq 0$$

άρα $|2A - 3B^{-1}| \neq 0$, συνεπώς ο πίνακας Γ είναι αντιστρέψιμος.

$$|\Gamma||\Delta| = |\Gamma\Delta| = \left|(2A - 3B^{-1})\left((2A - 3B^{-1})^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}\right)\right|$$

$$= \left|I - \frac{1}{2}(2A - 3B^{-1})A^{-1}\right|$$

$$= \left|I - \frac{1}{2}2I + \frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}\right|$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}|B^{-1}A^{-1}|$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}|B^{-1}||A^{-1}| \neq 0$$

(γιατί αφού οι B^{-1}, A^{-1} είναι αντιστρέψιμοι με $(B^{-1})^{-1} = B$ και $(A^{-1})^{-1} = A$ είναι: $|B^{-1}| \neq 0$ και $|A^{-1}| \neq 0$.)

άρα $|\Delta| \neq 0$, συνεπώς ο πίνακας Δ είναι αντιστρέψιμος.

Ζήτημα 2ο

Α]. Δίνονται οἱ πραγματικές συναρτήσεις f, g μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, πού ἔχουν πρώτη καί δεύτερη παράγωγο καί $g(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ἔστω a πραγματικός ἀριθμός. Θέτουμε $A=\frac{f(a)}{g(a)}$ καί $B=\frac{f'(a)-Ag'(a)}{g(a)}$. Ἄν φ εἶναι πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό $\mathbb{R}/\{a\}$ τέτοια ὥστε $\frac{f(x)}{(x-a)^2g(x)}=\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}/\{a\}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει τό $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Β]. Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει πραγματική συνάρτηση f, ὁρισμένη στό $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ὥστε ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί a καί b ὥστε:

$$(x-2)f''(x)+(a\eta\mu x-bx^2)f'(x)=e^{x-2}-1, \text{ γιά κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Ἔστω ὅτι ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός $\rho\neq 2$, ὥστε $f'(\rho)=0$.

Νά ἐξετάσετε ἄν τό $f(\rho)$ εἶναι τοπικό ἐλάχιστο τῆς συνάρτησης f.

Α]. ἀπ' τή δοθεῖσα σχέση ἔχουμε: $\varphi(x)=\frac{f(x)-Ag(x)-B(x-a)g(x)}{(x-a)^2}$.

$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^2=0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-Ag(x)-B(x-a)g(x)\right)=f(a)-\frac{f(a)}{g(a)}g(a)-B\cdot 0\cdot g(a)=0$

(γιατί οἱ f,g εἶναι συνεχεῖς ὡς παραγωγίσιμες).

συνεπῶς:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{\left(f(x)-Ag(x)-B(x-a)g(x)\right)'}{\left((x-a)^2\right)'}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-Ag'(x)-Bg(x)-B(x-a)g'(x)}{2(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)-f'(a)+f'(a)-Ag'(x)+Ag'(a)-Ag'(a)-Bg(x)}{2(x-a)}-\frac{Bg'(x)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-A\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}+\frac{f'(a)-Ag'(a)-Bg(x)}{x-a}-Bg'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-A\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}+\frac{Bg(a)-Bg(x)}{x-a}-Bg'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-A\lim_{x\to a}\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}-B\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}Bg'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f''(a)-Ag''(a)-2Bg'(a)\right).$$

Β]. ἀπ' τή δοθεῖσα σχέση γιά $x=\rho$ ἔχουμε: $f''(\rho)=\frac{e^{\rho-2}-1}{\rho-2}$.

- ἄν $\rho<2$ τότε $\rho-2<0$ καί $e^{\rho-2}<1$ δηλ. $e^{\rho-2}-1<0$ συνεπῶς $f''(\rho)>0$
- ἄν $\rho>2$ τότε $\rho-2>0$ καί $e^{\rho-2}>1$ δηλ. $e^{\rho-2}-1>0$ συνεπῶς $f''(\rho)>0$

ΑΡΑ ἡ f ἔχει τοπ. ἐλάχιστο τό $f(\rho)$.

Ζήτημα 3ο

Α]. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g, δύο φορές παραγωγίσιμη στό $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)g(x)-(g'(x))^2>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
i]. η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γν. αύξουσα και ii]. $g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$.

Β]. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στό $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε νά ισχύει: $g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha$ γιά κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
i] $g(0)=-\alpha$ και ii]. $g'(x)=g(x)+g'(0)e^x+x$, γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α]. i]. $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)}>0$ άρα η $\frac{g'}{g}$ είναι $\uparrow$ στό $\mathbb{R}$.

ii]. • άν $x_1<x_2$ (όμοια άν $x_2<x_1$).

Έστω $f(x)=\ln g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) σέ καθένα άπ' τά $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$, $\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$ συνεπώς σύμφωνα μέ τό Θ.Μ.Τ τού Δ.Λ. υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ μέ

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}\quad\text{και}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, γιατί η $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ είναι $\uparrow$ στό $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}<2\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}$$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)<f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, γιατί $x_2-x_1>0$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)+f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\ln g(x_1)+\ln g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\ln\sqrt{g(x_1)g(x_2)} \Leftrightarrow g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$$

• άν $x_1=x_2$ η ζητούμενη σχέση ισχύει προφανώς ώς ισότητα (αφού $g(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Β]. i]. $\forall x,y\in\mathbb{R}$: $g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha \xrightarrow{\text{γιά } x=y=0} g(0)=g(0)+g(0)+\alpha \Rightarrow g(0)=-\alpha$.

ii]. $\forall x,y\in\mathbb{R}$: $\frac{dg(x+y)}{dx}=e^y g'(x)+e^x g(y)+y \Leftrightarrow g'(x+y)=e^y g'(x)+e^x g(y)+y$

$$\xrightarrow{\text{γιά } x=0} g'(y)=e^y g'(0)+g(y)+y$$

ΑΡΑ $\forall x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=e^x g'(0)+g(x)+x$.

Ζήτημα 4ο

Έστω C ή γραμμή τού έπιπέδου μέ έξίσωση: $y = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$ όπου a, b, γ, δ είναι πραγματικοί άριθμοί καί $a \neq 0$. Έστω $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3), \Delta(x_4, y_4)$ σημεία τής C. Υποθέτουμε ότι τό μέσο τού εύθυγράμμου τμήματος AB συμπίπτει μέ τό μέσο τού εύθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ καί έπίσης ύποθέτουμε ότι τό μέσο αύτό δέν άνήκει στήν εύθεία μέ έξίσωση $b + 3ax = 0$

Α). Νά άποδείξετε ότι $x_1 x_2 = x_3 x_4$.

Β). Νά άποδείξετε ότι τό σημείο A συμπίπτει μέ τό σημείο Γ ή μέ τό σημείο Δ.

Α). Έστω $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, $N\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right)$ τά μέσα τών $AB, \Gamma\Delta$ άντιστοίχως

άφού αύτά συμπίπτουν θά είναι $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ καί $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$.

$y_1+y_2 = y_3+y_4 \Leftrightarrow a(x_1^3+x_2^3) + b(x_1^2+x_2^2) + \gamma(x_1+x_2) + 2\delta = a(x_3^3+x_4^3) + b(x_3^2+x_4^2) + \gamma(x_3+x_4) + 2\delta$

$\Leftrightarrow a\left((x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)\right) + b\left((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = a\left((x_3+x_4)^3 - 3x_3x_4(x_3+x_4)\right) + b\left((x_3+x_4)^2 - 2x_3x_4\right)$

$\Leftrightarrow a(x_1+x_2)^3 - 3ax_1x_2(x_1+x_2) + b(x_1+x_2)^2 - 2bx_1x_2 = a(x_3+x_4)^3 - 3ax_3x_4(x_3+x_4) + b(x_3+x_4)^2 - 2bx_3x_4$

$\Leftrightarrow 3a(x_1+x_2)(-x_1x_2 + x_3x_4) + 2b(-x_1x_2 + x_3x_4) = 0$

$\Leftrightarrow (x_3x_4 - x_1x_2)\left(3a(x_1+x_2) + 2b\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_1x_2 = x_3x_4$, γιατί $3a(x_1+x_2) + 2b \neq 0$ άφού τό N δέν άνήκει στήν εύθεία μέ έξίσωση $3ax + b = 0$.

Β). Έχουμε $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \; (1)$ καί $x_1x_2 = x_3x_4 \; (2)$

- άν $x_1 = 0$ (όπότε $y_1 = \delta$)

  $(2) \Leftrightarrow x_3 = 0$ (όπότε $y_3 = \delta$) ή $x_4 = 0$ (όπότε $y_4 = \delta$)

  συνεπώς τό $A(x_1, y_1)$ συμπίπτει μέ τό $\Gamma(x_3, y_3)$ ή μέ τό $\Delta(x_4, y_4)$.

- άν $x_1 \neq 0$

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x_1 + \frac{x_3x_4}{x_1} = x_3 + x_4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_3x_4 - x_1x_3 - x_1x_4 = 0$

$\Leftrightarrow x_1(x_1 - x_3) - x_4(x_1 - x_3) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 - x_4) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_3$ (όπότε $y_1 = y_3$) ή $x_1 = x_4$ (όπότε $y_1 = y_4$)

συνεπώς τό $A(x_1, y_1)$ συμπίπτει μέ τό $\Gamma(x_3, y_3)$ ή μέ τό $\Delta(x_4, y_4)$.

1998

Ζήτημα 1ο

A| α). Αν ο μιγαδικός z_0 είναι ρίζα της: $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ όπου $a_0, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}$ με $a_\nu \neq 0$, δείξτε ότι και ο συζυγής του, $\bar{z}_0$ είναι ρίζα της.

β). Αν η $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον $2-3i$, να βρείτε τους β, γ καθώς και την εφαπτομένη της C_f της $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$ στο $A(1, f(1))$.

B|. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α). να δείξετε ότι η f είναι "1-1"

β). να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

www.sonom.gr

A|. α). Θεωρία.

β). αφού η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές θα έχει ρίζα και τον $2+3i$

συνεπώς: $\forall x \in \mathbb{C}: x^2 + \beta x + \gamma = (x-(2-3i))(x-(2+3i)) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = 13 \end{cases}$.

αλλιώς: $(2-3i)^2 + \beta(2-3i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = 13 \end{cases}$.

$f(x) = x^2 - 4x + 13, x \in \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = 2x - 4$

συνεπώς η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η: $y - 10 = -2(x-1)$ δηλ. $y = -2x + 12$

B|. α). $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \\ f^3(x_1) = f^3(x_2) \end{cases} \xRightarrow{+} f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2)$

$\Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f "1-1".

β). $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(2x^3 + x) = f(4-x)$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x = 4 - x$, αφού f "1-1"

$\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$

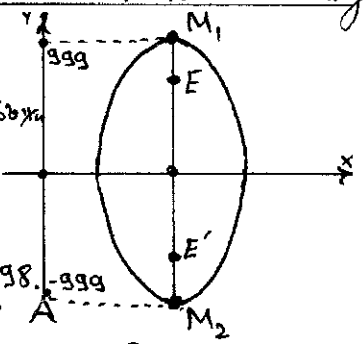
$\Leftrightarrow x = 1$ (αφού $x^2 + x + 2 \neq 0$ γιατί $\Delta = -7 < 0$).

1	0	1	-2	
	1	1	2	1
1	1	2	0	

Ζήτημα 2ο

Α]. Δίνεται ὁ μιγαδικός z_0 μέ $Imz_0<999$ καί τό σύνολο Α τῶν μιγαδικῶν z μέ $z\neq z_0$ καί $z\neq \bar{z}_0$, πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση: $\frac{1}{|z-z_0|}+\frac{1}{|z-\bar{z}_0|}=\frac{1998}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|}$.
Νά βρεῖτε τή μεγαλύτερη δυνατή ἀπόσταση πού μποροῦν νά ἀπέχουν μεταξύ τους οἱ εἰκόνες 2 μιγαδικῶν τοῦ Α. Ποιοί εἶναι αὐτοί οἱ μιγαδικοί;
Νά ἐξετάσετε τήν περίπτωση $z_0=\bar{z}_0$.

Β]. "Ενας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σέ μιά ἀγροτική καλλιέργεια καί συλλέγει g(x) μονάδες τοῦ παραγόμενου προϊόντος.
Ἄν $g(x)=M_0+M(1-e^{-\mu x}), x\geq 0$, ὅπου M_0, M, μ εἶναι θετικές σταθερές, νά εκφράσετε τό ρυθμό μεταβολῆς τοῦ παραγόμενου προϊόντος ὡς συνάρτηση τῆς g(x). Ποιά εἶναι ἡ σημασία τῆς σταθερᾶς M_0;



Α]. $\frac{1}{|z-z_0|}+\frac{1}{|z-\bar{z}_0|}=\frac{1998}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|} \Leftrightarrow |z-z_0|+|z-\bar{z}_0|=1998$ (1)

Ἄν M, E, E′ οἱ εἰκόνες (στό μιγαδικό ἐπίπεδο) τῶν $z, z_0, \bar{z}_0$ ἀντίστοιχα

τότε: (1) ⇔ $(ME)+(ME')=1998$
$(EE')=2Imz_0<1998$
ΑΡΑ: τό Μ ἀνήκει στήν ἔλλειψη μέ ἑστίες Ε, Ε′ καί μήκος μεγάλου ἄξονα 1998.

συνεπῶς ἡ μέγιστη ἀπόσταση τῶν εἰκόνων 2 μιγαδικῶν τοῦ Α εἶναι 1998 καί οἱ μιγαδικοί πού οἱ εἰκόνες τους ἀπέχουν τήν ἀπόσταση αὐτή εἶναι οἱ $z_1=Rez_0+999i$ καί $z_2=Rez_0-999i$ μέ εἰκόνες τίς κορυφές M_1, M_2 τῆς ἔλλειψης.

Ἄν $z_0=\bar{z}_0$ τότε (1) ⇔ $|z-z_0|=999$ συνεπῶς τό Μ ἀνήκει στόν κύκλο μέ κέντρο Ε καί ἀκτίνα 999 καί ἡ μέγιστη ἀπόσταση τῶν εἰκόνων 2 μιγαδικῶν τοῦ Α εἶναι 1998 καί οἱ μιγαδικοί πού οἱ εἰκόνες τους ἀπέχουν τήν ἀπόσταση αὐτή εἶναι οἱ (ἄπειροι) μιγαδικοί μέ εἰκόνες ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τοῦ κύκλου.

Β]. $\forall x\in[0,+\infty)$: $g'(x)=\mu M e^{-\mu x}$ ἀλλά: $e^{-\mu x}=1-\frac{g(x)-M_0}{M}$

συνεπῶς: $g'(x)=\mu M\left(1-\frac{g(x)-M_0}{M}\right)=\mu M_0+\mu M-\mu g(x)$.

ἀφοῦ $g(0)=M_0$ ἡ σταθερά M_0 ἐκφράζει τίς μονάδες τοῦ παραγόμενου προϊόντος χωρίς τήν προσθήκη λιπάσματος.

Ζήτημα 3ο

α). Δίνεται ο $\nu \times \nu$ πίνακας A για τον οποίο ισχύει: $A^2 - 2(\lambda-2)^2A + I = O$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A+I$ είναι αντιστρέψιμος. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β). Αν A είναι ο πίνακας του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(x+1)|A+xI| + (x-1)|A-xI| = 1-x^2$ έχει 1 τουλ. ρίζα στο $(-1,1)$.

γ). Δίνεται ο δειγμ. χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις: $2P(1)=2P(3)=2P(5)=2P(7)=3P(2)=3P(4)=3P(6)=3P(8)$, και το ενδεχόμενο $B=\{\lambda \in \Omega$ / το σύστημα $AX=X$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις$\}$ όπου A ο πίνακας του α/ ερωτήματος και X άγνωστος $\nu \times 1$ πίνακας. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

δ). Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+\gamma x+4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία απ' τον δ.χ. Ω του γ/ ερωτήματος. Αν $\Gamma=\{\gamma \in \Omega$ / η $f(x)=0$ έχει πραγμ. ρίζες$\}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(\Gamma)$ και να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

α). αν $X=A+I$ τότε $A=X-I$ και $A^2-2(\lambda-2)^2A+I=O \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (X-I)^2 - 2(\lambda-2)^2(X-I)+I=O \Leftrightarrow X^2 - 2\left(1+(\lambda-2)^2\right)X + 2\left(1+(\lambda-2)^2\right)I = O$

$\Leftrightarrow X\left(X-2(1+(\lambda-2)^2)I\right) = -2(1+(\lambda-2)^2)I \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{-2(1+(\lambda-2)^2)}\left(X-2(1+(\lambda-2)^2 I)\right)\right)=I$

άρα ο X δηλ. ο $A+I$ είναι αντιστρέψιμος, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β). αρκεί να δείξω ότι η συνάρτηση $f(x)=(x+1)|A+xI|+(x-1)|A-xI|+x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ρίζα στο $(-1,1)$, πραγματικά:

• η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ (ως πολυωνυμική)

• $f(-1)f(1) = -4|A+I|^2 < 0$ (αφού $|A+I| \neq 0$ γιατί ο $A+I$ είναι αντιστρέψιμος)

άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano η f έχει ρίζα στο $(-1,1)$.

γ). έστω $2P(1)=k$ τότε $P(1)+P(2)+\ldots+P(8)=1 \Leftrightarrow 4\frac{k}{2}+4\frac{k}{3}=1 \Leftrightarrow k=\frac{3}{10}$

άρα $P(1)=P(3)=P(5)=P(7)=\frac{3}{20}$ και $P(2)=P(4)=P(6)=P(8)=\frac{1}{10}$

$AX=X \Leftrightarrow (A-I)X=O$ (1). το (ομογενές) σύστημα (1) έχει 2 τουλάχιστον λύσεις αν-ν $|A-I|=0$. $A^2-2(\lambda-2)^2A+I=O \Leftrightarrow A^2+I = 2(\lambda-2)^2A \Leftrightarrow (A-I)^2=\left(2(\lambda-2)^2-2\right)A$

$\Rightarrow |(A-I)^2| = |(2(\lambda-2)^2-2)A| \Leftrightarrow |A-I|^2 = (2(\lambda-2)^2-2)^\nu |A| \Leftrightarrow (2(\lambda-2)^2-2)^\nu |A| = 0$ (2)

αλλά $A^2-2(\lambda-2)^2A+I=O \Leftrightarrow A\left(2(\lambda-2)^2I-A\right)=I$ συνεπώς A αντιστρέψιμος, άρα $|A|\neq 0$

και (2) $\Leftrightarrow 2(\lambda-2)^2-2=0 \Leftrightarrow \lambda-2=\pm 1 \Leftrightarrow \lambda=3$ ή $\lambda=1$

συνεπώς $B=\{1,3\}$ και $P(B)=P(1)+P(3)=2\cdot\frac{3}{20}=\frac{3}{10}$.

δ). $\Gamma=\{\gamma\in\Omega / \gamma^2-16 \geq 0\} = \{\gamma\in\Omega / \gamma \geq 4\} = \{4,5,6,7,8\}$

$P(\Gamma)=P(4)+P(6)+P(8)+P(7)+P(5) = 3\frac{1}{10}+2\frac{3}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$B\cap\Gamma=\emptyset$ άρα τα B,Γ είναι ασυμβίβαστα.

Ζήτημα 4ο

Δίνεται ή παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ γιά τήν όποία ισχύουν: $f(x)>0,\ x>0$
$f'(x)+2xf(x)=0,\ x>0$ καί ή γραφική της παράσταση διέρχεται άπ' τό $A(1,1)$.

α). Δείξτε ότι ή f' είναι συνεχής στό $(0,+\infty)$ καί βρείτε τήν f.

β). Δείξτε ότι: $\frac{x-1}{2x^2}f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{x-1}{2}$, $x>1$.

γ). Βρείτε τή συνάρτηση: $F(x)=\int_1^x \left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, $x>1$. (! .... ?)

δ). Δείξτε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, $\forall x\in(1,+\infty)$.

www.sonom.gr

α). ή f είναι συνεχής (ώς παραγωγίσιμη) άρα ή $f'(x)=-2xf(x)$ είναι συνεχής (ώς γινόμενο συνεχών).

$\forall x\in(0,+\infty)$: $\frac{f'(x)}{f(x)}=-2x \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(-x^2)' \Leftrightarrow \ln f(x)=-x^2+c\ (c\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2+c}=e^c e^{-x^2}$

$f(1)=1 \Leftrightarrow e^c e^{-1}=1 \Leftrightarrow e^c=e$ άρα: $f(x)=e^{1-x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

β). άρκεί ν.δ.ο. $\forall x\in(1,+\infty)$: $\frac{f(x)}{2x^2} < \frac{\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt - \int_1^1 \frac{f(t)}{2t^2}dt}{x-1} < \frac{1}{2}$ (1)

έστω $g(u)=\int_1^u \frac{f(t)}{2t^2}dt$, $u\in[1,+\infty)$.

g παραγωγίσιμη στό $[1,x]$ (άρα καί συνεχής) μέ $g'(u)=\frac{f(u)}{2u^2}$, σύμφωνα λοιπόν μέ τό Θ.Μ.Τ. τοῦ Δ.Λ ύπάρχει $\xi\in(1,x)$: $g'(\xi)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

άλλά $g''(u)=\dots=\frac{-2e^{1-u^2}(u^2+1)}{u^3}<0$, $u\in(1,+\infty)$ άρα g' ↓ συνεπώς:

$1<\xi<x \Leftrightarrow g'(x)<g'(\xi)<g'(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2x^2}<\frac{g(x)-g(1)}{x-1}<\frac{f(1)}{2} \Leftrightarrow (1)$.

γ). $F(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_1^x\left(-\frac{1}{2t}\right)'f(t)dt=\int_1^x e^{1-t^2}dt+\left[-\frac{e^{1-t^2}}{2t}\right]_1^x-\int_1^x -\frac{1}{2t}\left(e^{1-t^2}\right)'dt$

$=\int_1^x e^{1-t^2}dt-\frac{e^{1-x^2}}{2x}+\frac{1}{2}-\int_1^x e^{1-t^2}dt=\frac{1}{2}-\frac{e^{1-x^2}}{2x}$.

δ). $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1 \Leftrightarrow \int_1^x 2f(t)dt<1 \overset{(ύπ.)}{\Leftrightarrow} \int_1^x -\frac{1}{t}f'(t)dt<1$

$\Leftrightarrow \left[-\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt<1$

$\Leftrightarrow -\frac{f(x)}{x}+1-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt<1$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}+\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt>0$ πού ισχύει

γιατί $f(x)>0,\ x>0$ καί άφοῦ ή συνάρτηση μέ τύπο $\frac{f(t)}{t^2}$ είναι συνεχής στό $[1,x]$ ύπάρχει $\xi\in[1,x]$ τέτοιος ώστε: $\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt = \frac{f(\xi)}{\xi^2}(x-1) > 0$.

1999

Ζήτημα 1ο

Α|. Δείξτε ότι, αν μία συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στό εσωτερικό σημείο x_0 τοῦ διαστήματος Δ τοπ. ακρότατο καί είναι παραγωγίσιμη στό x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Β|. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, ή όποία σέ σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τό 0 καί $f''(x) > 4(f'(x)-f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α). Δείξτε ότι ή συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή.

β). Δείξτε ότι $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

---

www.sonom.gr

Α|. Θεωρία.

Β|. α). $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x}$.

$$g''(x) = f''(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x}$$
$$= (f''(x) - 4(f'(x)-f(x)))\,e^{-2x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$ ἄρα ή g είναι κυρτή.

β). ἀφοῦ ή f είναι παραγωγίσιμη στό x_0 (ποὺ είναι εσωτερικό τοῦ $\mathbb{R}$) καί ἔχει στό x_0 ακρότατο τό 0 (οπότε $f(x_0)=0$) σύμφωνα μέ τό Θ. Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$

$g(x_0) = f(x_0)e^{-2x_0} = 0$

$g'(x_0) = f'(x_0)e^{-2x_0} - 2f(x_0)e^{-2x_0} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $g''(x) > 0$ ἄρα $g' \uparrow$ στό $\mathbb{R}$ συνεπῶς $\forall x \in (-\infty, x_0)$: $x < x_0 \Rightarrow g'(x) < g'(x_0) = 0$

$\forall x \in (x_0, +\infty)$: $x > x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

ἄρα $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ δηλ. $f(x)e^{-2x} \geq 0$ δηλ. $f(x) \geq 0$.

Ζήτημα 2ο

Α1. Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

α). Δείξτε ότι, στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμ. τόπος των σημείων $M(x,y)$ που είναι τέτοια ώστε: $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β). Έστω O η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι εφαπτομένες που άγονται από το O προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο σημείων επαφής M_1, M_2.

Β1. Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ δ.χ. ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και c κύκλος με κέντρο $(2,1)$ και ακτίνα 1.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
$E=\{\omega\in\Omega / M(\omega,1) \text{ εσωτερικό του } c\}$ και $Z=\{\omega\in\Omega / N(2,\omega) \text{ εξωτερικό του } c\}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων E, Z και $E\cup Z$.

---

www.sonom.gr

Α1. α). $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6 \Leftrightarrow (z-1)(\bar z-1)+(z-3-2i)(\bar z-3+2i)=6$

$$\Leftrightarrow \dots\ 2z\bar z-4(z+\bar z)+2i(z-\bar z)=-8$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)-4\cdot 2x+2i\,2yi=-8$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=-4+4+1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1^2$$

συνεπώς ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος (c) κέντρου $(2,1)$ και ακτίνας 1.

β). έστω $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής μιας απ' τις ζητούμενες εφαπτομένες, τότε:

$(\varepsilon\varphi)$: $(x-2)(x_1-2)+(y-1)(y_1-1)=1$

$M\in(c) \Leftrightarrow (x_1-2)^2+(y_1-1)^2=1$ ①

$O\in(\varepsilon\varphi) \Leftrightarrow -2(x_1-2)-(y_1-1)=1$ ②

$$\begin{cases}①\\②\end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases}x_1=2\\ y_1=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x_1=6/5\\ y_1=8/5\end{cases}$$

συνεπώς από το O άγονται προς τον (c) δύο εφαπτομένες στα $M_1(2,0)$ και $M_2(6/5, 8/5)$.

Β1. (c): $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

$E=\{\omega\in\Omega / (\omega-2)^2+(1-1)^2<1\}=\{\omega\in\Omega/(\omega-2)^2-1<0\}=\{\omega\in\Omega/(\omega-3)(\omega-1)<0\}$

$=\{\omega\in\Omega / 1<\omega<3\}=\{2\}$.

$Z=\{\omega\in\Omega / (2-2)^2+(\omega-1)^2>1\}=\{\omega\in\Omega/(\omega-1)^2-1>0\}=\{\omega\in\Omega/\omega(\omega-2)>0\}$

$=\{\omega\in\Omega / \omega<0 \text{ ή } \omega>2\}=\{3,4,5,6\}$.

$P(E)=\frac{1}{6}$

$P(Z)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

$P(E\cup Z)=P(E)+P(Z)-P(E\cap Z)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-0=\frac{5}{6}$.

Ζήτημα 3ο

Α|. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $|\vec{AB}|=4$, $|\vec{A\Gamma}|=6$ και $(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\frac{\pi}{3}$. Αν Μ μέσο της ΒΓ:

α). να υπολογίσετε το $|\vec{AM}|$.

β). να αποδείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{AM}}\vec{AB}=\frac{14}{19}\vec{AM}$.

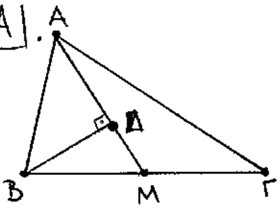
Β|. Έστω Α, Β $\nu\times\nu$ πίνακες με στοιχεία πραγματικούς, για τους οποίους ισχύει:

$$A^2+AB+I=B^2+BA+I=O,$$ να αποδείξετε ότι:

α). i) ο $A+B$ έχει αντίστροφο, ii). $A=B$

β). ο ν είναι άρτιος.

Α|.



α). $2\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{A\Gamma}$ άρα $|2\vec{AM}|=|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|$ συνεπώς $|\vec{AM}|=\frac{|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|}{2}$

$|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|^2=(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})^2=\dots=76 \Leftrightarrow |\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

άρα $|\vec{AM}|=\sqrt{19}$.

β). $\text{προβ}_{\vec{AM}}\vec{AB}=\vec{A\Delta}=\lambda\cdot\vec{AM}$, οπότε:

$$\vec{AB}\cdot\vec{AM}=\vec{A\Delta}\vec{AM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{AB}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})=\lambda\cdot\vec{AM}^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(|AB|^2+\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}\right)=\lambda\cdot|\vec{AM}|^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(16+12)=\lambda\cdot 19$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{14}{19} \quad \text{άρα: } \text{προβ}_{\vec{AM}}\vec{AB}=\frac{14}{19}\vec{AM}.$$

Β|. α). i). $A^2+AB+I=O \Leftrightarrow -A(A+B)=I \Leftrightarrow (A+B)^{-1}=-A$

ii). $B^2+BA+I=O \Leftrightarrow -B(B+A)=I \Leftrightarrow (A+B)^{-1}=-B$

συνεπώς $-A=-B$ δηλ. $A=B$.

β). $$A^2+AB+I=O \overset{A=B}{\Leftrightarrow} 2A^2+I=O$$
$$\Leftrightarrow 2A^2=-I$$
$$\Rightarrow |2A^2|=|-I|$$
$$\Leftrightarrow 2^\nu|A|^2=(-1)^\nu$$

αφού $(-1)^\nu>0$ συμπεραίνουμε ότι ν άρτιος.

Ζήτημα 4º

Α]. Δίνεται η $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$. α). υπολογίστε τό $I=\int_1^4 f(t)dt$.

β). έστω η $g(x)=\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x>0$

i) δείξτε ότι $e^{1/x^2}\le e^{t/x^2}\le e^{4/x^2}$, $\forall t\in[1,4]$ και $x>0$.

ii). υπολογίστε τό $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Β]. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση πού ικανοποιεί τή σχέση: $h(x)=1999(x-1)+\int_1^x \frac{h(t)}{t}dt$, $x\ge1$, νά αποδείξετε ότι: α). $h(x)=1999\,x\ln x$, $x\ge1$

β). $h\uparrow$ στό $[1,+\infty)$.

Α]. α). $I=\int_1^4\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_1^4\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt=\left[2t-\ln|t+2|\right]_1^4=8-\ln6-2+\ln3=6-\ln2-\ln3+\ln3=6-\ln2.$

β). i). $\forall t\in[1,4]$ και $x>0$: $1\le t\le4 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\le\frac{t}{x^2}\le\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow e^{1/x^2}\le e^{t/x^2}\le e^{4/x^2}$.

ii). $e^{1/x^2}\le e^{t/x^2}\le e^{4/x^2} \Leftrightarrow f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{1/x^2}\le f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{t/x^2}\le f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{4/x^2}$ γιατί $\forall t\in[1,4]$ και $x>0$ $f(t)>0$ και $\frac{x+2}{x+1}>0$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{1/x^2}dt\le g(x)\le\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{4/x^2}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}e^{1/x^2}(6-\ln2)\le g(x)\le\frac{x+2}{x+1}e^{4/x^2}(6-\ln2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}e^{1/x^2}(6-\ln2)=1\cdot1\cdot(6-\ln2)=6-\ln2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}e^{4/x^2}(6-\ln2)=1\cdot1\cdot(6-\ln2)=6-\ln2$$

$\xrightarrow{\text{κρ. παρεμβολής}}$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=6-\ln2.$

Β]. α). $\forall x\in[1,+\infty)$: $h'(x)=1999+\frac{h(x)}{x}\Leftrightarrow xh'(x)-h(x)=1999x$

$$\Leftrightarrow \frac{xh'(x)-h(x)}{x^2}=\frac{1999}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{h(x)}{x}\right)'=(1999\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)}{x}=1999\ln x+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow h(x)=1999x\ln x+cx$$

από τή δοθείσα σχέση είναι: $h(1)=0$, συνεπώς $c=0$. άρα $h(x)=1999x\ln x$.

β). $\forall x\in[1,+\infty)$: $h'(x)=1999+1999\ln x>0$ (γιατί $\ln x\ge0$)

άρα $h\uparrow$ στό $[1,+\infty)$.

2000

Ζήτημα 1º

Α]. Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1 και z_2, να αποδείξετε ότι $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2))$.

Β]. Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ ένας δ.χ. με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda \in \Omega$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2, x \in \mathbb{R}$ και τα ενδεχόμενα
X: η μέγιστη τιμή της f στο $[0,5]$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του $68/3$.
Y: η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,5]$ είναι μικρότερη ή ίση του 4.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: X, Y, $X \cap Y$ και $X \cup Y$.

Α]. Θεωρία.

Β]. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

x	$-\infty$	0		1		3		5	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	−	0	+		
$f(x)$		τ.ε. λ^2	↗	τ.μ. $\lambda^2+\frac{4}{3}$	↘	τ.ε. λ^2	↗	τ.μ. $\lambda^2+\frac{20}{3}$	

η μέγιστη τιμή της f στο $[0,5]$ είναι η $\lambda^2 + \frac{20}{3}$

$\lambda^2 + \frac{20}{3} \geq \frac{68}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 16 \Leftrightarrow \lambda \geq 4$

συνεπώς: $X = \{4, 5, \dots, 10\}$.

η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,5]$ είναι η λ^2

$\lambda^2 \leq 4 \Leftrightarrow \lambda \leq 2$

συνεπώς: $Y = \{1, 2\}$.

$X \cap Y = \emptyset$ και $X \cup Y = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ΑΡΑ: $P(X) = 7/10$.

$P(Y) = 2/10$.

$P(X \cap Y) = 0$.

$P(X \cup Y) = 9/10$.

Ζήτημα 2ο

Α). Έστω Α, Β τχν πίνακες τέτοιοι ώστε $4A^2-B^2=I$ καί $AB=BA$.

α). Νά αποδείξετε ότι οί πίνακες $2A-I$ καί $2A+I$ είναι αντιστρέψιμοι

β). Έστω X, Y τχν πίνακες τέτοιοι ώστε $2AX+BY=2A+I$ καί $BX+2AY=B$.

i). νά αποδείξετε ότι $X=2A+I$ καί $Y=-B$.

ii). νά αποδείξετε ότι: $|Y^2+2X|\geq 0$.

Β). Θεωρούμε τά σημεία $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ μέ $\varphi\in[0,2\pi)$.

α). i). νά αποδείξετε ότι τά σημεία αυτά ανήκουν σέ έλλειψη της οποίας νά βρείτε τήν εξίσωση.

ii). νά βρείτε τήν εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στό $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ μέ $\varphi\in(0,2\pi)$.

β). Έστω $E(\varphi)$ μέ $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$ τό εμβαδόν τού τριγώνου πού σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη μέ τούς άξονες $x'x$ καί $y'y$. Νά αποδείξετε ότι $E(\varphi)\geq 20$.

www.sonom.gr

Α). α). $4A^2-B^2=I \underset{AB=BA}{\overset{\text{αφού}}{\Longleftrightarrow}} (2A+B)(2A-B)=I \Leftrightarrow (2A+B)^{-1}=2A-B$ καί $(2A-B)^{-1}=2A+B$.

β). i).
$$\begin{cases} 2AX+BY=2A+I \\ BX+2AY=B \end{cases} \overset{+}{\underset{-}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} (2A+B)X+(2A+B)Y=2A+B+I \\ (2A-B)X-(2A-B)Y=2A-B+I \end{cases}$$

(πολ/άζουμε τά 2 μέλη μέ $(2A-B)$)

(πολλάζουμε τά 2 μέλη μέ $(2A+B)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=(2A-B)\big((2A+B)+I\big) \\ X-Y=(2A+B)\big((2A-B)+I\big) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=I+2A-B \\ X-Y=I+2A+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2A+I \\ Y=-B \end{cases}.$$

ii). $|Y^2+2X|=|B^2+4A+2I|=|4A^2-I+4A+2I|=|4A^2+4A+I|=|(2A+I)^2|$
$$=|2A+I|^2\geq 0$$

Β). α). i). άν $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)=M(x,y)$ τότε: $\begin{cases} 4\sigma\upsilon\nu\varphi=x \\ 5\eta\mu\varphi=y \end{cases}$ δηλαδή: $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{x}{4} \\ \eta\mu\varphi=\frac{y}{5} \end{cases}$

συνεπώς: $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ (c) άρα τά σημεία M ανήκουν στήν έλλειψη.

ii). $(\varepsilon\varphi)$: $\frac{x\cdot 4\sigma\upsilon\nu\varphi}{16}+\frac{y\cdot 5\eta\mu\varphi}{25}=1$ ή αλλιώς: $(5\sigma\upsilon\nu\varphi)x+(4\eta\mu\varphi)y-20=0$.

β). η $(\varepsilon\varphi)$ τέμνει τόν $x'x$ στό $A\left(\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\varphi}, 0\right)$

καί τόν $y'y$ στό $B\left(0, \frac{5}{\eta\mu\varphi}\right)$

$E(\varphi)\geq 20 \Leftrightarrow E_{AOB}\geq 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA)(OB)\geq 20$

$\Leftrightarrow \frac{4}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\frac{5}{\eta\mu\varphi}\geq 40$ (είναι $\eta\mu\varphi>0$, $\sigma\upsilon\nu\varphi>0$ αφού $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$)

$\Leftrightarrow 1\geq 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Leftrightarrow 1\geq \eta\mu 2\varphi$

πού ισχύει.

Ζήτημα 3ο

Α). Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $I(x)=\int_0^1\left(f^2(t)-2xt^2f(t)+x^2t^4\right)dt$, $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=5\int_0^1 t^2f(t)\,dt$.

Β). Έστω η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2000+|\ln(x-1)|$ και $c\in\mathbb{R}$ με $c>2000$.
Έστω ότι η ευθεία $y=c$ και η C_f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

Α). $\forall x\in\mathbb{R}$: $I(x)=\int_0^1 f^2(t)dt-2x\int_0^1 t^2f(t)dt+x^2\int_0^1 t^4dt=\int_0^1 f^2(t)dt-2x\int_0^1 t^2f(t)dt+\dfrac{x^2}{5}$.

$$I'(x)=-2\int_0^1 t^2f(t)dt+\frac{2x}{5}.$$

$$I'(x)=0 \Leftrightarrow x=5\int_0^1 t^2f(t)dt=x_0.$$

$$I'(x)>0 \Leftrightarrow x>5\int_0^1 t^2f(t)dt.$$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$I'(x)$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$\searrow$	Ε	$\nearrow$	

Β). $f(x)=\begin{cases}2000-\ln(x-1), & 1<x<2\\ 2000+\ln(x-1), & 2\le x\end{cases}$,

$\forall x\in(1,2)$: $f'(x)=-\dfrac{1}{x-1}$.

$\forall x\in(2,+\infty)$: $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

$$\begin{cases}y=c\\ y=2000-\ln(x-1)\\ 1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ 2000-\ln(x-1)=c\\ 1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ \ln(x-1)=2000-c\\ 1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ x=e^{2000-c}+1\\ 1<x<2\end{cases}$$ (ισχύει γιατί $c>2000$)

συνεπώς είναι: $A\left(e^{2000-c}+1,\ c\right)$

$$\begin{cases}y=c\\ y=2000+\ln(x-1)\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ 2000+\ln(x-1)=c\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ \ln(x-1)=c-2000\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=c\\ x=e^{c-2000}+1\\ x\ge 2\end{cases}$$ (ισχύει γιατί $c>2000$)

συνεπώς είναι: $B\left(e^{c-2000}+1,\ c\right)$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi_A}\lambda_{\varepsilon\varphi_B}=f'\left(e^{2000-c}+1\right)f'\left(e^{c-2000}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{e^{2000-c}}\cdot\frac{1}{e^{c-2000}}$$
$$=-\frac{1}{e^0}$$
$$=-1$$

άρα $\varepsilon\varphi_A\perp\varepsilon\varphi_B$.

Ζήτημα 4ο

-Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στό $\mathbb{R}$ τέτοιες ὥστε $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) = x - 4$.
Έστω ὅτι ἡ εὐθεία (ε): $y = 3x - 7$ εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς C_f καθώς $x \to +\infty$.

Α). Νά βρεῖτε τά ὅρια:

i). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

ii). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$.

Β). Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία (ζ): $y = 2x - 3$ εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς C_g καθώς $x \to +\infty$.

www.soucom.gr

Α). σύμφωνα μέ τά δεδομένα εἶναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - 3x\right) = -7$

καί $g(x) = f(x) - x + 4$

i). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - 1 + \dfrac{4}{x}\right) = 3 - 1 + 0 = 2.$

ii).
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{\eta\mu 2x}{x}\right)}{x\left(f(x) - 3x + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \frac{2 + 3 + 0}{-7 + 0}$$
$$= -\frac{5}{7}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 0$ ἀφοῦ: $\left|\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|} \underset{x\to+\infty}{\overset{\text{ὅταν}}{=}} \dfrac{1}{x}$ καί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Β).
$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x) - (2x-3)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x + 4 - 2x + 3\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (3x - 7)\right)$$
$$= 0$$
γιατί ἡ $y = 3x - 7$ εἶναι π.α. τῆς C_f στό C_f

ἄρα ἡ $y = 2x - 3$ εἶναι π.α. τῆς C_g στό $+\infty$.