Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι   Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ
Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 1ο: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

2. * Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

4. * Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

6. * Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι ίσα. **Σ** **Λ**

7. * Αν $\vec{u} = (x_1, - y_1)$ και $\vec{v} = (- x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = - \vec{v}$. **Σ** **Λ**

8. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (- 2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, - 3)$. **Σ** **Λ**

9. * Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. **Σ** **Λ**

10. * Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευθύνσεως. **Σ** **Λ**

11. * Αν $\vec{\alpha} = - \vec{\beta}$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}) = 2\pi$. **Σ** **Λ**

12. * Αν το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

13. * Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

14. * Αν $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ και κ, λ > 0, τότε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

15. * Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{i} + \lambda\vec{j}$, $\lambda \in R$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. **Σ** **Λ**

16. * Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι οξεία. **Σ** **Λ**

17. * Το $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

18. * Το $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in R$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

19. * Το $(\vec{\alpha} \lambda) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in R$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

20. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

21. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

22. * Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

23. * Το διάνυσμα $\lambda \vec{\alpha}$, $\lambda \in R$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

24. * Αν $\lambda \vec{\alpha} = \vec{0}$, $\lambda \in R$ τότε οπωσδήποτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

25. * Η ισότητα $|\lambda \vec{\alpha}| = |\lambda| \, |\vec{\alpha}|$ ισχύει για κάθε $\lambda \in R$. **Σ** **Λ**

26. * Αν $\kappa \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

27. * Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\overrightarrow{AB}$. **Σ** **Λ**

28. * Αν $\kappa \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, κ, $\lambda \in R$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. **Σ** **Λ**

29. * Αν $\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. **Σ** **Λ**

30. * Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ ορίζεται τρίγωνο. **Σ** **Λ**

31. * Αν ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ τότε $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2}$. **Σ** **Λ**

32. * Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. **Σ** **Λ**

33. * Αν $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου Α, Β σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η μεσοκάθετη ευθεία του ΑΒ. **Σ** **Λ**

34. * Ισχύει η ισοδυναμία: G βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

35. * Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{\alpha}\ (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\ \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

36. * Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

37. * Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \neq \frac{\pi}{2}$. **Σ** **Λ**

38. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

39. * Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα. **Σ** **Λ**

40. * Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

41. * Τα ζεύγη $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $-\vec{\alpha}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. **Σ** **Λ**

42. * Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} < 0$. **Σ** **Λ**

43. * Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

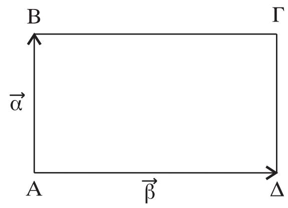
44. * Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

45. * Υπάρχουν $x \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

46. * Υπάρχουν $\theta \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}\ (\frac{1}{\text{συνθ}}, \frac{1}{\text{ημθ}})$ και $\vec{\beta}$ (ημθ, συνθ) να είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

47. * Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta} = \vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\delta}}\,\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής



1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$.

α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ισούται με

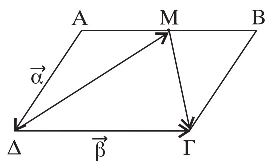
Α. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **Β.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ ισούται με

Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\dfrac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$ **Ε.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$



2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta M}$ ισούται με

Α. $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha} + \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{M\Gamma}$ ισούται με

Α. $\vec{\alpha} - \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

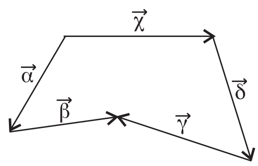
γ) Με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

Α. $\overrightarrow{AB}$ **Β.** $\overrightarrow{B\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{\Delta B}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Gamma A}$ **Ε.** $\overrightarrow{A\Gamma}$

δ) Με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

Α. $\overrightarrow{A\Gamma}$ **Β.** $\overrightarrow{\Gamma A}$ **Γ.** $\overrightarrow{BA}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Delta B}$ **Ε.** $\overrightarrow{B\Delta}$

3. * Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με



Α. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ **Β.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ **Δ.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

Ε. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$

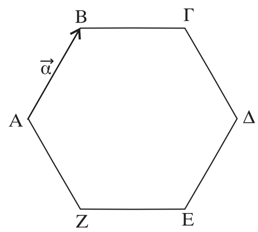
4. * Για κάθε τετράδα σημείων Α, Β, Γ, Δ ισχύει

Α. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$ **Β.** $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

Γ. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}$ **Δ.** $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

Ε. $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

5. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι



Α. $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AE}$ **Β.** $\overrightarrow{A\Gamma} = -\overrightarrow{EA}$

Γ. $\overrightarrow{A\Gamma} = -2\vec{\alpha}$ **Δ.** $\overrightarrow{A\Gamma} = -4\vec{\alpha}$

Ε. $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{Z\Delta}$

6. * Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, κ, λ $\in$ R* διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

Α. κ, λ θετικοί **Β.** κ, λ αρνητικοί **Γ.** κ, λ αντίστροφοι

Δ. κ, λ ετερόσημοι **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

7. * Αν ισχύει: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σε κάθε περίπτωση σωστή;

Α. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά

Β. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα

Γ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα

Δ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο

Ε. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση

8. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda - 4,\ \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με

Α. $\lambda = 2$ **Β.** $\lambda = 1$ **Γ.** $\lambda = -4$ **Δ.** $\lambda = 0$

Ε. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

9. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με

Α. $\theta = 2\kappa\pi$ **Β.** $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ **Ε.** καμία τιμή του θ

10. * Είναι $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in R$ και $\kappa \in Z$. Το $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα x΄x με

Α. $\theta = \kappa\pi$ **Β.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = \kappa\pi + \pi$ **Ε.** $\theta = \kappa\pi - \pi$

11. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (ημθ, συνθ), είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$ = (συνθ, ημθ) με

Α. $\theta = 0$ **Β.** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = \pi$ **Ε.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

12. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, λ), και $\vec{\beta}$ = (4, - λ) είναι παράλληλα με

Α. λ = - 1 **Β.** λ = 0 **Γ.** λ = 1

Δ. λ = 4 **Ε.** λ = - 4

13. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με

Α. λ = - 1 **Β.** λ = 0 **Γ.** λ = 1

Δ. λ = 2 **Ε.** λ = 8

14. * Με $\vec{\alpha}$ = (1, - 3) και $\vec{\beta}$ = (- 1, - 3) και $\vec{\gamma}$ = (0, - 6) ισχύει

Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ **Β.** $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ **Γ.** $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$

Δ. $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ **Ε.** $\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \vec{\beta}$

15. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (2, - 2), $\vec{\beta}$ = (1, - 1) και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

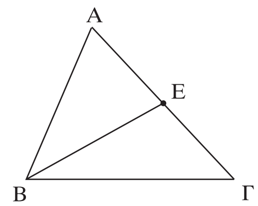
Σωστή είναι η σχέση

Α. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **Β.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \,//\, \vec{\gamma}$

Δ. $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ **Ε.** $\vec{\alpha} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$

16. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΕ είναι διάμεσος.

Το άθροισμα $\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ}$ ισούται με



Α. $\overrightarrow{ΒΕ}$ **Β.** $\overrightarrow{ΓΑ}$ **Γ.** $2\overrightarrow{ΕΒ}$

Δ. $2\overrightarrow{ΒΕ}$ **Ε.** $2\overrightarrow{ΑΓ}$

17. * Τα διανύσματα $\vec{α} = (λ, 4)$ και $\vec{β} = (λ - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

Α. 0 **Β.** - 2 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{1}{4}$

18. * Τα διανύσματα $\vec{α} = (λ^2, 2λ)$ και $\vec{β} = (1, - 2)$ είναι παράλληλα ($λ \neq 0$). Ο λ ισούται με

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** $\sqrt{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2

19. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α} = (- 2, 4)$ και $\vec{β} = (3, - 2)$. Η σχέση $\vec{α} + κ\vec{β} = \vec{0}$ ισχύει με

Α. $κ = \frac{2}{3}$ **Β.** $κ = - \frac{2}{3}$ **Γ.** $κ = - 2$ **Δ.** $κ = 2$

Ε. κανένα $κ \in R$

20. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{α} = (2, - \sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{α}$ είναι το

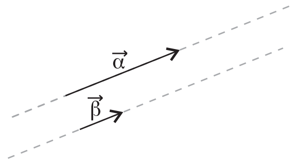
Α. $\vec{x} = (- 2, \sqrt{2})$ **Β.** $\vec{y} = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ **Γ.** $\vec{z} = (- \sqrt{2}, 2)$

Δ. $\vec{ω} = (1, - \sqrt{2})$ **Ε.** $\vec{v} = (\sqrt{2}, - 2)$

21. * Αν $|\vec{\kappa}| = 2$, $|\vec{\nu}| = 3$, $\vec{\kappa}\,.\,\vec{\nu} = -3$ και $0 \le \vec{\theta} = (\widehat{\vec{\kappa}, \vec{\nu}}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με

Α. 0° **Β.** 30° **Γ.** 60° **Δ.** 120° **Ε.** 150°

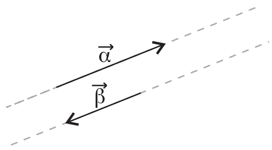
22. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με



Α. $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Β.** $-\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** 0

Δ. $\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

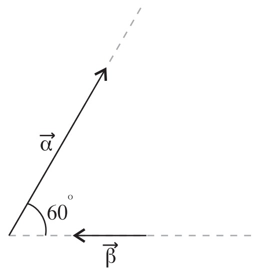
23. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με



Α. 0 **Β.** $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** $-\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

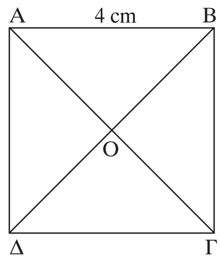
24. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με



Α. $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Β.** $\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

Δ. $-\,\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

25. * Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;



Α. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{\Gamma B} = 0$ **Β.** $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB} = 8$

Γ. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{A\Gamma} = 16$ **Δ.** $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -16$

Ε. $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{BA} = 8$

26. * Αν $\vec{\alpha}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με

Α. $\vec{\alpha}\,.\,\text{προβ}_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha}$ **Β.** $\vec{\alpha}\,.\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$

Γ. $\vec{\beta}\,.\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$ **Δ.** $|\vec{\alpha}|\,.\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$

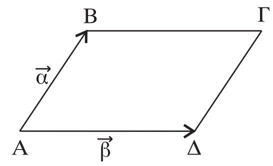
Ε. $|\vec{\beta}|\,.\,\text{προβ}_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha}$

27. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το συν $(\vec{\alpha}\,,\widehat{\ \ }\,\vec{\beta})$ ισούται με

Α. $\dfrac{|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|}{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\alpha}\,|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|.\vec{\beta}}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|}$ **Δ.** $\dfrac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$ **Ε.** $\dfrac{|\vec{\alpha}.\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



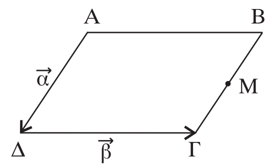
Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{A\Gamma}$	**Α.** $-\vec{\alpha}$
2. $\overrightarrow{\Gamma B}$	**Β.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
3. $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	**Γ.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
4. $\overrightarrow{B\Delta}$	**Δ.** $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	Ε. $-\vec{\beta}$
	Ζ. $\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\text{ΔΓ}} = \vec{\beta}$ και Μ μέσο της ΒΓ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

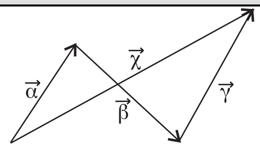
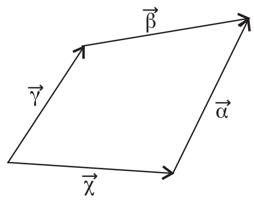
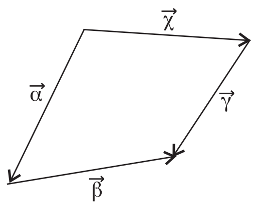
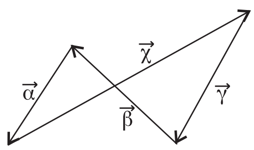
στήλη Α	**στήλη Β**
1. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$	**Α.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
	Β. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
2. $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$	**Γ.** $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
3. $\overrightarrow{\text{ΔΜ}}$	**Δ.** $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
4. $\overrightarrow{\text{ΑΜ}}$	**Ε.** $\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
	Ζ. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

3. * Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (Ι) να αντιστοιχίσετε μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1.  **2.**  **3.**  **4.** 	**Α.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ **Β.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ **Γ.** $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})$ **Δ.** $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ **Ε.** $\vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$ **Ζ.** $\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

4. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α διάνυσμα	**στήλη Β μέτρο**
	Α. $\sqrt{2}$
1. $-\sqrt{8}\,\vec{i}+\vec{j}$	**Β.** ημθ + συνθ
2. $x\vec{i}+\psi\vec{j}$	**Γ.** 3
3. $(2ημθ)\,\vec{i}-(2συνθ)\,\vec{j}$	**Δ.** $\sqrt{x^2+\psi^2}$
4. $(x-\psi)\,\vec{i}+2\sqrt{x\psi}\,\vec{j}$	**Ε.** ημθ - συνθ
	Ζ. 2
	Η. $\left\|x+\psi\right\|$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

5. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **διάνυσμα**	**στήλη Β** **συντελεστής διεύθυνσης**
	Α. $\sqrt{2}$
1. $2\vec{i}+2\vec{j}$	**Β.** 2
2. $2\vec{i}$	**Γ.** 0
3. $\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$	**Δ.** 4
	Ε. δεν ορίζεται
4. $2\vec{i}-2\vec{j}$	**Ζ.** 1
	Η. -1

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

6. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ, η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **διάνυσμα $\vec{u}$**	**στήλη Β** **$(O\vec{x}, \vec{u})$**
1. $-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\,\vec{j}$	**Α.** $\frac{3\pi}{4}$
2. (1, 1)	**Β.** $\frac{\pi}{3}$
3. $(1, \sqrt{3})$	**Γ.** $\frac{2\pi}{3}$
4. (- 1, 1)	**Δ.** $\frac{\pi}{4}$
	Ε. $\frac{5\pi}{6}$
	Ζ. $\frac{\pi}{6}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

7. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **διάνυσμα**	**στήλη Β** **κάθετο διάνυσμα**
1. $\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	**Α.** $\vec{e} = (0, \kappa)$
2. $\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	**Β.** $\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
3. $\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	**Γ.** $\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
4. $\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	**Δ.** $\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	Ε. $\vec{r} = (\kappa, -\kappa - 1)$
	Ζ. $\vec{m} = (\kappa^2, 0)$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στην αριστερή στήλη Α του πίνακα (Ι) με το μέτρο του, που βρίσκεται στη δεξιά στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

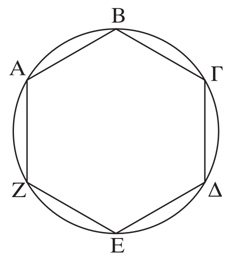
Πίνακας (Ι)

στήλη Α **διάνυσμα**	**στήλη Β** **μέτρο**
1. $(1, -1)$ **2.** $(2ημθ, 2συνθ)$ **3.** $(\sqrt{2}, 1)$ **4.** $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	**Α.** 2 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 3 **Ε.** $\sqrt{3}$ **Ζ.** $\sqrt{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

9. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB}$	**Α.** $\overrightarrow{Z\Delta}$
2. $\overrightarrow{A\Gamma}$	**Β.** $\overrightarrow{A\Gamma}$
3. $\overrightarrow{\Gamma B}$	**Γ.** $\overrightarrow{B\Delta}$
4. $\overrightarrow{AE}$	**Δ.** $\overrightarrow{E\Delta}$
	Ε. $\overrightarrow{EZ}$
	Ζ. $\overrightarrow{\Gamma Z}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

10. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \widehat{\ \vec{\gamma}}) = \pi$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (Ι) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

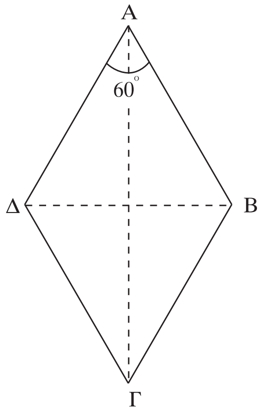
Πίνακας (Ι)

στήλη Α **εσωτερικό γινόμενο**	**στήλη Β** **τιμή**
	Α. - 1
1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	**Β.** 0
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$	**Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$	**Δ.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Ε. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

11. * Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με γωνία Α = 60° και πλευρά 6 cm. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



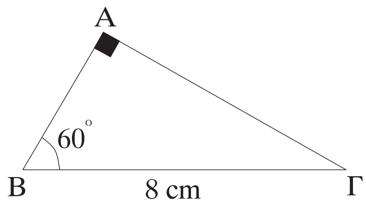
Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	**Α.** 18
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$	**Β.** 36
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	**Γ.** 0
4. $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	**Δ.** - 36
	Ε. - 18
	Ζ. $18.\sqrt{3}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

12. * Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και έχει γωνία Β = 60°. Αν η υποτείνουσά του ΒΓ είναι 8 cm. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$	**Α.** - 16
2. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$	**Β.** $16\sqrt{3}$
3. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$	**Γ.** 16
	Δ. 0
	Ε. - $16\sqrt{3}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ σε μια σειρά, ώστε καθένα να έχει μικρότερο μέτρο από το επόμενό του, αν $\vec{\alpha} = (3, 0)$, $\vec{\beta} = (1, -3)$, $\vec{\gamma} = (\frac{3}{2}, 1)$, $\vec{\delta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.

2. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$

3. * Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\gamma} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{\delta} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$. Να τα γράψετε σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διευθύνσεως καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διευθύνσεως του επομένου του.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	**μέτρο διανύσματος**	**γωνία ($\vec{Ox}$, $\vec{\alpha}$)**
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$		

2. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα σε καθεμιά από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

	Διανύσματα	**τιμή του x**
1.	$\vec{u} = (3, -5)$ και $\vec{v} = (10, x)$	
2.	$\vec{u} = (x, 4)$ και $\vec{v} = (2, -1)$	
3.	$\vec{u} = (3x, -3)$ και $\vec{v} = (x, 4)$	

3. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		Σχετική θέση του $\vec{\alpha}$ ως προς τους άξονες x΄x, ψψ΄, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση του $\vec{\beta}$ ως προς τους άξονες x΄x, ψψ΄, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)
$\vec{\alpha}$	$\vec{\beta}$			
(2, 0)	(0, - 3)			
(2, 2)	(- 3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		μέτρο: $\lvert\vec{\alpha}\rvert$	μέτρο: $\lvert\vec{\beta}\rvert$	εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\ \vec{\beta}$
$\vec{\alpha}$	$\vec{\beta}$			
(- 1, 4)	(2, - 3)			
(3, 2)	$(-1, \sqrt{2})$			
$(1, \sqrt{3})$	(1, 1)			
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

   α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$

   β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ΄ είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

   $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

   α) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta})$

   β) $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

6. ** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του

β) $\overrightarrow{ΜΝ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΔΓ})$

7. ** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\overrightarrow{ΑΒ}^2 + \overrightarrow{ΑΓ}^2 = \overrightarrow{ΒΓ}^2$ και αντιστρόφως:

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{ΑΒ}^2 + \overrightarrow{ΑΓ}^2 = \overrightarrow{ΒΓ}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

8. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{ΑΒ}^2 = \overrightarrow{ΒΓ}\,.\,\overrightarrow{ΒΔ}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{ΑΒ}^2 = \overrightarrow{ΒΓ}\,.\,\overrightarrow{ΒΔ}$ να αποδείξετε ότι Α = 90°.

9. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ}^2 = \overrightarrow{ΓΔ}\,.\,\overrightarrow{ΔΒ}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ}^2 = \overrightarrow{ΓΔ}\,.\,\overrightarrow{ΔΒ}$ τότε να αποδείξετε ότι Α = 90°.

10. ** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

α) $\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{ΑΓ}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{ΑΜ}\right|^2 + \frac{\left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|^2}{2}$

β) $\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2 - \left|\overrightarrow{ΑΓ}\right|^2 = 2\,\overrightarrow{ΔΜ}\,.\,\overrightarrow{ΓΒ}$, όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.

11. ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{5}{2}(\vec{α} + \vec{β}) - \frac{1}{2}[\vec{α} - 3(2\vec{α} - 2\vec{β} + 6\vec{γ}) + 4(3\vec{α} - \vec{β} - \vec{γ})] - \frac{1}{2}\vec{β} - 10\vec{γ}$$

12. ** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του, Μ το μέσον του ΚΓ. Δείξτε ότι:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$

13. ** Αν ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 6\overrightarrow{B\Gamma}$

14. ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει:

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

15. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$. Να αποδειχτεί ότι:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

16. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$

17. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$

18. ** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

19. ** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

20. ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, - 7)$, $\vec{\gamma} = (- 2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:
$\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$

21. ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1 (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $M_2 (\alpha, - \beta)$ και $M_3 (\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ είναι συνευθειακά.

22. ** Δίνονται τέσσερα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε τα Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overrightarrow{O\Gamma} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in R$ τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

23. ** Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και A_1, B_1, Γ_1. Αν G και G_1 είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα των τριγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι:

α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$

24. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
$\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma\Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma\Gamma}$

25. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει
$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

26. ** Να αποδείξετε ότι αν:

$(\kappa + 2)\,\overrightarrow{PA} + 3\,\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\,\overrightarrow{P\Gamma}$ τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

27. ** Εάν $2\,\overrightarrow{A\Lambda} + 3\,\overrightarrow{B\Lambda} + 2\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα.

28. ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

29. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in R$

30. ** Δίνονται τα σημεία Α (5, - 1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

31. ** Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο Μ του x΄x, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το Μ

β) ορθογώνιο στο Μ

32. ** Να εξετάσετε αν τα σημεία Α (- 6, 1), Β (- 2, 3) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

33. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} = (\chi, \psi)$ έτσι ώστε να είναι:

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha} + \vec{u} = \vec{\beta}$

γ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha}$, $\kappa \in R$

δ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in R$

ε) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{u} = 0$

34. ** Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

β) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{\alpha}|$

35. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (3, 0) και Β (1, 2) και G (3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

36. ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 75°$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135°$

37. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

38. ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

39. ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

40. ** Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45°$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$.

41. ** Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\left|\text{συν}\frac{\theta}{2}\right|$.

42. ** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

43. ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{12}$.

44. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

45. ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

46. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

47. ** Αν $\vec{x} + (\vec{x}\,.\,\vec{\alpha}).\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{\alpha}\,\vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x}\,.\,\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}.\vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha}.\vec{\beta}}$.

48. ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha}\right|.\left|\vec{\beta}\right|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $Α = 6x - 8ψ$ αν $x^2 + ψ^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $\left|6.ημx - 8.συνx\right| \leq 10$

49. ** Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$.

50. ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}.\vec{x}}{\vec{\beta}^2}.\vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

51. ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \dfrac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\,\vec{\alpha}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta}\,.\,\vec{\alpha}).\vec{\gamma} - (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$

γ) $\vec{\beta} - \dfrac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\,\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$

52. ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} // \vec{\alpha}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

53. ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{\alpha} - \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

54. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$(\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}) \perp (\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta})$ για κάθε κ, $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{\alpha}| = 2$.

55. ** Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sqrt{3}$

56. ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1.	Λ	13.	Σ	25.	Σ	37.	Σ
2.	Λ	14.	Λ	26.	Λ	38.	Σ
3.	Σ	15.	Σ	27.	Σ	39.	Λ
4.	Λ	16.	Σ	28.	Σ	40.	Λ
5.	Σ	17.	Σ	29.	Σ	41.	Σ
6.	Λ	18.	Λ	30.	Σ	42.	Σ
7.	Σ	19.	Λ	31.	Σ	43.	Λ
8.	Σ	20.	Σ	32.	Λ	44.	Λ
9.	Σ	21.	Σ	33.	Σ	45.	Λ
10.	Λ	22.	Λ	34.	Σ	46.	Λ
11.	Σ	23.	Σ	35.	Λ	47.	Λ
12.	Σ	24.	Λ	36.	Σ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. α)	Δ	4.	Δ	12.	Β	20.	Α
β)	Ε	5.	Ε	13.	Δ	21.	Δ
2. α)	Γ	6.	Δ	14.	Α	22.	Α
β)	Δ	7.	Ε	15.	Γ	23.	Γ
γ)	Ε	8.	Ε	16.	Δ	24.	Δ
δ)	Ε	9.	Ε	17.	Γ	25.	Ε
3.	Δ	10.	Γ	18.	Β	26.	Β
		11.	Β	19.	Ε	27.	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Β
2	Ε
3	Α
4	Γ

2.

1	Β
2	Γ
3	Δ
4	Ε

3.

1	Β
2	Ε
3	Α
4	Γ

4.

1	Γ
2	Δ
3	Ζ
4	Η

5.

1	Ζ
2	Γ
3	Ε
4	Η

6.

1	Γ
2	Δ
3	Β
4	Α

7.

1	Δ
2	Β
3	Ε
4	Ζ

8.

1	Ζ
2	Α
3	Ε
4	Γ

9.

1	Δ
2	Α
3	Ε
4	Γ

10.

1	Ε
2	Α
3	Δ

11.

1	Γ
2	Α
3	Δ
4	Ε

12.

1	Δ
2	Γ
3	Α

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

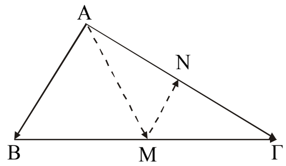
1. $\vec{\delta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

2. $\vec{\alpha}.\vec{\delta}$, $\vec{\beta}.\vec{\delta}$, $\vec{\gamma}.\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}.\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$

3. $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\delta}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$ όπου $\overrightarrow{A\Delta}$ η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ και $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{A\Delta}$.



β) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\Gamma N} - \overrightarrow{\Gamma M} = \dfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Gamma B}) = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}$

2. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B'} = 2\,\overrightarrow{MM'}$

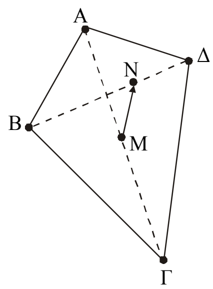
3. α) $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{NA}$ (1)

$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\,\overrightarrow{N\Gamma}$ (2)

Ακόμη: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = 0$ (3)

Από (1), (2) με πρόσθεση και λόγω της (3) προκύπτει η (α).

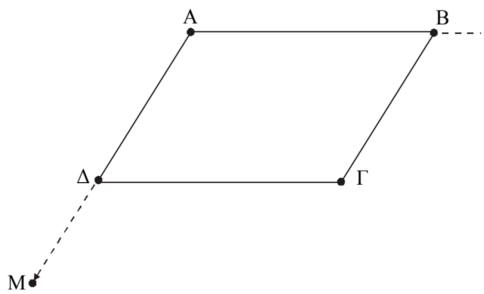
β) Πρόσθεση των (1), (2).



4. $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

$\overrightarrow{\Gamma N} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$,

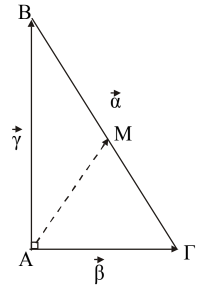
άρα $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma N}$.



5. Αν $\hat{A} = 1^{\llcorner}$ τότε $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0$

Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,(\vec{\beta} + \vec{\gamma})$, άρα $4\,\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}^{\,2} + \vec{\gamma}^{\,2} = \vec{\alpha}^{\,2}$,

άρα $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|$.



6. Έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \kappa\vec{\alpha}$.

Τότε $2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} + \vec{\alpha} + \overrightarrow{M\Delta} + \kappa\vec{\alpha} = (\kappa + 1)\,\vec{\alpha}$,

άρα $\overrightarrow{MN} = \frac{\kappa+1}{2}\,\vec{\alpha}$, δηλαδή $\overrightarrow{MN} \,//\, \overrightarrow{AB}$.

7. Αφού $\hat{A} = 1^{\llcorner}$ άρα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$. Ακόμη $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$,

άρα $|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$.

8. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$ (1) $\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$ (2)

Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων

$\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$

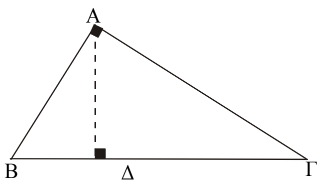
9. Ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$ (1)

και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (2)

και $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta B} = 0$, $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 0$

και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.



10. α) Ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\,\overrightarrow{AM}$ (1)

Ακόμη $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\Gamma B}$ (2)

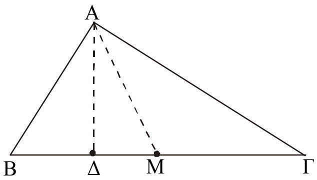
Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη.

β) Ισχύουν $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ (1)

$\vec{A\Gamma} = \vec{AM} + \vec{M\Gamma}$ (2)

ενώ $\vec{AM} \cdot \vec{MB} = - \vec{AM} \cdot \vec{M\Gamma}$ (3)

και $\vec{AM} \cdot \vec{M\Gamma} = \vec{M\Gamma} \cdot \vec{M\Delta} = \dfrac{\vec{B\Gamma}}{2} \cdot \vec{M\Delta}$ (4)



Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

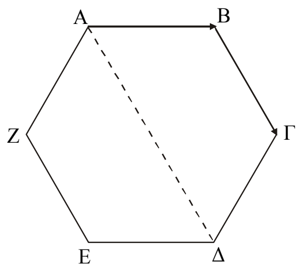
12. $\vec{AB} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma}$ και $\vec{AM} = \dfrac{3}{4} \vec{A\Gamma}$

13. α) Ισχύει $\vec{A\Delta} = 2\vec{B\Gamma} = 2\vec{\beta}$, άρα

$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Gamma B} + \vec{BA} + \vec{A\Delta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

και $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$

β) Ισχύει $\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{A\Delta} = 2\vec{\beta}$, $\vec{AE} = \vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{\beta} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ και πρόσθεση όλων κατά μέλη.



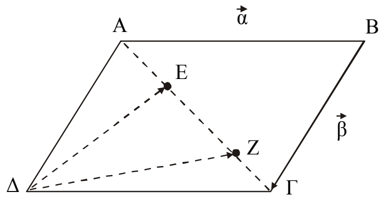
14. $\vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta}$

15. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Delta} + 2\vec{AB} = (\vec{PB} + \vec{BA}) + \vec{PB} + (\vec{P\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}) + 2\vec{AB} = 2\vec{PB} + \vec{P\Gamma} + \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ αφού $\vec{P\Gamma} = -2\vec{PB}$ και $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ λόγω παραλληλογράμμου.

16. $2\vec{K\Lambda} = \vec{K\Delta} + \vec{K\Gamma} = \vec{KA} + \vec{A\Delta} + \vec{KB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma}$

17. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$, άρα $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{AP}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP}$ (1)

Άρα το Ρ βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΜ και λόγω της (1) είναι το κέντρο βάρους.



18. α) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta} - \frac{3}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

β) $\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma Z} = -\vec{\beta} - [-\frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = \overrightarrow{\Delta E}$

19. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} - 3\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ άρα $2(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P\Gamma}) = 3(\overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{PB})$, δηλαδή $\overrightarrow{\Gamma A} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

21. $\overrightarrow{M_1M_2} = (-b, -a)$, $\overrightarrow{M_2M_3} = (2b, 2a)$, ;ara $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{M_2M_3}$

22. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ άρα $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$, δηλαδή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{AB}$.

23. α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} =$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{\Gamma G} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$

αφού $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$

β) Με βάση την (α), αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$, δηλαδή συμπίπτουν τα G, G_1.

24. $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} = 2\vec{\Sigma K}$, $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma \Gamma} = 2\vec{\Sigma \Lambda}$, $\vec{\Sigma B} + \vec{\Sigma \Gamma} = 2\vec{\Sigma M}$
και πρόσθεση κατά μέλη.

25. α) $\vec{\Delta Z} = \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = \frac{4}{5}\vec{A\Gamma} - \frac{2}{3}\vec{AB}$

$\vec{\Delta E} = \vec{BE} - \vec{B\Delta} = 2(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) + \frac{1}{3}\vec{AB} = 2\vec{A\Gamma} - \frac{5}{3}\vec{AB}$

β) Ισχύει $\vec{\Delta E} = \frac{5}{2}\vec{\Delta Z}$, άρα $\vec{\Delta E} \,//\, \vec{\Delta Z}$.

26. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\kappa + 2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 2)\vec{P\Gamma} + 3\vec{P\Gamma}$, άρα $(\kappa + 2)\vec{\Gamma A} = 3\vec{B\Gamma}$, άρα $\vec{\Gamma A} \,//\, \vec{B\Gamma}$.

27. $3\vec{B\Lambda} = 3\vec{BA} + 3\vec{A\Lambda}$, $2\vec{MB} = 2\vec{MA} + 2\vec{AB}$ και $\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK}$, οπότε η δοσμένη γίνεται:

$5\vec{A\Lambda} + 3\vec{MA} - 2\vec{AK} = \vec{0}$ ή $3\vec{A\Lambda} + 2\vec{A\Lambda} + 3\vec{MA} - 2\vec{AK} = \vec{0}$,

άρα $3\vec{M\Lambda} = 2\vec{\Lambda K}$, άρα $\vec{K\Lambda}$, $\vec{M\Lambda}$ αντίρροπα.

28. Έστω Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) , τότε το μέσο Μ του ΑΒ έχει τετμημένη $\frac{x_1 + x_2}{2} = 7$, άρα $x_1 + x_2 = 14$, όμως x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, άρα $\lambda^2 - 5\lambda + 20 = 14$, δηλαδή $\lambda = 3$ ή $\lambda = 2$.

30. $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ $\overrightarrow{B\Gamma} = (-1, -2)$ $\overrightarrow{A\Gamma} = (-3, 4)$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β.

31. Έστω Μ (x, 0) το ζητούμενο σημείο. Τότε:

α) $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, άρα $(x - 3)^2 + 4 = (x - 7)^2 + 16$

β) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

35. Αν (x, y) το ζητούμενο σημείο, τότε ισχύει: $\dfrac{3+1+x}{3} = 3$ και $\dfrac{0+2+y}{3} = 2$.

37. α) $2\sqrt{3}$ β) 12 γ) $12 + 4\sqrt{3}$

δ) $\sqrt{12+4\sqrt{3}}$ ε) $8\vec{\alpha}^{\,2} - 15\vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta}$

38. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + \vec{\gamma}^{\,2} + 2\,(\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma})$

40. Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε:

συνω $= \dfrac{(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}}{\left|\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\alpha}\right|}$, αλλά $(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \vec{\alpha}^{\,2} = 4 - 4 = 0$,

άρα συνω = 0, δηλαδή ω $= \dfrac{\pi}{2}$.

41. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 = \vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 2 + 2$συνθ $= 2\,(1 +$ συνθ$) = 4$συν$^2 \dfrac{\theta}{2}$, άρα

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = 2\left|\text{συν}\dfrac{\theta}{2}\right|$.

42. Ισχύουν $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$, $\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$ και $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\,\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 4$

44. $3\vec{v} - 5\vec{u} = (22, -24)$, αν $\vec{w} = (x, y)$, τότε πρέπει $22x - 24y = 0$ (1)

δηλαδή υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec{w}$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

45. $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \frac{1}{2}$ και ισχύει: $\vec{x} = \kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\,(\vec{\alpha} + \vec{x}) = 0$, άρα $\vec{\beta}\,\vec{\alpha} + \vec{\beta}\,\vec{x} = 0$,

δηλαδή $\frac{1}{2} + \vec{\beta}\,[\kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = 0$, άρα $\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa = 0$, οπότε $\kappa = -\frac{1}{3}$.

46. Έστω $\vec{\beta}_1 = (x_1, y_1)$ και $\frac{1}{2}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ οι συνιστώσες. Τότε ισχύει:

$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}$ (1), $\quad \vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 = 0$ (2) $\quad$ και $\quad \vec{\beta}_2 \,//\, \vec{\alpha}$ (3)

οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ y_1 + y_2 &= 10 \\ x_1x_2 + y_1y_2 &= 0 \\ x_2 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα δίνει για λύση $x_2 = y_2 = \frac{15}{2}$ και $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = \frac{5}{2}$.

47. Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\vec{\alpha}$.

48. α) $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| = \left|\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot συνω\right| = \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|συνω\right| \le \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ όπου ω η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Τότε $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 6x - 8y$, άρα από το (α) ισχύει $|6x - 8y| \le 6\cdot 10$, άρα $-60 \le A \le 60$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (ημx, συνy)$. Τότε $\left|\vec{\beta}\right| = 1$, άρα $|6ημx - 8συνy| \le 6 < 10$.

49. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})\,\overrightarrow{AM} = 0$, όμως $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\,\overrightarrow{A\Delta}$ (ΑΔ διάμεσος), άρα ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$, δηλαδή $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{A\Delta}$, άρα το Μ κινείται σε ευθεία κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α.

50. $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^{2}}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\beta} - \vec{x}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{\beta} = 0$

54. α) $(\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta})(\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}) = 0$, οπότε για $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$.

β) Για $\kappa = \lambda = 1$ προκύπτει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{\alpha}^{2} - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^{2} = 0$ και με βάση την (α) $\vec{\beta}^{2} = 2$ ή $\left|\vec{\beta}\right| = \sqrt{2}$.

55. Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε:

$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$

$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\beta}^2$ δηλαδή

$2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = -\vec{\alpha}^2 = -\vec{\beta}^2$, άρα

$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \vec{\alpha} + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}^2 = 3\vec{\alpha}^2$

56. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma}) = 0$, άρα

$\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = -19$.

Κεφάλαιο 2ο: **ΕΥΘΕΙΑ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**
2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) ορίζεται πάντα ως $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. **Σ** **Λ**
3. * Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_1, y_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν. **Σ** **Λ**
4. * Υπάρχουν δύο ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυν-σης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. **Σ** **Λ**
5. ** Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$. **Σ** **Λ**
6. * Οι ευθείες $2x + y = 1$ και $x - 2y = 1$ τέμνονται. **Σ** **Λ**
7. * Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται. **Σ** **Λ**
8. * Οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλ-ληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$. **Σ** **Λ**
9. * Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $4x - 2y + 5 = 0$ είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**
10. * Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων x΄x, y΄y έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ και τέμνονται κάθετα. **Σ** **Λ**
11. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες. **Σ** **Λ**
12. * Οι ευθείες $5x + y = 1$ και $x - 5y - 1 = 0$ είναι κάθετες. **Σ** **Λ**
13. * Τα σημεία Α (- 2, - 1), Β (1, 4) και Γ (- 4, 2) είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

14. * Τα σημεία Α (κ, α), Β (λ, α), Γ (μ, α) είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

15. ** Τα σημεία Α (α + β, γ), Β (β + γ, α), Γ (γ + α, β) είναι συνευθειακά αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. **Σ** **Λ**

16. * Η ευθεία που περνά από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) έχει εξίσωση: $y - y_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ με $(x_1 \neq x_2)$. **Σ** **Λ**

17. * Από το σημείο Α (x_0, y_0) περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ. **Σ** **Λ**

18. * Η ευθεία που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 4$, έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x - 1)$. **Σ** **Λ**

19. * Η ευθεία ΑΒ με Α (1, - 4) και Β (- 1, - 5) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \dfrac{1}{2}x + 3$. **Σ** **Λ**

20. ** Δίνονται τα σημεία Α (- 3, - 1), Β (2, 2), Γ (- 3, 4) και Δ (3, - 6). Η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ. **Σ** **Λ**

21. ** Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (1, 1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ίση με 135° είναι $x + y = 0$. **Σ** **Λ**

22. * Η ευθεία $\dfrac{x}{\beta} + \dfrac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α (α, 0) και Β (0, β). **Σ** **Λ**

23. * Η ευθεία $2y - 3x + 4 = 0$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(\frac{4}{3}, 0)$. **Σ** **Λ**

24. * Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_0$. **Σ** **Λ**

25. * Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $x + y = 0$ με τον άξονα x΄x είναι 45°. **Σ** **Λ**

26. ** Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0$ με τον άξονα x΄x είναι 120°. **Σ** **Λ**

27. * Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας. Σ Λ

28. ** Αν Α ≠ Β, τότε η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει πάντοτε ευθεία. Σ Λ

29. ** Στην ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει Β = 0. Σ Λ

30. * Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή Αx + Βy = 0. Σ Λ

31. * Το διάνυσμα $\vec{n} = (-2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία x + y + 2 = 0. Σ Λ

32. * Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$. Σ Λ

33. * Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, -B)$. Σ Λ

34. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ Λ

35. ** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ με Β ≠ 0 έχει εξίσωση της μορφής: Αx + Βy + Γ = 0. Σ Λ

36. * Η απόσταση του σημείου M_0 (x_0, y_0) από την ευθεία (ε): Αx + Βy + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \dfrac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Σ Λ

37. * Η απόσταση d (M_0, ε) του σημείου M_0 (x_0, y_0) από την ευθεία (ε): Αx + Βy + Γ = 0 επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon)\sqrt{A^2 + B^2}$. Σ Λ

38. * Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$. Σ Λ

39. * Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ

40. * Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x για κάθε κ ≠ 0. Σ Λ

41. * Η ευθεία x + λ (x - y) - λ = 0 τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ. **Σ** **Λ**

42. ** Οι ευθείες $ε_1$: y = 2x + 1, $ε_2$: y = 2x - 1, $ε_3$: x + 2y + 1 = 0 και $ε_4$: x + 2y + 2 = 0 τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **Σ** **Λ**

43. ** Η απόσταση των ευθειών $ε_1$: $y = λx + β_1$ και $ε_2$: $y = λx + β_2$ δίνεται από τον τύπο: $d\,(ε_1, ε_2) = \dfrac{|β_1 - β_2|}{\sqrt{1 + λ^2}}$. **Σ** **Λ**

44. * Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία ε΄ : x + 3 = 0 και περνά από το σημείο (3, 2), είναι y = 3. **Σ** **Λ**

45. * Οι ευθείες 2x - 3y = 11 και 4y + 3x + 9 = 0 έχουν κοινό σημείο το (- 1, 3). **Σ** **Λ**

46. Η ευθεία y = λx + 3 έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα x΄x για κάθε $λ \in R$. **Σ** **Λ**

47. * Αν οι ευθείες (μ + 1) x - y = 0 και 3x + y - 7 = 0 είναι παράλληλες, τότε μ = 2. **Σ** **Λ**

48. ** Οι ευθείες $ε_1$: 7x + 3y + 2 = 0 και $ε_2$: 2x + 5y - 3 = 0 είναι κάθετες. **Σ** **Λ**

49. * Η εξίσωση xy = x παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου. **Σ** **Λ**

50. * Το σημείο Α (ημθ, 0) με $θ = \dfrac{π}{7}$ ανήκει στην ευθεία 2x + κy = 3. **Σ** **Λ**

51. * Η απόσταση των παράλληλων ευθειών y = x και y = x + 1 είναι 1. **Σ** **Λ**

52. ** Η εξίσωση y = x + β με $β \in R$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία y = x. **Σ** **Λ**

53. * Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις 3x - y = 4, y = - 5x - 4, y = 3x + 5. **Σ** **Λ**

54. ** Η συμμετρική της ευθείας y = 3x ως προς τον άξονα x΄x έχει εξίσωση y = 3x + 3. **Σ** **Λ**

55. ** Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές

Α (5, 1), Β (6, 3) και Γ (2, 2) είναι $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$. Σ Λ

56. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x + 5y = 10$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι 5 τ.μ. Σ Λ

57. ** Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών: $(x + y + 1) + \lambda (3x - 2y - 4) = 0$ περνούν από το σημείο (2, 1). Σ Λ

58. * Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. Σ Λ

59. ** Η εξίσωση της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{\nu} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{\nu} = (x, y)$. Σ Λ

60. * Οι ευθείες $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $A_1 . A_2 = B_1 . B_2$. Σ Λ

61. * Αν Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου και (ΑΒΓ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 2\,(AB\Gamma)$ ή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = -2\,(AB\Gamma)$. Σ Λ

62. ** Τα σημεία Α (1, 1), Β (- 1, 1) και Γ (1, - 1) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. Σ Λ

63. * Για την απόσταση d (Α, ε) του σημείου Α από την ευθεία ε ισχύει d (Α, ε) = 0. Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε. Σ Λ

64. * Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. Σ Λ

65. * Η εξίσωση $y = |x|$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ** Αν η εξίσωση με δύο αγνώστους $f(x, y) = 0$ (1) είναι εξίσωση μιας γραμμής C, τότε

Α. οι συντεταγμένες μόνο μερικών σημείων της C επαληθεύουν την (1)

Β. οι συντεταγμένες των σημείων της C δεν επαληθεύουν την (1)

Γ. το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την (1) δεν ανήκει στην C

Δ. όλα τα σημεία που επαληθεύουν την (1) ανήκουν στην C

Ε. υπάρχουν σημεία της C των οποίων οι συντεταγμένες δεν επαληθεύουν την (1)

2. ** Δίνεται ένα σημείο Μ μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (3, -4)$. Ξεκινώντας από το σημείο Μ θα ξαναβρεθούμε σε σημείο της ευθείας, όταν

Α. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες κάτω

Β. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες πάνω

Γ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες δεξιά

Δ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες αριστερά

Ε. κινηθούμε 3 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες πάνω

3. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον x΄x ισούται

Α. με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Β. με την εφαπτομένη της συμπληρωματικής γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Γ. με το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος κάθετου στην (ε)

Δ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x

Ε. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με το θετικό ημιάξονα Oy

4. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας 7 + 3y = - 4x είναι

Α. - 4 **Β.** 7 **Γ.** $-\frac{4}{3}$ **Δ.** $-\frac{7}{3}$ **Ε.** $-\frac{3}{4}$

5. * Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$. Μια άλλη ευθεία (ε΄), που είναι κάθετη στην (ε), έχει συντελεστή διεύθυνσης

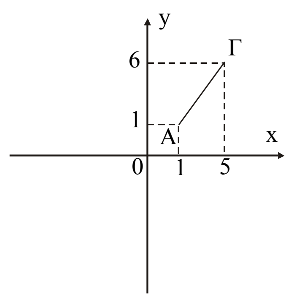
Α. $-\frac{3}{2}$ **Β.** $-\frac{2}{3}$ **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** $\frac{3}{2}$ **Ε.** - 1

6. * Μια ευθεία (ε) έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$ και διέρχεται από τη σημείο (- 1, 3). Η εξίσωσή της είναι

Α. $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$ **Β.** $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$ **Γ.** $x + 1 = \frac{1}{2}(y - 3)$

Δ. $x - 3 = \frac{1}{2}(y + 2)$ **Ε.** καμία από τις παραπάνω

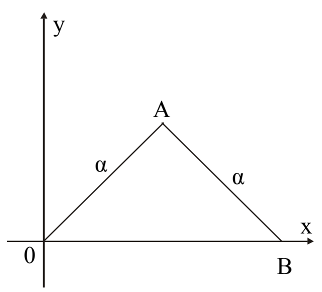
7. * Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι



Α. $\frac{6}{5}$ **Β.** $\frac{5}{4}$ **Γ.** $\frac{4}{5}$

Δ. $\frac{2}{3}$ **Ε.** $\frac{5}{6}$

8. * Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}\,x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με



Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45°

Δ. 90° **Ε.** 135°

9. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον y΄y ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** εφ $\frac{\pi}{4}$ **Ε.** δεν ορίζεται

10. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

Α. $y_1 \neq y_2$ **Β.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$

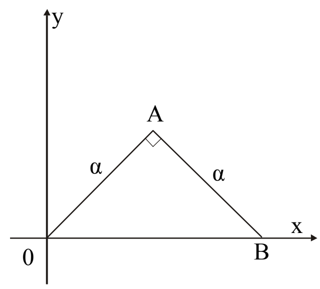
Γ. $x_1 \neq - x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **Ε.** $x_1 \neq x_2$

11. ** Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει πάντα ευθεία με

Α. Α = 0 και Β = 0 **Β.** Α = 0 ή Γ ≠ 0

Γ. $Α^2 + Β^2 \geq 0$ **Δ.** $|Α| + |Β| > 0$ **Ε.** $|Α| + |Β| < 0$

12. * Στο διπλανό σχήμα η γωνία ΟΑΒ είναι ορθή, α ≠ 1 και Β (β, 0). Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι



Α. $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ **Β.** $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ **Γ.** $y = \sqrt{\alpha}\,x$

Δ. y = αβx **Ε.** y = x

13. * Το κοινό σημείο του άξονα x΄x και της ευθείας ΑΒ με Α (0, 4) και Β (1, 5) είναι

Α. (4, 0) **Β.** (0, 0) **Γ.** (5, 0) **Δ.** (- 4, 0) **Ε.** (0, - 3)

14. * Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (1, - 1) και είναι παράλληλη στην ευθεία 2x + 6y = 1 είναι

Α. $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ **Β.** $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ **Γ.** $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

Δ. $y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ **Ε.** $y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$

15. * Αν Α (1, 3) και Β (- 2, 4), τότε η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

Α. $y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ **Β.** $y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 2)$ **Γ.** $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$

Δ. $y = -\frac{1}{3}x + 4$ **Ε.** $3y + x + 10 = 0$

16. ** Η ευθεία $y = \lambda x + 3$

Α. είναι κάθετη στον x΄x για κάποια τιμή του $\lambda \in R$

Β. είναι κάθετη στον y΄y για κάποια τιμή του $\lambda \in R$

Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\frac{1}{\lambda}, 5)$

Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων

Ε. για $\lambda = 1$ είναι κάθετη στην $y = x$

17. ** Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

Α. τέμνονται για κάθε $\lambda \in R$

Β. είναι και οι δύο κάθετες στην $y = -x$

Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = -1$

Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$

Ε. τέμνονται στο σημείο (- 1, 0) για $\lambda = 2$

18. ** Το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (- 2, 3) είναι κάθετο στην ευθεία

Α. $2x - 3y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 1 = 0$ **Γ.** $3x + 2y + 1 = 0$

Δ. $3x - 2y + 1 = 0$ **Ε.** $3x - 2y - 1 = 0$

19. ** Έστω (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:

Α. το διάνυσμα $\vec{\nu} = (B, A)$ είναι κάθετο στην (ε)

Β. το διάνυσμα $\vec{\nu} = (A, - B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Γ. το διάνυσμα $\vec{\nu} = (- B, A)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Δ. το διάνυσμα $\vec{\nu} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Ε. το διάνυσμα $\vec{\nu} = (- A, B)$ είναι κάθετο στην (ε)

20. * Η ευθεία που περνά από το σημείο (- 1, 5) και είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{3}x - 7$ έχει εξίσωση

Α. $y = - 3x + 7$ **Β.** $y + 1 = - 3 (x - 5)$ **Γ.** $y - 5 = - 3 (x + 1)$

Δ. $y - 5 = 3 (x + 1)$ **Ε.** $y + 1 = 3 (x + 5)$

21. * Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ με Α (1998, 0), Β (0, 1998) είναι

Α. $1998x - 1998y = 0$ **Β.** $1998y + 1998x = 1$ **Γ.** $\frac{x}{1998} + \frac{y}{1998} = 1$

Δ. $1998x - 1998y = 1$ **Ε.** $y = 1998x + 1998$

22. * Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α (3, 5) και Β (- 1, 8). Η προβολή του ΑΒ στον άξονα x΄x έχει μήκος

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** - 1 **Δ.** 8 **Ε.** 4

23. ** Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v}$ = (α, β) με αβ ≠ 0. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

Α. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$ **Β.** $y - y_0 = \beta (x - x_0)$ **Γ.** $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$

Δ. $y = \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0)$ **Ε.** $y - y_0 = - \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0)$

24. ** Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία είναι

Α. $y = |\lambda| x - 2$ **Β.** $y = 2$ **Γ.** $y = 3x + 2$

Δ. $y = |\lambda| x + \beta$ με $\lambda < 0$ **Ε.** η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$

25. ** Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα Α (α, 0), Β (0, β) αντίστοιχα με α = 2β. Τότε

Α. η (ε) σχηματίζει γωνία 60° με τον x΄x

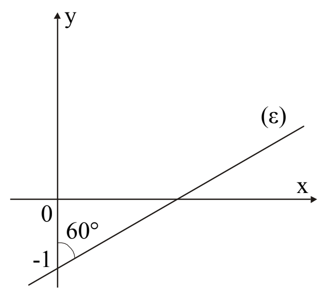
Β. η (ε) σχηματίζει γωνία 90° με τον x΄x

Γ. η (ε) σχηματίζει γωνία οξεία με τον x΄x

Δ. η (ε) σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον x΄x

Ε. ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\frac{1}{2}$

26. ** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει εξίσωση



Α. $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 1$ **Β.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 1$

Γ. $y = \frac{1}{2} x + 1$ **Δ.** $y = \frac{1}{2} x - 1$

Ε. $y = \sqrt{3} x + 1$

27. * Αν το σημείο (3, κ) ανήκει στην ευθεία (ε) $\frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 1$, τότε

Α. κ = 0 **Β.** κ = 2 **Γ.** κ = 3 **Δ.** κ = 5 **Ε.** κ = 1

28. * Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει

Α. μια ευθεία κάθετη στον x΄x

Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy

Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx΄

Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx΄

Ε. μια ευθεία κάθετη στον y΄y

29. ** Δίνονται τα σημεία Α (8, 1), Β (7, 3), Γ (4, 5). Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ είναι

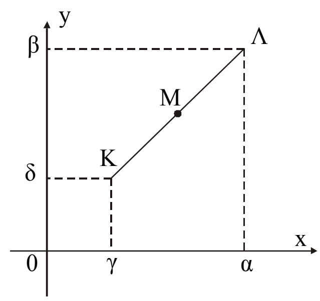
Α. $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$ **Β.** $y - 5 = 2(x + 4)$ **Γ.** $y - 5 = -2(x - 4)$

Δ. $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες

30. * Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (- 8, 4) και Β (- 6, - 2) είναι

Α. (1, - 7) **Β.** (3 ,- 1) **Γ.** (- 5, - 1) **Δ.** (- 7, 1) **Ε.** (- 1, - 3)

31. * Στο διπλανό σχήμα το μέσο Μ του ΚΛ έχει συντεταγμένες στον άξονα x΄x το σημείο



Α. $(0, \frac{\beta - \delta}{2})$ **Β.** $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\beta - \delta}{2})$

Γ. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, 0)$ **Δ.** $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, 0)$

Ε. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta + \delta}{2})$

32. * Αν Α (1, 3) και Β (5, 3), το συμμετρικό του μέσου του ΑΒ ως προς τον άξονα x΄x είναι το

Α. (2, 3) **Β.** (2 ,- 3) **Γ.** (3, - 3) **Δ.** (- 3, 3) **Ε.** (- 3, - 3)

33. * Δίνονται τα σημεία Α (0, 4) και Β (4, 0). Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΟΑΒ είναι (Ο το σημείο τομής των x΄x, y΄y)

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** - 2 **Ε.** - 4

34. ** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α (0, 0), Β (3, 1), Γ (5 ,3) και Δ (κ, κ). Η τιμή του κ είναι

Α. 3 **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** - 2 **Ε.** - 3

35. * Τα σημεία Α (1, 1), Β (3, 3) και Γ (5, κ) είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι

Α. - 4 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 1

36. * Το σημείο Μ $(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (- 1, - 5). Το σημείο Β είναι το

Α. (0, - 5) **Β.** $(-1, -\frac{19}{2})$ **Γ.** (- 1, 4) **Δ.** (1, - 4) **Ε.** $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$

37. * Δίνεται ευθεία (ε): - 3x + 2y + 1 = 0 και το σημείο Μ (1, - 2). Τότε η απόσταση του Μ από την (ε) είναι

Α. $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ **Β.** $\frac{6}{13}$ **Γ.** $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\frac{6}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{6}}{13}$

38. ** Η απόσταση του σημείου Α (- 1, 1) από την ευθεία αx + βy = 0 με α > β είναι

Α. $\dfrac{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Β.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Γ.** $-\dfrac{|\beta-\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Δ. $\dfrac{|\alpha+\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ **Ε.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha+\beta}$

39. * Τα σημεία Α (α, α + 1), Β (α + 1, α + 2) και Γ (α + 2, α + 3) είναι

Α. συνευθειακά

Β. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

Γ. κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου

Δ. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

Ε. κορυφές ισοσκελούς οξυγωνίου τριγώνου

40. * Τα σημεία Ο (0, 0), Α (κ, 0), Β (0, λ) με κ, λ. > 0 ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

Α. 2κλ **Β.** $\frac{1}{2}$ (κ + λ) κ **Γ.** κλ

Δ. $\frac{1}{2}$ (κ - λ) (κ + λ) **Ε.** $\frac{1}{2}$ κλ

41. * Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές Α (0, 0), Β (α, 0) και Γ (α, β) είναι

Α. $\dfrac{\alpha\beta}{2}$ **Β.** $\dfrac{\alpha|\beta|}{2}$ **Γ.** αβ **Δ.** $\dfrac{|\alpha\beta|}{2}$ **Ε.** $\dfrac{|\alpha|\beta}{2}$

42. * Η απόσταση του σημείου (5, - 1) από την ευθεία 3x - 2y - 2 = 0 είναι

Α. $\dfrac{13\sqrt{15}}{13}$ **Β.** $\dfrac{13\sqrt{13}}{15}$ **Γ.** $\dfrac{15\sqrt{13}}{13}$ **Δ.** $\dfrac{15\sqrt{15}}{13}$ **Ε.** $\dfrac{15\sqrt{13}}{15}$

43. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία 3x + 3y = 6 είναι σε τετραγωνικές μονάδες

Α. $\frac{9}{2}$ **Β.** 9 **Γ.** 4 **Δ.** 2 **Ε.** 1

44. * Το συμμετρικό του σημείου (4, 1) ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων είναι

Α. (- 4, 1) **Β.** (4, - 1) **Γ.** (- 4, - 1) **Δ.** $(2, \frac{1}{2})$ **Ε.** (1, 4)

45. * Οι ευθείες y = 2 και y = $\sqrt{3}$ x - 1 σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με

Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45° **Δ.** 75° **Ε.** 15°

46. * Δυο ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεων τους

Α. έχει άπειρες λύσεις **Β.** έχει μοναδική λύση

Γ. δεν έχει λύση **Δ.** έχει δύο λύσεις

Ε. έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x)

47. * Μια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν

Α. η εξίσωσή της είναι της μορφής y = c

Β. έχει συντελεστή διεύθυνσης 0

Γ. είναι παράλληλη με τον x΄x

Δ. δεν ορίζεται ο συντελεστής της

Ε. έχει εξίσωση y = λx

48. * Η ευθεία λx + y + μ = 0 είναι κάθετη στην y = x. Τότε ο λ είναι ίσος με

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** 2

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία που η εξίσωσή της βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (Ι) με τον συντελεστή της που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ) ($\alpha, \beta \neq 0$).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. ε_1: $y = \alpha x + \beta$	**Α.** 0
2. ε_2: $y = y_0$	**Β.** δεν ορίζεται
3. ε_3: $x = x_0$	**Γ.** 1
4. ε_4: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$,	**Δ.** β
5. ε_5: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	**Ε.** α
	Ζ. $-\frac{\beta}{\alpha}$
	Η. $-\frac{\alpha}{\beta}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

2. ** Η πρώτη στήλη του πίνακα (Ι) περιέχει τους συντελεστές διεύθυνσης κάποιων ευθειών και η δεύτερη τις γωνίες που σχηματίζουν οι ίδιες ευθείες με τον άξονα x΄x. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
	Α. 0
1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$	**Β.** $\frac{\pi}{4}$
2. $-\sqrt{3}$	**Γ.** $\frac{2\pi}{3}$
3. δεν ορίζεται	**Δ.** $\frac{\pi}{6}$
4. -1	**Ε.** $\frac{\pi}{3}$
5. 0	**Ζ.** $\frac{\pi}{2}$
	Η. $\frac{5\pi}{6}$
	Θ. $\frac{3\pi}{4}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

3. ** Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις των ευθειών της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα x΄x της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1). $y = x - 1$	**Α.** 50°
	Β. 45°
2. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$	**Γ.** 135°
	Δ. 30°
3. $y = -x + \alpha$	**Ε.** 120°

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

4. ** Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $y = 2x - 1$	**Α.** $\vec{\delta}_1 = (0, 2)$
	Β. $\vec{\delta}_2 = (2, -1)$
2. $2x + y + 2 = 0$	**Γ.** $\vec{\delta}_3 = (2, 0)$
3. $y = 3$	**Δ.** $\vec{\delta}_4 = (2, 1)$
4. $x = -1$	**Ε.** $\vec{\delta}_5 = (1, -2)$
	Ζ. $\vec{\delta}_6 = (-1, -2)$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

5. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. ε_1**:** $y = x$, ε_2**:** $x = 5$	**Α.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. ε_1**:** $y = 3$, ε_2**:** $y = \sqrt{3}\,x + 5$	**Β.** 0
3. ε_1**:** $x = -2$, ε_2**:** $\sqrt{3}\,x - y = 0$	**Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ. 1
	Ε. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

6. ** Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος γωνίας - σημείου στη στήλη Α του πίνακα (Ι) με την αντίστοιχη ευθεία που ορίζεται από αυτό το ζεύγος και βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $45°$, $(0, 0)$	**Α.** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$
2. $60°$, $(0, 1)$	**Β.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) + 1$
3. $150°$, $(-1, 0)$	**Γ.** $y = x - 1$
4. $30°$, $(1, 1)$	**Δ.** $y = x$
	Ε. $y = \sqrt{3}\,x + 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (Ι) την απόσταση της αρχής των αξόνων από αυτή, που εμφανίζεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $y = 2$	**Α.** 0
2. $x = -3$	**Β.** - 2
3. $2x - y = 0$	**Γ.** 1
4. $3x + 4y - 5 = 0$	**Δ.** 2
	Ε. - 1
	Ζ. 3

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

8. ** Κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (Ι) βρίσκεται σε μια ευθεία της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **σημεία**	**στήλη Β** **ευθείες**
	Α. $x - 3y = 9$
1. (- 1, 2)	
	Β. $3x + y = 15$
2. (0, - 3)	
	Γ. $x + y = 1$
3. (5, 0)	
	Δ. $2x - y = 0$
4. (- 2, - 1)	
	Ε. $x + 2y + 4 = 0$
	Ζ. $y = 5x$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

9. ** Κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (Ι) περιέχει ένα σημείο που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

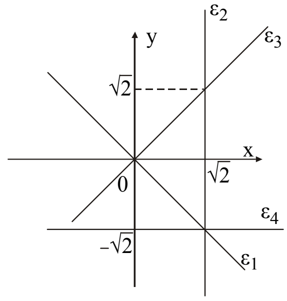
Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y = -3x + 1$	**Α.** (12, 0)
	Β. (0, 12)
	Γ. $(\frac{1}{3}, 0)$
2. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$	
	Δ. $(0, \frac{1}{3})$
3. $x = 2$	**Ε.** (2, 7)
	Ζ. (7, 2)

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

10. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την εξίσωσή της που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
	Α. $y = x$
1. ε_1	**Β.** $x + y = \sqrt{2}$
2. ε_2	**Γ.** $x + y = 0$
3. ε_3	**Δ.** $x = \sqrt{2}$
4. ε_4	**Ε.** $y = \sqrt{2}\, x$
5. $x'x$	**Ζ.** $y = 0$
6. $y'y$	**Η.** $y = -\sqrt{2}$
	Θ. $x = 0$
	Ι. $y = x + \sqrt{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

11. ** Κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (Ι) είναι κάθετη σε μια ευθεία της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

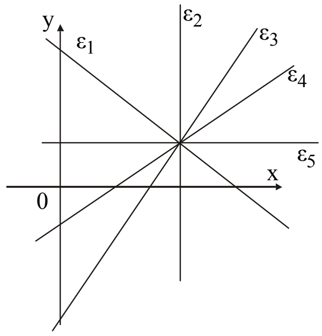
Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y - x = 0$	**Α.** $3x = 2y$
2. $y = 2$	**Β.** $x + 2y = 2$
3. $2x + y = 2$	**Γ.** $x - 2y = 2$
4. $x - \frac{y}{2} = 1$	**Δ.** $x = 2$
	Ε. $y - x = 1$
	Ζ. $x + y = 0$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

12. ** Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) δίνεται ο χαρακτηρισμός του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. αρνητικός	**Α.** ε_1
	Β. ε_2
2. μηδέν	**Γ.** ε_3
	Δ. ε_4
3. δεν ορίζεται	**Ε.** ε_5

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

13. ** Κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (Ι) είναι κέντρο μιας οικογένειας ευθειών από τη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **κέντρο**	**στήλη Β** **εξίσωση οικογένειας ευθειών**
	Α. $(x + 6y - 7) + \lambda\,(2x - 15y + 1) = 0$
1. (2, 1)	
	Β. $(x + y + 1) + \lambda\,(2x - 5y + 7) = 0$
2. (7, 1)	**Γ.** $(x + y - 3) + \lambda\,(2x - y - 3) = 0$
	Δ. $(x + y - 1) + \lambda\,(x + 2y - 3) = 0$
3. (- 1, 2)	
	Ε. $(x + y - 8) + \lambda\,(- x + 2y + 5) = 0$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

14. ** Δίνονται οι ευθείες ε: $y = λx + 7$ και δ: $y = 3x - 1$. Για κάθε τιμή του λ που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (Ι), η ευθεία ε παίρνει μια θέση στο καρτεσιανό επίπεδο που περιγράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**στήλη Β**
1. $λ = -\frac{1}{3}$	**Α.** ε // δ
2. $λ = 3$	**Β.** ε // x΄x
3. $λ = 0$	**Γ.** ε // y΄y
	Δ. $ε \perp δ$
	Ε. ε // διχοτόμος της xOy

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

Ερωτήσεις διάταξης

1. ** Να γράψετε σε μια σειρά τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών:

ε_1: $y = -2x + 5$ **ε_2:** $5x - 3y + 7 = 0$

ε_3: $y = εφ\dfrac{\pi}{3}x + 4$ **ε_4:** παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (2, 7)$

ε_5: κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 1)$ **ε_6:** $y + (ημα)\,x + 5 = 0$

ώστε καθένας να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.

2. ** Δίνονται οι ευθείες:

ε_1: $y = -x + 7$ **ε_2:** $y = \sqrt{3}x + 4$ **ε_3:** $x = 3$

ε_4: $x - y + 3 = 0$ **ε_5:** $x - \sqrt{3}y + 5 = 0$ **ε_6:** $y = 1$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, ώστε κάθε επόμενη να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία μεγαλύτερη από την προηγούμενή της.

3. ** Δίνονται τα σημεία Α (1, 1), Β (2, 3), Γ (- 1, 2) και Δ (- 2, 3). Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερο μήκος.

4. ** Δίνονται οι ευθείες:

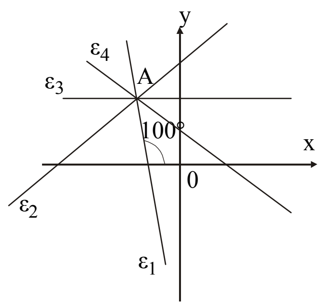
ε_1: $x - 2y - 4 = 0$ **ε_2:** $3x - y + 2 = 0$

ε_3: $2x + 3y - 1 = 0$ **ε_4:** $4x - 5y + 5 = 0$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή διεύθυνσης μεγαλύτερο από την προηγούμενή της.

5. ** Να γραφούν τα σημεία Α (1, 3), Β (- 3, 1) και Γ (2, 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα να απέχει από την ευθεία y = x απόσταση μεγαλύτερη από την απόσταση του προηγούμενού του.

6. ** Στο διπλανό σχήμα να γράψετε σε μια σειρά τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή μικρότερο της προηγούμενής της.



Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

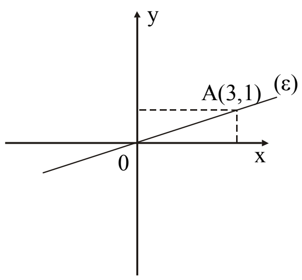
ευθεία	**κλίση ευθείας**	**σχετική θέση ευθείας ως προς x΄x**	**σχετική θέση ευθείας ως προς y΄y**
y = 3			
x = 2			
y = 2x - 1			

2. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Είδος τριγώνου</th><th></th></tr>
<tr><th>κορυφές τριγώνου ΑΒΓ</th><th>ορθογώνιο</th><th>ισοσκελές</th><th>εμβαδόν τριγώνου</th></tr>
<tr><td>Α (- 3, 2)
Β (5, 0)
Γ (- 2 , 6)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α (1, 1)
Β (- 3, 1)
Γ (-1 ,2)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α (0, 2)
Β (3, 0)
Γ (0 ,0)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α (3, 0)
Β (0, 4)
Γ (- 3 , 0)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

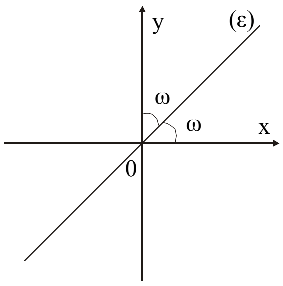
3. * Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) που υπάρχει σε καθένα από τα επόμενα σχήματα:

α)



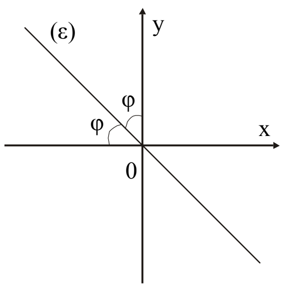
ε:

β)



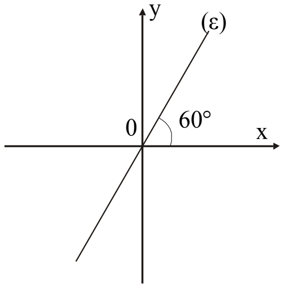
ε:

γ)



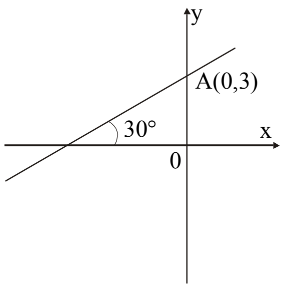
ε:

δ)



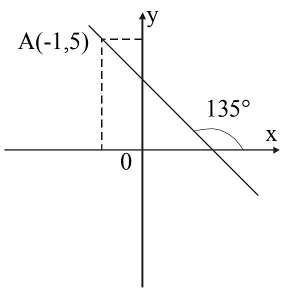
ε:

ε)



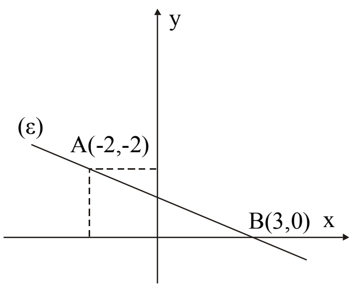
ε:

στ)



ε:

ζ)



ε:

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία:

α) $\omega = \frac{\pi}{3}$ β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$ γ) $\omega = \pi$

2. * Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x μια ευθεία ε, η οποία διέρχεται από τα σημεία:

α) Α (- 6, - 2) Β (3, 7)

β) Α (1, 3) Β (2, 4)

γ) Α ($\sqrt{3}$, 3) Β (0, 4)

δ) Α (1, - 1) Β (1, 2)

ε) Α (0, $\sqrt{3}$) Β (1, 0)

3. ** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α (- 2, 3), Β (- 6, 1) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

4. ** Δίνονται τα σημεία Α (7, 5), Β (6, - 7) και Γ (2, 3). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

5. * Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (3, - 2) και:

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, - 5)

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, 3)

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (- 2, 0)

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, 1)

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, - 2)

στ) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω = 135°.

6. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (- 1, 2), Β (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των πλευρών του

β) οι εξισώσεις δύο υψών του

γ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του

δ) οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του

ε) οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του

στ) οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του

ζ) οι συντεταγμένες του εκκέντρου του

η) οι συντεταγμένες του περικέντρου του.

7. ** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α (κσυνφ, λημφ), Β (κημφ, - λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου κ, λ $\in$ R και $0 < φ < π$. Για ποιες τιμές του φ τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά;

8. * Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$

β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) παράλληλη στον άξονα x΄x

ε) παράλληλη στον άξονα y΄y

στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων

ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων

η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.

9. ** Τα σημεία M_1 (1, 1), M_2 (2, 2) και M_3 (3, - 1) είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:

α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του

β) οι συντεταγμένες του κέντρου του

γ) το εμβαδόν του

10. ** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

11. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.

12. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: Α (- 8, 2), Β (7, 4) και Η (5, 2) το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

γ) τις εξισώσεις των πλευρών του

13. ** Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α (1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

14. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

α) ε_1: $3x - y + 1 = 0$ και ε_2: $- 6x + 2y - 3 = 0$

β) ε_1: $x = 4$ και ε_2: $x = - 6$

γ) ε_1: $y = x$ και ε_2: $y = x - 3$

15. ** Το σημείο Α (3, - 1) είναι κορυφή του τετραγώνου ΑΒΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

16. * Δίνονται οι ευθείες ε_1: $(\lambda + 2)\, x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και ε_2: $(\lambda - 1)\, x + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

17. ** Δίνονται οι ευθείες ε_1: $(\mu + 1)\, x + (\mu + 2)\, y = 0$ και ε_2: $\mu x - (3\mu + 2)\, y + 7 = 0$. Να βρείτε τον μ, ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90°.

18. ** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:

α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου

β) το εμβαδόν του.

19. ** Δίνονται τα σημεία Α (2, 1), Β (6, 4) και Γ $(\frac{9}{2}, 6)$.

α) Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

20. ** Αν οι ευθείες $ε_1$: $2x - y + 1 = 0$ και $ε_2$: $x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και Α (2, - 1) μια κορυφή του, να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.

21. *** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία Α (ημω, συνω) και Β (ημφ, συνφ). Να βρεθεί η απόσταση του Ο (0, 0) από αυτήν $(0 \leq ω \neq φ < \frac{π}{2})$.

22. ** Δίνονται τα σημεία Α (λ, 0), Β (2λ, 3λ), $λ \neq 0$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία $x = - 2λ$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

23. ** Έστω οι ευθείες $ε_1$: $2x - 3y + 1 = 0$, $ε_2$: $- x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο Α (1, - 2). Να βρεθεί σημείο Μ της $ε_2$, ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην $ε_1$.

24. ** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία Α (1, - 2), Β (- 2, 3), Γ (- 1, - 4) και Δ (5, 0).

25. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

26. ** Τα σημεία Α (1, 0) και Β (3, 6) ισαπέχουν από το σημείο Γ (- 4, λ). Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

27. ** Δίνονται τα σημεία Α (4, 2), Β (3, - 1) και η ευθεία ε: $y = - 3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

28. ** Δίνονται τα σημεία Α (1, 4) και Β (- 1, - 5).

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

29. ** Για ποιες τιμές των λ, μ $\in$ R οι ευθείες ε_1: (μ + 1) x - 2μy = λ και ε_2: (μ - 1) x - 3y = 2λ - 1:

α) τέμνονται,

β) είναι παράλληλες,

γ) συμπίπτουν.

30. ** Θεωρούμε τις ευθείες ε: αx + βy + γ = 0, ε_1: αx - βy + γ = 0, ε_2: αx - βy - γ = 0 και ε_3: αx + βy - γ = 0 (α, β, γ $\neq$ 0). Να αποδείξετε ότι:

α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον x΄x

β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον y΄y

γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

31. ** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση x + y = 1. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου P (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την (ε).

32. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία 2λx + 2λy + 5λ = 3y - x + 7 διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε λ $\in$ R.

33. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2} + y\eta\mu^2\dfrac{\theta}{2} + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0,\ \theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

34. ** Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)\,x - (\lambda^2 + \lambda - 2)\,y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του λ $\in$ R η (1) παριστάνει ευθεία;

35. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M (λ - 1, 2λ + 3), λ $\in$ R.

36. ** Τριγώνου ΑΒΓ οι κορυφές είναι Α (- 2, 2κ), Β (2κ, κ) και Γ (κ - 2, - κ), κ $\in$ R. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.

37. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.

38. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4λy - 2λx - 3λ^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

39. ** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία Α (3, 2) και Β (- 1, 2) έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην ΑΒ.

40. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + λ(x - 3y - 4) = 0$.

41. ** Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ (2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλόμενης ακτίνας.

42. ** Ένα σημείο Ρ του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Ρ΄ του Ρ ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.

43. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (5, 3), Β (0, 0) και Γ (6, 0). Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

44. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 1)	και	(ε΄): $2x + y - 1 = 0$
β) Α (2, - 3)	και	(ε΄): $x = -3$
γ) Α (- 2, 1)	και	(ε΄): $y = -1$

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (- 1, 1)	και	(ε΄): $2x + y + 1 = 0$
β) Α (4, - 3)	και	(ε΄): $2x + 1 = 0$
γ) Α (2, - 1)	και	(ε΄): $y = 4$

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x΄x.

Εφαρμογή:

α) Α (- 2, 3)	και	$\varphi = 30°$
β) Α (4, - 5)	και	$\varphi = 90°$
γ) Α (3, - 3)	και	$\varphi = 135°$

- Τέμνει τους άξονες στα σημεία Α $(x_1, 0)$ και Β $(0, y_2)$.

Εφαρμογή:

α) Α (4, 0)	και	Β (0, 4)
β) Α (- 3, 0)	και	Β (0, 1)

- Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Εφαρμογή:

α) (ε_1): $3x - y + 1 = 0$	και	(ε_2): $-6x + 2y - 3 = 0$
β) (ε_1): $x = 4$	και	(ε_2): $x = -6$
γ) (ε_1): $y = x$	και	(ε_2): $y = x - 3$

- Απέχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) $d = \sqrt{2}$ από (ε΄): $2x + y - 1 = 0$

β) $d = 4$ από (ε΄): $y = 3$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και απέχει απόσταση d από το Β (x_1, y_1).

Εφαρμογή:

α) Α (3, - 1) και απέχει $d = \sqrt{2}$ από το Β (2, 2)

β) Α (2, 1) και απέχει d = 1 από το Β (0, 0)

- Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα ΑΒ.

Εφαρμογή:

α) Α (- 2, 1) και Β (2, 3)

β) Α (3, 0) και Β (0, - 5)

- Είναι άξονας συμμετρίας του ΑΒ με Α, Β γνωστά σημεία.

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 1) και Β (- 1, 3)

β) Α (- 3, 4) και Β (4, - 3)

- Διέρχεται από σημείο Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ε΄).

Εφαρμογή:

α) Α (2, 1) και $\varphi = 45°$ με την $x - y + 1 = 0$

β) Α (- 2, 1) και $\varphi = 30°$ με την $y + 2 = 0$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) Α (3, - 2) και $\vec{v} = (0, 1)$

β) Α (- 2, - 3) και $\vec{v} = (2, 3)$

γ) Α (- 1, 0) και $\vec{v} = (- 4, 0)$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{\nu}$.

Εφαρμογή:

α) Α (5, - 2) και $\vec{\nu} = (-1, 3)$

β) Α (- 2, 2) και $\vec{\nu} = (0, 4)$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{\nu}$.

Εφαρμογή:

α) Α (1, - 2) και $\varphi = 60°$ με το $\vec{\nu} = (1, 1)$

β) Α (0, 3) και $\varphi = 45°$ με το $\vec{\nu} = (2, 1)$

- Διέρχεται από το Α (x_0, y_0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

Εφαρμογή:

α) Α (- 1, 2) και εμβαδόν 3 τ.μ.

β) Α (- 1, 0) και εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

45. ** Τον Δεκέμβριο το καλοριφέρ μιας κατοικίας λειτούργησε 4 ώρες την ημέρα και το κόστος έφτασε τις 45.000 δρχ. ενώ τον Ιανουάριο που λειτούργησε 5 ώρες την ημέρα το κόστος ήταν 49.960 δρχ. Αν η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος είναι $y = \alpha x + \beta$, όπου x οι ώρες λειτουργίας, να βρεθούν:

α) οι τιμές των α, β

β) το προβλεπόμενο κόστος για τον Φεβρουάριο, αν λειτουργήσει 4,5 ώρες την ημέρα (28 ημέρες).

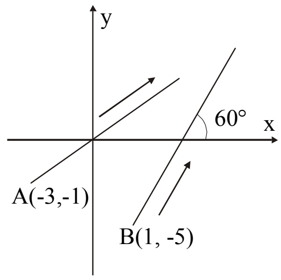
46. ** Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι Π_1 (t - 1, t + 2) και Π_2 (3t, 3t - 1) για κάθε χρονική στιγμή t (t > 0).

α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή t = 3.

47. ** Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία Α και Β αντιστοίχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων Α και Β.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.

γ) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Β από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό.

δ) Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.

48. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Α (2, 6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π $(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in R$.

α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του Α;

β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι Α, όταν κινείται ευθύγραμμα.

γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

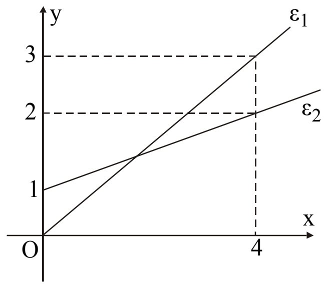
49. ** Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκηνωτές (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.

α) Να τοποθετήσετε, σε ένα πρόχειρο σχέδιο, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες.

β) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ’ αυτό το σύστημα.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.

50. ** Σε ένα εργοστάσιο ο νέος διευθυντής ζήτησε να ενημερωθεί για την οικονομική πορεία της επιχείρησης από το έτος που ιδρύθηκε. Οι υπεύθυνοι των οικονομικών του παρέδωσαν το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



ε_1 *η ευθεία των εσόδων*

ε_2 *η ευθεία των εξόδων*

Οx *ο άξονας των ετών λειτουργίας*

Οy *ο άξονας των εκατοντάδων εκατομμυρίων δραχμών*

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2.

β) Να βρείτε πόσα χρόνια μετά την έναρξη της λειτουργίας της, η επιχείρηση αρχίζει να έχει κέρδη.

γ) Να βρείτε το κέρδος (έσοδα μείον έξοδα) της επιχείρησης τον τέταρτο χρόνο της λειτουργίας της.

δ) Πότε η επιχείρηση θα παρουσιάσει κέρδος 300 εκατομμύρια (3 εκατοντάδες εκατομμύρια);

51. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι Α και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.

α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Α;

β) Πόσο απέχει το λιμάνι Α από το Ο;

γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοιάριου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΕΥΘΕΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Σ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Λ
5.	Λ
6.	Σ
7.	Λ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ

18.	Σ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Λ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Λ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Λ
32.	Σ
33.	Λ
34.	Σ

35.	Σ
36.	Λ
37.	Σ
38.	Λ
39.	Σ
40.	Λ
41.	Σ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Λ
45.	Λ
46.	Λ
47.	Λ
48.	Λ
49.	Λ
50.	Λ
51.	Λ

52.	Σ
53.	Λ
54.	Λ
55.	Σ
56.	Σ
57.	Λ
58.	Σ
59.	Σ
60.	Λ
61.	Σ
62.	Σ
63.	Σ
64.	Σ
65.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ	17.	Γ	33.	Δ
2.	Β	18.	Α	34.	Β
3.	Δ	19.	Γ	35.	Δ
4.	Γ	20.	Γ	36.	Δ
5.	Γ	21.	Γ	37.	Δ
6.	Β	22.	Ε	38.	Β
7.	Β	23.	Α	39.	Α
8.	Β	24.	Ε	40.	Ε
9.	Ε	25.	Δ	41.	Δ
10.	Ε	26.	Β	42.	Γ
11.	Δ	27.	Β	43.	Δ
12.	Ε	28.	Δ	44.	Ε
13.	Δ	29.	Δ	45.	Β
14.	Β	30.	Δ	46.	Β
15.	Β	31.	Ε	47.	Δ
16.	Β	32.	Γ	48.	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχησης

1.

1	Ε
2	Α
3	Β
4	Η
5	Ζ

2.

1	Δ
2	Γ
3	Ζ
4	Θ
5	Α

3.

1	Β
2	Δ
3	Γ

4.

1	Β
2	Δ
3	Α
4	Γ

5.

1	Α
2	Ε
3	Γ

6.

1	Δ
2	Ε
3	Α
4	Β

7.

1	Δ
2	Ζ
3	Α
4	Γ

8.

1	Γ
2	Α
3	Β
4	Ε

9.

1	Γ
2	Β
3	Ε

10.

1	Γ
2	Δ
3	Α
4	Η
5	Ζ
6	Θ

11.

1	Ζ
2	Δ
3	Γ
4	Β

12.

1	Α
2	Ε
3	Β

13.

1	Γ
2	Ε
3	Δ

14.

1	Δ
2	Α
3	Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-2, -\sqrt{3}, -$ ημα, $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, \frac{7}{2}$

2. $\varepsilon_6, \varepsilon_5, \varepsilon_4, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1$

3. ΓΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ

4. $\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_2$

5. Γ, Α, Β

6. $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $\sqrt{3}$ **β)** $-\sqrt{3}$ **γ)** 0

2. **α)** 45° **β)** 45° **γ)** 150° **δ)** 90° **ε)** 120°

3. $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$

4. $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$

5. **α)** $y + 2 = -\frac{5}{2}(x - 3)$ **β)** $x = 3$ **γ)** $y = -2$

δ) $y + 2 = -2(x - 3)$ **ε)** $y = -2$ **στ)** $y + 2 = -(x - 3)$

6. Παρατηρήστε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α

7. Είναι $\overrightarrow{AB} = (\kappa(\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi), \lambda(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi))$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (\kappa(\eta\mu\varphi - 1), \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1)$.

Θα πρέπει: $\begin{vmatrix} \kappa(\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi) & \kappa(\eta\mu\varphi - 1) \\ \lambda(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi) & \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

Αν $\kappa = 0$ ή $\lambda = 0$ τότε βρίσκονται στην ίδια ευθεία για κάθε γωνία φ.

8. Το κοινό σημείο είναι το $(-3, 5)$

α) $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 3)$ **β)** $y - 5 = -\frac{1}{3}(x + 3)$

γ) $y = -\frac{5}{3}x$ **δ)** $y = 5$ **ε)** $x = -3$

στ) $y - 5 = (x + 3)$ **ζ)** $y - 5 = -(x + 3)$

η) Αν $y - 5 = \lambda(x + 3)$ η ευθεία τότε τα σημεία τομής με τους άξονες είναι

$(-\frac{5}{\lambda} - 3, 0)$ και $(0, 3\lambda + 5)$ και πρέπει $(-\frac{5}{\lambda} - 3)(3\lambda + 5) = 32$

9. **α)** Αν $M_4(x, y)$ τότε $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, οπότε $x = 4$, $y = 0$

β) Το μέσον του M_1M_3 είναι το $(2, 0)$

γ) Είναι ίσο με το διπλάσιο εμβαδόν του $M_1M_2M_3$

10. Το σημείο τομής είναι Α (- 1, 6). Η απέναντι κορυφή είναι το συμμετρικό του Α ως προς την $x + 7y - 16 = 0$.

11. Οι ευθείες έχουν τη μορφή $y = \frac{2}{3}x + κ$ και κόβουν τους άξονες στα σημεία Α (0, κ) και Β ($-\frac{3}{2}κ$, 0). Το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι $\frac{1}{2}\left|κ \cdot (-\frac{3}{2}κ)\right|$

12. **α)** ΑΗ $\perp$ ΒΓ, άρα βρίσκουμε το συντελεστή της ΒΓ

β) ΒΗ $\perp$ ΑΓ

13. Έστω ($ε_1$): $y - 1 = 0$, ($ε_2$): $x - 3y + 1 = 0$. Το Α δεν ανήκει στις ($ε_1$), ($ε_2$). Άρα οι διάμεσοι θα είναι από τα Β και Γ. Έστω Β (x_1, y_1), Γ (x_2, y_2) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε Μ $(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2})$, Ν $(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2+2}{2})$ με τα Β και Ν να ανήκουν στην ($ε_1$) και τα Γ και Ν να ανήκουν στην ($ε_2$)

14. Η μεσοπαράλληλη διχοτομεί κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στις παράλληλες

15. Το Α δεν ανήκει στη δοσμένη ευθεία. Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της κάθετης από το Α πάνω στη δοσμένη

16. Για $\lambda = 0$ είναι παράλληλες με τον yy΄

17. Παίρνουμε παράλληλα προς τις ευθείες διανύσματα

21. Είναι $\lambda = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\varphi - \eta\mu\omega}$ και ορίζεται πάντα λόγω του περιορισμού

22. Οι συντεταγμένες του Γ θα είναι $(-2\lambda, \lambda)$ και $(AB) = (A\Gamma) = \sqrt{10} \cdot |\lambda|$

24. Άθροισμα των δύο εμβαδών τριγώνου

25. Θεωρούμε την εξίσωση τριώνυμο ως προς y ή x

30. **α)** Αν το $(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ τότε $(x_0, -y_0) \in (\varepsilon_1)$

β) Το $(-x_0, y_0) \in (\varepsilon_2)$

γ) Το $(-x_0, -y_0) \in (\varepsilon_3)$

33. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sigma\upsilon\nu\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2} - 1$ και η ευθεία γράφεται

$$(y - 2) + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}(x - y + 2) = 0$$

37. Οι ευθείες είναι παράλληλες

38. Η εξίσωση γράφεται: $(x - \lambda)^2 - (y + 2\lambda)^2 = 0$ και εφαρμόζουμε διαφορά τετραγώνων

40. Το κέντρο της οικογένειας είναι το (4, 0) και ανήκει στην ευθεία

41. Βρίσκουμε το συμμετρικό του Σ ως προς την ευθεία. Αυτό το σημείο λόγω συμμετρίας θα ανήκει και στην ανακλόμενη

42. Το συμμετρικό του Α (k, k) ανήκει στην (ε): $7x - y - 2 = 0$ αφού η κάθετη από το (Α) στην $x + 2y - 1 = 0$ τέμνει την (ε) στο Β και τα Α, Β ισαπέχουν από την $x + 2y - 1 = 0$

43. Θεωρήστε την $y = k$ και βρείτε τα σημεία τομής της με τις ΑΒ, ΑΓ

45. Θεωρήστε τα σημεία (4, 45.000) και (5, 49.960) πάνω στην $y = \alpha \cdot x + \beta$ για να υπολογίσετε τα α, β

46. **α)** Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στα Π_1, Π_2
β) Οι ευθείες είναι παράλληλες

48. **α)** $\lambda - 1 < 2$

β) Το σύστημα $\lambda - 1 = 2$ και $2 + \lambda = 6$ είναι αδύνατο

γ) Απόσπαση σημείου από ευθεία

49. Τα σημεία είναι τα (1, 2), (3, - 1), (- 2, 0)

50. **β)** Να βρεθεί το σημείο τομής των (ε_1), (ε_2)

γ) είναι η διαφορά 3 - 2

δ) $\frac{3}{4}x - (\frac{1}{4}x + 1) = 3$

51. **α)** Θέτουμε $t = 0$

Κεφάλαιο 3ο: **ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 = α$ $(α > 0)$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. **Σ** **Λ**

3. * Ο κύκλος με κέντρο Κ (1, - 1) που περνά από το σημείο (- 1, 1) έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$. **Σ** **Λ**

4. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + α(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό α. **Σ** **Λ**

5. * Το σημείο $\left(\frac{ημθ}{2}, \frac{συνθ}{2}\right)$ ανήκει στον κύκλο $4(x - ημθ)^2 + 4(y - συνθ)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ. **Σ** **Λ**

6. * Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

7. * Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. **Σ** **Λ**

8. ** Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά **Σ** **Λ**

9. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$. **Σ** **Λ**

10. ** Τα σημεία (- 2, 2) και (4, 2) του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. **Σ** **Λ**

11. * Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

12. * Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

13. * Οι εξισώσεις $x = ρημφ$ και $y = ρσυνφ$, $φ \in [0, 2π)$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου C: $x^2 + y^2 = ρ^2$. **Σ** **Λ**

14. * Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $x + y = 1$. **Σ** **Λ**

15. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο (1, 0). **Σ** **Λ**

16. * Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = α^2$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. **Σ** **Λ**

17. * Η σχέση $y = \sqrt{α^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο $(- α \le x \le α)$. **Σ** **Λ**

18. ** Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία y = x. Έχει πάντα εξίσωση $(x - α)^2 + (y - α)^2 = α^2$. **Σ** **Λ**

19. * Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < ρ^2$. **Σ** **Λ**

20. ** Η παραβολή με εστία το σημείο (1, 0) έχει παράμετρο p = 2. **Σ** **Λ**

21. * Η ευθεία που έχει εξίσωση y = 3 είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$. **Σ** **Λ**

22. * Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας y΄y και η εστία Ε. **Σ** **Λ**

23. * Ο άξονας x΄x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$. **Σ** **Λ**

24. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο M_1 (x_1, y_1) είναι $yy_1 = p (x + x_1)$. **Σ** **Λ**

25. ** Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. **Σ** **Λ**

26. * Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$. **Σ** **Λ**

27. * Μια παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) και διευθετούσα την $y = - \frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x. **Σ** **Λ**

28. * Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία x = - 2 και το σημείο (4, 0). **Σ** **Λ**

29. ** Όλα τα σημεία της $y^2 = 2px$ με p > 0, εκτός του (0, 0), έχουν θετική τετμημένη. Σ Λ

30. * Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$. Σ Λ

31. * Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία $y = -1$. Σ Λ

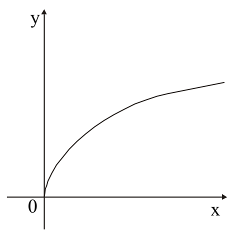
32. ** Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = -2x$ εφάπτονται. Σ Λ

33. * Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Σ Λ

34. * Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2 = 2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$. Σ Λ

35. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$. Σ Λ

36. * Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος. Σ Λ



37. * Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ

38. * Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ

39. * Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο αν $\alpha > \beta$. Σ Λ

40. ** Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$. Σ Λ

41. * Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της. Σ Λ

42. * Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. Σ Λ

43. * Το σημείο (κ, λ) ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο Ο, η οποία περιέχει το σημείο (- κ, - λ). **Σ** **Λ**

44. * Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες. **Σ** **Λ**

45. * Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

46. * Το σημείο Α (2, - 2) βρίσκεται έξω από την έλλειψη

C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **Σ** **Λ**

47. * Η εξίσωση $x^2 + κy^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $κ > 0$. **Σ** **Λ**

48. * Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο. **Σ** **Λ**

49. ** Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ είναι εσωτερικά της

έλλειψης $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$. **Σ** **Λ**

50. * Η ευθεία y = - 3 είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} =$ **Σ** **Λ**

1.

51. * Η ευθεία x = 2 είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. **Σ** **Λ**

52. * Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. **Σ** **Λ**

53. * Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1$ στο σημείο της

Μ (ασυνθ, βημθ) είναι (συνθ) x + (ημθ) y = 1. **Σ** **Λ**

54. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $ε = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Σ** **Λ**

55. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες. **Σ** **Λ**

56. * Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$. Ισχύει πάντα α > β. Σ Λ

57. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο σημεία. Σ Λ

58. * Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. Σ Λ

59. * Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}$. Σ Λ

60. * Η υπερβολή $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

ε_1: $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και ε_2: $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$. Σ Λ

61. * Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. Σ Λ

62. * Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. Σ Λ

63. ** Το σημείο (5, 4) ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$. Σ Λ

64. * Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ

65. * Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Σ Λ

66. * Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $\kappa, \lambda \in R$. Σ Λ

67. * Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y στα σημεία (0, 2) και (0, - 2). Σ Λ

68. ** Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. Σ Λ

69. * Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. **Σ** **Λ**

70. * Η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**

71. ** Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$. **Σ** **Λ**

72. * Υπάρχει $\theta \in R$, ώστε το σημείο (ημθ, 1) ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. **Σ** **Λ**

73. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το σημείο Μ (- 2, 3) ανήκει στη γραμμή με εξίσωση

Α. $x = 3$ **Β.** $x = -2$ **Γ.** $x^2 + y^2 = 1$

Δ. $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 1$ **Ε.** $y^2 = -2x$

2. * Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α (1, -3) και Β (7, 5), έχει συντεταγμένες

Α. (4, 4) **Β.** (3, 4) **Γ.** (4, - 4) **Δ.** (4, 1) **Ε.** (4, - 1)

3. * Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ είναι

Α. 2 **Β.** $2\sqrt{2}$ **Γ.** $4\sqrt{2}$ **Δ.** 4 **Ε.** 8

4. * Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι

Α. (3, - 2) **Β.** (2, - 3) **Γ.** (2, 3) **Δ.** (- 2, 3) **Ε.** (- 3, 2)

5. * Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (- 1, - 1) και διέρχεται από το σημείο (4, - 3), είναι

Α. $x^2 + y^2 = 29$ **Β.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$

Γ. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$ **Δ.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$

6. * Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο (3, 9) και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση

Α. $x^2 + y^2 = 81$ **Β.** $x^2 + y^2 = 3$ **Γ.** $x^2 + y^2 = 9$

Δ. $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ **Ε.** $(x - 3)^2 + y^2 = 49$

7. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο (1, 2) και εφάπτεται στον άξονα των x΄x, έχει εξίσωση

Α. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ **Β.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ **Δ.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

8. ** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο (2, 1) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $x - 2y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 7 = 0$ **Γ.** $x + 2y = 4$

Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ **Ε.** $y = x$

9. ** Ο κύκλος $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \rho^2$ εφάπτεται του άξονα x΄x. Η τιμή του ρ είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 5

Ε. καμία από τις προηγούμενες

10. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 8\kappa y + \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι

Α. 4 **Β.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0

11. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το $(x_0, 0)$, εφάπτεται στον άξονα y΄y ($x_0 \neq \rho$). Η εξίσωσή του είναι

Α. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$ **Β.** $x^2 + y^2 = x_0^2$ **Γ.** $(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$

Δ. $(x - \rho)^2 + y^2 = \rho$ **Ε.** $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0$

12. ** Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, όταν

Α. $\alpha = \beta \neq \rho$ **Β.** $\alpha \neq \beta = \rho$ **Γ.** $\alpha > \beta$

Δ. $\alpha = \rho = \beta$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

13. ** Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$

Α. διέρχεται από το σημείο Α (α, α)

Β. διέρχεται από το σημείο Α $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$

Γ. έχει το κέντρο του στην $y = x + 1$

Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = - x$

Ε. εφάπτεται στους άξονες x΄x και y΄y

14. ** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις C_1: $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$ και C_2: $x^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ $(\alpha \neq 0)$.

Α. Η απόσταση των κέντρων τους είναι 2α

Β. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $|\alpha|\sqrt{2}$

Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2\alpha^2$

Δ. Το κέντρο του C_1 είναι εσωτερικό του C_2

Ε. Το κέντρο του C_2 βρίσκεται πάνω στον C_1

15. ** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν

Α. $A^2 + B^2 - 4\Gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο

Β. $|A| + |B| \neq 0$

Γ. $A^2 + B^2 > 4\Gamma$

Δ. $4A^2 + 4B^2 - \Gamma < 0$

Ε. $A^2 + B^2 < 4\Gamma$

16. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 + x = 0$

Α. εφάπτεται στον x΄x

Β. εφάπτεται στον y΄y

Γ. τέμνει τον y΄y σε δύο σημεία

Δ. δεν τέμνει κανένα άξονα

Ε. εφάπτεται και στους δύο άξονες

17. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2\alpha (x + y) = - \alpha^2$, $\alpha > 0$ έχει κέντρο

Α. (α, α) **Β.** $(2\alpha, \alpha)$ **Γ.** $(\frac{\alpha}{2}, 2\alpha)$ **Δ.** $(\alpha, - 2\alpha)$ **Ε.** (α^2, α)

18. ** Δίνεται το σημείο Α ($\frac{1}{2}$ ημθ, $\frac{1}{2}$ συνθ), $\theta \in R$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Α. Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο, για κάθε $\theta \in R$

Β. Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο, αν $\theta \in (0, \pi)$

Γ. Το σημείο Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

Δ. Το σημείο Α βρίσκεται μέσα στον κύκλο

Ε. Το σημείο Α βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

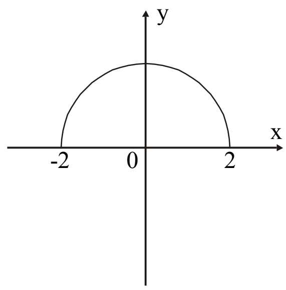
19. ** Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ (- 1, - 2) και περνά από το σημείο (2, 2), είναι

Α. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ **Β.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = - 3$

Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ **Δ.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

20. ** Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι



Α. $x^2 + y^2 = 2$ **Β.** $x^2 + y^2 = 4$

Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$ **Δ.** $x = \sqrt{4 - y^2}$

Ε. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

21. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του Μ (- 1, 2). Η εφαπτομένη του στο Μ έχει εξίσωση

Α. $2x - y = 5$ **Β.** $- x - 2y = 5$ **Γ.** $x + 2y - 5 = 0$

Δ. $x - 2y + 5 = 0$ **Ε.** $2x + y = 5$

22. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 3$ και το σημείο του Μ ($+\sqrt{2}$, - 1). Η εφαπτομένη στο Μ είναι

Α. $- \sqrt{2}\,x + y - 3 = 0$ **Β.** $\sqrt{2}\,x - y - 3 = 0$ **Γ.** $x - y = 3$

Δ. $\sqrt{2}\,x + y = 3$ **Ε.** $- x + \sqrt{2}\,y = 3$

23. ** Η παραβολή που έχει εστία Ε (0, 4) και κορυφή το Ο (0, 0), έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 8x$ **Β.** $y^2 = - 8x$ **Γ.** $y^2 = 16x$

Δ. $x^2 = 16y$ **Ε.** $x^2 = 8y$

24. ** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$ στο σημείο (1, 4) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $y = x$ **Β.** $y = - x$ **Γ.** $y = 2x + 1$ **Δ.** $y = x + 2$ **Ε.** $4y = x$

25. * Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x - y = 0$ είναι

Α. (0, 0) και (1, 1) **Β.** (8, 8) και (2, 1) **Γ.** (0, 0) και (8, 8)

Δ. $(1, \sqrt{8})$ και $(- 1, \sqrt{8})$ **Ε.** (2, 4) και (4, 2)

26. ** Το σημείο Α (κ, 4) ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο Α΄ του Α ως προς τον άξονα x΄x είναι

Α. (4, 4) **Β.** (- 4, 4) **Γ.** (2, 4) **Δ.** (2, - 4) **Ε.** (2, - 2)

27. ** Μια παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) έχει διευθετούσα την $x = \frac{3}{2}$.

Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 6x$ **Β.** $y^2 = - 6x$ **Γ.** $y^2 = 3x$ **Δ.** $x^2 = - 6y$ **Ε.** $x^2 = - 3y$

28. ** Η εξίσωση $y = αx^2$, $α \neq 0$ παριστάνει παραβολή

Α. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = \frac{α}{2}$

Β. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = 2α$

Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο

Δ. της μορφής $x^2 = 2py$ με $p = \frac{α}{2}$

Ε. με άξονα συμμετρίας τον y΄y

29. ** Η εξίσωση $y^2 = 4αx$

Α. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $α > 0$

Β. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $α = \frac{1}{2}p$ $(p > 0)$

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $α \neq 0$

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε α πραγματικό αριθμό

Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν α ρητός

30. ** Οι παραβολές $y^2 = αx$ και $x^2 = αy$ $(α \neq 0)$

Α. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

Β. εφάπτονται στο Ο (0, 0)

Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το α

Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία

Ε. υπάρχει τιμή του α για την οποία δεν τέμνονται

31. * Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α. $λ = \frac{p}{y_1}$ **Β.** $λ = \frac{2p}{y_1}$ **Γ.** $λ = \frac{y_1}{p}$ **Δ.** $λ = \frac{y_1}{2p}$ **Ε.** $λ = 2p$

32. ** Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2px$ στα σημεία (x_1, y_1) και $(x_1, -y_1)$

Α. είναι παράλληλες

Β. είναι πάντα κάθετες

Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y

Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα x΄x

Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία

33. ** Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$

Α. παριστάνει μια παραβολή

Β. παριστάνει δύο παραβολές

Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x > 0$

Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x < 0$

Ε. παριστάνει δύο ευθείες

34. ** Το σημείο Α (2, 4) της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 8 **Δ.** 16 **Ε.** $\sqrt{8}$

35. * Αν Ε΄, Ε οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και Α τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε

Α. (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = α **Β.** (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = α **Γ.** (ΑΕ΄) = (ΑΕ)

Δ. (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = 2α **Ε.** (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = 2α

36. ** Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μια εστία της είναι

Α. $\frac{7}{6}$ **Β.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** $\frac{4}{3}$

37. ** Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες Ε΄ (0, - 2) και Ε (0, 2) και μικρό άξονα 10, είναι

Α. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$ **Ε.** $2x^2 - 2y^2 = 10$

38. ** Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα y΄y και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

Α. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

39. * Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο άξονα 2α. Τότε θα είναι πάντα

Α. $\alpha > \beta > \gamma$ **Β.** $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ **Γ.** $0 < \alpha < \beta$

Δ. $\gamma > \alpha$ **Ε.** $\gamma < \alpha$

40. ** Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την C: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, είναι

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **Γ.** $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ **Ε.** $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

41. * Η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ έχει μια εστία στο σημείο

Α. (2, 3) **Β.** $(0, \sqrt{2})$ **Γ.** $(\sqrt{3}, 0)$ **Δ.** (- 1, 0) **Ε.** (0, -1)

42. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν

Α. δύο μόνο κοινά σημεία **Β.** τέσσερα κοινά σημεία

Γ. ένα μόνο κοινό σημείο **Δ.** κανένα κοινό σημείο

Ε. άπειρα κοινά σημεία

43. ** Η εξίσωση $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ α, β ≠ 0

Α. παριστάνει πάντα μία έλλειψη

Β. παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες

Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$

Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha = \beta$

44. ** Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ είναι όμοια με την

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

45. ** Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία Ε΄ (- 2, 0) και Ε (2, 0) είναι και η

Α. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

46. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της Μ $(-\sqrt{5}, 0)$. Η εφαπτομένη της στο Μ θα είναι

Α. $\sqrt{5}\,y - 5 = 0$ **Β.** $+\sqrt{5}\,x + 5 = 0$ **Γ.** $\sqrt{5}\,x - 15 = 0$

Δ. $-\sqrt{5}\,x + y - 15 = 0$ **Ε.** $3\sqrt{5}\,x - 15 = 0$

47. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$ και το σημείο της Μ ($\sqrt{2}$, - 1).

Η εφαπτομένη της στο Μ θα έχει εξίσωση

Α. $x - \sqrt{2}\,y = 4$ **Β.** $\sqrt{2}\,x - 2y - 4 = 0$ **Γ.** $\sqrt{2}\,x + 2y = 4$

Δ. $x - 2y - 4 = 0$ **Ε.** $- \sqrt{2}\,x - 2y = 4$

48. * Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

Α. $y = \frac{5}{4}x$ **Β.** $y = \frac{4}{5}x$ **Γ.** $y = \frac{16}{25}x$

Δ. $y = \frac{25}{16}x$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες

49. ** Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση 2γ = 8 και εκκεντρότητα $\frac{4}{3}$ είναι

Α. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ **Β.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

50. ** Μια υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε

Α. η C έχει τις εστίες της στον άξονα y΄y

Β. έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$

Γ. έχει εστίες Ε΄ (- 5, 0), Ε (5, 0)

Δ. είναι α = 3 και β = 4

Ε. έχει κορυφές Α΄ (- 3, 0), Α (3, 0)

51. ** Οι υπερβολές C_1: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και C_2: $\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ $(\alpha \neq \beta)$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα
Β. τις ίδιες εστίες
Γ. την ίδια εστιακή απόσταση
Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες
Ε. τις ίδιες κορυφές

52. ** Η υπερβολή C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν

Α. την ίδια εστιακή απόσταση
Β. τις ίδιες εστίες
Γ. την ίδια εκκεντρότητα
Δ. δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1
Ε. τέσσερα κοινά σημεία

53. ** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της M_1 (x_1, y_1). Η εφαπτομένη της στο M_1 θα έχει εξίσωση

Α. $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$
Β. $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$
Γ. $\beta^2x_1x - \alpha^2y_1y = \alpha^2\beta^2$
Δ. $\alpha^2x_1x - \beta^2y_1y = 1$
Ε. $xx_1 - yy_1 = 1$

54. ** Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με

Α. $\mu = 1$
Β. $\kappa.\lambda < 0$
Γ. $\mu < 0$
Δ. $\kappa \neq \lambda$
Ε. $\kappa = \mu$ ή $\lambda = \mu$

55. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ $(\alpha \neq \beta)$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα
Β. τις ίδιες ασύμπτωτες
Γ. τις ίδιες εστίες
Δ. τις ίδιες κορυφές
Ε. μία μόνο κοινή εστία

56. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) = $\frac{1}{3}\sqrt{16x^2 - 144}$ ($x \geq 3$ ή $x \leq -3$) είναι

Α. κύκλος με ακτίνα ρ = 12

Β. έλλειψη με α = 3 και β = 4

Γ. υπερβολή με εστίες (- 5, 0), (5, 0)

Δ. τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες (- 5, 0), (5, 0)

Ε. παραβολή με διευθετούσα x = - $\frac{5}{4}$

57. ** Τα σημεία Μ (x, y) για τα οποία ισχύει: $|(AM) - (BM)| = 6$ με Α (- 5, 0) και Β (5, 0)

Α. ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Β. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Γ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

Ε. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

58. * Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 3$ και το σημείο της Μ (- 2, 1). Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο Μ είναι

Α. x - 2y = 3 **Β.** 2x + y = 3 **Γ.** - 2x + y = 3

Δ. 2x + y + 3 = 0 **Ε.** 2x - y + 3 = 0

59. * Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το Μ (1, 2). Η εφαπτομένη της στο Μ έχει εξίσωση

Α. x + y + 1 = 0 **Β.** 2x - y = 2 **Γ.** x - 2y + 2 = 0

Δ. 2x - y = - 2 **Ε.** x - y + 1 = 0

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (Ι) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ). Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α κύκλος	σημείο (x_0, y_0)	**στήλη Β** εφαπτόμενη ευθεία
1. $x^2 + y^2 = 1$	$(0, 1)$	**Α.** $y = 0$
		Β. $x + 4(y + 2) = 5$
2. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$	$(2, 0)$	**Γ.** $y = 1$
		Δ. $y = x$
3. $x^2 + y^2 = 25$	$(3, 4)$	**Ε.** $3x + 4y = 25$
4. $x^2 + (y + 2)^2 = 5$	$(1, 2)$	**Ζ.** $x - 2y = 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

2. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ που βρίσκονται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α **κύκλος**	**στήλη Β** **κέντρο - ακτίνα**
1. $x^2 + y^2 - \sqrt{\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$	**Α.** $K(\alpha, 1) \qquad \rho = \frac{\alpha}{2}$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2\alpha y = -\alpha^2$	**Β.** $K(-1, \frac{3}{2}) \qquad \rho = \frac{3}{2}$
3. $(x+\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2$, $\alpha \neq 0$	**Γ.** $K(0, 0) \qquad \rho = \sqrt[4]{\alpha}$
	Δ. $K(\alpha, \alpha) \qquad \rho = \lvert\alpha\rvert$
4. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	**Ε.** $K(1, -\alpha) \qquad \rho = 1$
	Ζ. $K(0, \alpha) \qquad \rho = \lvert\alpha\rvert$

Πίνακας (II)

1	**2**	**3**	**4**

3. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την εστία της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **παραβολή**	**στήλη Β** **εστία**
1. $y^2 = px$	**Α.** $(-\frac{p}{2}, 0)$
	Β. $(\frac{p}{8}, 0)$
2. $x^2 = py$	
	Γ. $(\frac{p}{4}, 0)$
3. $y^2 = -2px$	**Δ.** $(0, \frac{p}{2})$
	Ε. $(0, \frac{p}{4})$
4. $y^2 = \frac{p}{2}x$	
	Ζ. $(0, -\frac{p}{2})$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

4. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$. Σε κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (Ι) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **σημείο**	**στήλη Β** **εφαπτομένη παραβολής**
1. $(0, 0)$	**Α.** $y = x + \frac{1}{2}$
2. $(\frac{1}{2}, 1)$	**Β.** ο άξονας y΄y
	Γ. $-2y = x + 2$
3. $(\frac{1}{2}, -1)$	**Δ.** $y = x - 2$
4. $(2, 2)$	**Ε.** $-y = x + \frac{1}{2}$
	Ζ. $2y = x + 2$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

5. ** Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία Ε και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **εστία - διευθετούσα**	**στήλη Β** **εξίσωση παραβολής**
1. Ε (- 2, 0) και δ: $x - 2 = 0$ **2.** Ε (0, 4) και δ: $y + 4 = 0$ **3.** Ε (3, 0) και δ: $x + 3 = 0$	**Α.** $x^2 = 16y$ **Β.** $y^2 = -8x$ **Γ.** $y^2 = 8x$ **Δ.** $y^2 = 12x$ **Ε.** $x^2 = -16y$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

6. ** Στη στήλη Α δίνεται σε κάθε γραμμή η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία Ε και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

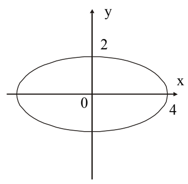
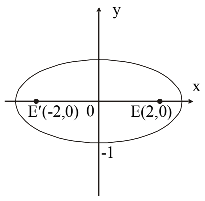
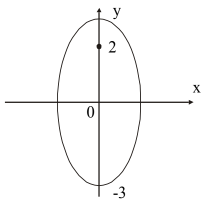
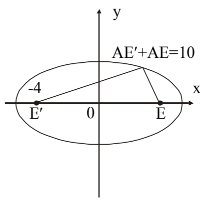
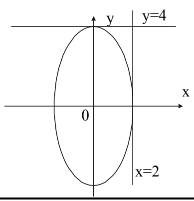
στήλη Α	**στήλη Β**
1. $y^2 = x$	**Α.** Ε $(-1, 0)$ και δ: $x + 1 = 0$
	Β. Ε $(\frac{1}{4}, 0)$ και δ: $x + \frac{1}{4} = 0$
2. $y^2 = -4x$	**Γ.** Ε $(-5, 1)$ και δ: $x + 1 = 0$
	Δ. Ε $(-1, 0)$ και δ: $x - 1 = 0$
3. $x^2 = 20y$	**Ε.** Ε $(0, 5)$ και δ: $y + 5 = 0$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (Ι) την εξίσωσή της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α - έλλειψη	στήλη Β - εξίσωση έλλειψης
1. 	**Α)** $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
2. 	**Β)** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
3. 	**Γ)** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
4. 	**Δ)** $x^2 + 5y^2 = 5$ **Ε)** $x^2 + 2y^2 = 1$
5. 	**ΣΤ)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

8. ** Κάθε κωνική της στήλης Α του πίνακα (Ι) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **είδος κωνικής**	**στήλη Β** **εξίσωση γραμμής**
	Α. $x + y = 1$
1. κύκλος	**Β.** $x^2 + y^2 = 0$
2. παραβολή	**Γ.** $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
3. έλλειψη	**Δ.** $9x^2 = 63 + 7y^2$
	Ε. $y^2 - 16x = 0$
4. υπερβολή	**Ζ.** $4x^2 = 100 - 25y^2$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

9. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τις ασύμπτωτές της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **εξίσωση υπερβολής**	**στήλη Β** **εξισώσεις ασυμπτώτων**
1. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	**Α.** $y = \pm x$
	Β. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$
2. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	**Γ.** $y = \pm 2x$
	Δ. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$
3. $6x^2 - 5y^2 = 30$	**Ε.** $y = \pm \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{6}}{5} . x$
4. $x^2 - y^2 = 4$	**Ζ.** $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

10. ** Σε κάθε γραμμή της στήλης Α γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

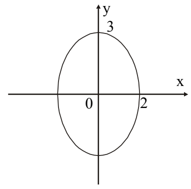
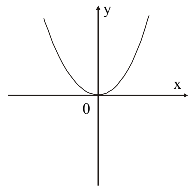
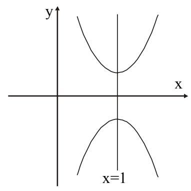
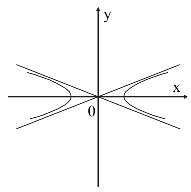
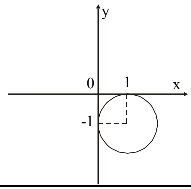
στήλη Α **εξίσωση κωνικής**	**στήλη Β** **εκκεντρότητα**
1. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	**Α.** $\sqrt{3}$
	Β. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	**Γ.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ. $-\sqrt{13}$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$	**Ε.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

11. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1) $x^2 = 4y$	**Α)** 
	Β) 
2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$	**Γ)** 
	Δ) 
3) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$	**Ε)** 

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

12. ** Σε κάθε υπερβολή της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α **υπερβολή**	**στήλη Β** **ασύμπτωτη υπερβολής**
	Α. $\sqrt{2}\,x - y = 0$
1. $x^2 - y^2 = \alpha^2$	**Β.** $3x - 4y = 0$
2. $2x^2 - y^2 = 4$	**Γ.** $y = x$
3. $(x - 2y)\,(x + 2y) = 4$	**Δ.** $4x - 3y = 0$
4. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$	**Ε.** $2x - y = 0$
	Ζ. $x + 2y = 0$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις διάταξης

1. Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

$\mathbf{C_1}$: $x^2 + y^2 = 4$ $\mathbf{C_2}$: $x^2 + 2x + y^2 = 9$ $\mathbf{C_3}$: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$\mathbf{C_4}$: $4x^2 + 4y^2 = 7$ $\mathbf{C_5}$: $x^2 + (y - 2)^2 = 6$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει από τον προηγουμένη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$\mathbf{C_1}$: $y^2 = 4x$ $\mathbf{C_2}$: $y^2 = \dfrac{1}{4}x$ $\mathbf{C_3}$: $y^2 = -6x$

$\mathbf{C_4}$: $y^2 = \sqrt{2}\,x$ $\mathbf{C_5}$: $x = 2y^2$

3. Να γράψετε τα σημεία Α (0, 3), Β (2, 0), Γ (2, 2), Δ (0, 0) και Ε (2, - 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία Α (2, 0), Β (- 1, 0), Γ (0, 4), Δ (- 5, 1), Ε (- 2, 2), τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις d_A, d_B, d_Γ, d_Δ, d_E αντιστοίχως.

Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις d_A, d_B, d_Γ, d_Δ, d_E, έτσι ώστε καθεμιά να είναι μεγαλύτερη από την προηγουμένη της.

5. Να γραφούν οι παρακάτω κωνικές σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα από την προηγουμένη της.

$\mathbf{C_1}$: $x^2 + 4y^2 = 4$ $\mathbf{C_2}$: $4x^2 + 9y^2 = 36$ $\mathbf{C_3}$: $x^2 - 4y^2 = 4$

$\mathbf{C_4}$: $4x^2 - 9y^2 = 36$ $\mathbf{C_5}$: $x^2 - y^2 = 1$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κύκλου	**κέντρο κύκλου**	**ακτίνα κύκλου**	**σημεία τομής κύκλου με άξονα x΄x**	**σημεία τομής κύκλου με άξονα y΄y**
$x^2 + (y - 4)^2 = 1$				
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$				
$x^2 + y^2 = 9$				
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κωνικής	**γραφή της κωνικής σε μια απ' τις μορφές:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, $y^2 = 2px$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,	**χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)**
$4x^2 = 36 + 9y^2$		
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$		
$9x^2 = 1 - 25y^2$		
$y^2 - 12x = 0$		

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	**συντεταγμένες εστίας**	**εξίσωση διευθετούσας**	**άξονας συμμετρίας**
$y^2 = 6x$			
$y^2 = - 6x$			

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	**συντεταγμένες εστιών**	**συντεταγμένες κορυφών**	**εκκεντρότητα**
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	**συντεταγμένες εστιών**	**εκκεντρότητα**	**εξισώσεις ασυμπτώτων**
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$

β) έχει κέντρο το σημείο (3, - 1) και ακτίνα 5

γ) έχει κέντρο το σημείο (- 2, 1) και διέρχεται από το σημείο (- 2, 3)

δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (1, 3) και Β (- 3, 5)

ε) διέρχεται από τα σημεία (2, 1), (1, 2) και (-2, - 1)

στ) διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (- 1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$

ζ) έχει κέντρο το σημείο (8, - 6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$

θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4)

ι) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 2), εφάπτεται στον άξονα y΄y και διέρχεται από το σημείο (- 6, 2)

ια) έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y

ιβ) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$

2. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.

3. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y.

4. ** Δίνεται η ευθεία $y = λx$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο

β) να εφάπτεται του κύκλου

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

5. ** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.

6. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

7. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο (0, 6).

8. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

9. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

10. ** Δίνονται τα σημεία Α (1, 2), Β (2, 4) και Γ (3, 1).

α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία ΒΑΓ = 90°

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

11. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α (3α, 0), Β (0, 3α) και Γ (0, - 3α), $\alpha > 0$.

12. ** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων Μ (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta$, $\theta \in R$, βρίσκονται σε κύκλο.

13. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε): $2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία Α (- 1, 2) και Β (3, - 1).

14. ** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ και C_2: $x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.

15. ** Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

16. ** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β, Γ με Α (1, - 1), Β (- 1, 2), Γ (0, 2) είναι σταθερό c, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ (για κατάλληλο c).

17. ** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

18. ** Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο Α (- 1, - 1). Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο Α.

19. ** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$

β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο (- 1, 4)

γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο (2, 2)

δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία Ε (0, - 4)

ε) έχει εστία Ε (- 2, 0) και διευθετούσα δ: $x - 2 = 0$

στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$

20. ** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

21. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία (0, 0) και (12, 6).

22. ** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.

23. ** Από το σημείο (- 2, 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

24. ** Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος 8p. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB} = 0$.

25. ** Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

26. ** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα y΄y, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

α) (ΑΒ) = 2 (ΕΚ), όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας x΄x τη διευθετούσα

β) οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ

27. ** Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και δύο χορδές ΟΒ, ΟΓ, ώστε γωνία ΒΟΓ = 90°. Να αποδειχθεί ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

28. ** Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.

β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της Α (2, 1) από την εστία Ε και να συγκριθεί με την απόσταση (ΟΕ).

γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της Ο.

δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία Ε απόσταση διπλάσια της ΟΕ.

29. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).

30. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = \alpha x$ και $y' = \alpha y$, $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.

31. ** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2p\kappa^2, 2p\kappa)$ με $\kappa \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή

β) Αν Α $(2p\kappa_1^2, 2p\kappa_1)$, Β $(2p\kappa_2^2, 2p\kappa_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1\kappa_2 = -1$.

32. ** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο M_1 (x_1, y_1), να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{x_1}{y_1}$.

33. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.

α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

34. ** Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

35. ** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

36. ** Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:

α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

β) $4x^2 + 9y^2 = 36$

γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$

37. ** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της Μ να σχηματίζει με τις εστίες Ε΄ και Ε ισόπλευρο τρίγωνο.

38. ** Ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

39. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

40. ** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$.

41. ** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

42. ** Θεωρούμε την υπερβολή C: x^2 - y^2 = 1 και την ευθεία (ε): x + 2y = α. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.

43. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία Μ (x_0, y_0) ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και (Ε΄Μ) + (ΕΜ) = $2\sqrt{6}$ (Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης).

44. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

α) παράλληλες προς την ευθεία (ε): x + y = 0

β) κάθετες στην ευθεία (ε).

45. ** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε΄, Ε οι εστίες, Β, Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα)

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση

$y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:

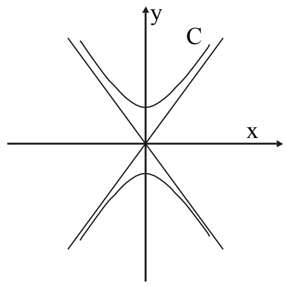
α) οι εστίες της υπερβολής

β) η εστιακή της απόσταση

γ) η εξίσωσή της

δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

ε) η εκκεντρότητά της.



47. ** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 6 και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 20 και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.

γ) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. ** Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. ** Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = \alpha^2$, (ε) η εφαπτομένη στο Μ και Α, Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

50. ** Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = α^2$. Αν θέσουμε $x = x΄$ και $y = cy΄$, να αποδείξετε ότι το σημείο $(x΄, y΄)$ ανήκει σε έλλειψη.

51. ** Δίνεται η υπερβολή C: $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ και Μ (x_1, y_1) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε΄) της (ε) στο Μ τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτόμενη στο Μ)

α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε΄)

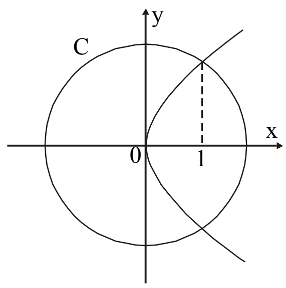
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ

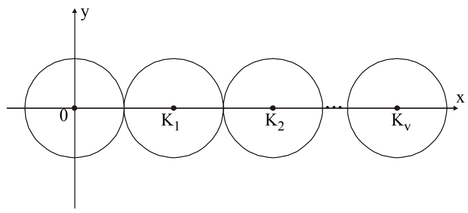
δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι μια υπερβολή C_1

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

52. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



53. ** Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = ρ^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:



α) οι εξισώσεις των κύκλων $C_1, C_2, \dots C_ν$ (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots K_ν$ από το κέντρο Ο

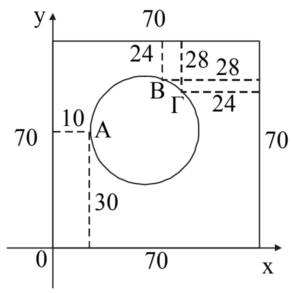
γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

54. ** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία y = 2.

55. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

56. ** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

57. ** Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της Α, Β, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Στο σύστημα αξόνων Oxy να τοποθετήσετε τα σημεία Α, Β, Γ. Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.

β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο $x^2 + y^2 + κx + λy + μ = 0$ πάνω στον οποίο βρίσκονται τα Α, Β, Γ. Να υπολογίσετε τα κ, λ, μ.

γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

59. Δίνονται τα σημεία Α (- 2, 0), Β (2, 0) και M_1 $(1, \sqrt{3})$.

α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1.

γ) Να δείξετε ότι το σημείο M_2 $(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.

δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο Μ (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

60. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της Μ (x_1, y_1) στον κλάδο C_1 $(y_1 \neq 0)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο Μ΄ (x_2, y_2), να δείξετε ότι $y_1 . y_2 < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Σ	20.	Σ	39.	Λ	58.	Σ
2.	Σ	21.	Λ	40.	Σ	59.	Σ
3.	Σ	22.	Σ	41.	Σ	60.	Λ
4.	Λ	23.	Λ	42.	Σ	61.	Λ
5.	Σ	24.	Λ	43.	Σ	62.	Σ
6.	Σ	25.	Λ	44.	Λ	63.	Σ
7.	Λ	26.	Σ	45.	Λ	64.	Σ
8.	Λ	27.	Λ	46.	Λ	65.	Σ
9.	Σ	28.	Λ	47.	Σ	66.	Λ
10.	Σ	29.	Σ	48.	Λ	67.	Λ
11.	Λ	30.	Σ	49.	Σ	68.	Σ
12.	Σ	31.	Σ	50.	Σ	69.	Λ
13.	Λ	32.	Σ	51.	Λ	70.	Λ
14.	Λ	33.	Λ	52.	Λ	71.	Σ
15.	Σ	34.	Σ	53.	Λ	72.	Λ
16.	Λ	35.	Σ	54.	Λ	73.	Σ
17.	Σ	36.	Σ	55.	Σ		
18.	Λ	37.	Σ	56.	Λ		
19.	Σ	38.	Σ	57.	Λ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Β**	**16.**	**Β**	**31.**	**Α**	**46.**	**Β**
2.	**Δ**	**17.**	**Α**	**32.**	**Δ**	**47.**	**Β**
3.	**Β**	**18.**	**Δ**	**33.**	**Β**	**48.**	**Β**
4.	**Α**	**19.**	**Ε**	**34.**	**Β**	**49.**	**Β**
5.	**Ε**	**20.**	**Γ**	**35.**	**Δ**	**50.**	**Γ**
6.	**Δ**	**21.**	**Δ**	**36.**	**Β**	**51.**	**Γ**
7.	**Γ**	**22.**	**Β**	**37.**	**Α**	**52.**	**Δ**
8.	**Δ**	**23.**	**Δ**	**38.**	**Ε**	**53.**	**Γ**
9.	**Β**	**24.**	**Γ**	**39.**	**Ε**	**54.**	**Β**
10.	**Δ**	**25.**	**Γ**	**40.**	**Ε**	**55.**	**Β**
11.	**Α**	**26.**	**Δ**	**41.**	**Ε**	**56.**	**Δ**
12.	**Δ**	**27.**	**Β**	**42.**	**Β**	**57.**	**Ε**
13.	**Ε**	**28.**	**Ε**	**43.**	**Δ**	**58.**	**Δ**
14.	**Β**	**29.**	**Γ**	**44.**	**Δ**	**59.**	**Ε**
15.	**Γ**	**30.**	**Δ**	**45.**	**Α**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Γ
2	Α
3	Ε
4	Β

2.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Β

3.

1	Γ
2	Ε
3	Α
4	Β

4.

1	Β
2	Α
3	Ε
4	ΣΤ

5.

1	Β
2	Α
3	Δ

6.

1	Β
2	Δ
3	Ε

7.

1	Γ
2	Δ
3	Α
4	ΣΤ
5	Β

8.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Δ

9.

1	Δ
2	Β
3	Ε
4	Α

10.

1	Ε
2	Β
3	Γ

11.

1	Β
2	Ε
3	Α

12.

1	Γ
2	Α
3	ΣΤ
4	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. C_4, C_1, C_5, C_3, C_2

2. C_3, C_2, C_5, C_4, C_1

3. Δ, Γ, Β, Α, Ε

4. $d_E, d_B, d_Γ, d_Δ, d_A$

5. C_2, C_1, C_3, C_4, C_5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x^2 + y^2 = 8$

β) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

γ) $(x + 2)^2 + (x - 1)^2 = 4$

δ) Έχει κέντρο το μέσο Μ (- 1, 4) του ΑΒ και ακτίνα $\frac{1}{2}$ (ΑΒ),

άρα $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$

ε) Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$

στ) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

ζ) $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 100$

η) Πρέπει να ισχύει $\rho = d\,(O, \varepsilon) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, άρα ο κύκλος έχει εξίσωση

$x^2 + y^2 = 10$

θ) Ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - 4)^2 = 16$, το (5, 4) ανήκει στον κύκλο και προκύπτει $x_0 = 9$ ή $x_0 = 1$

ι) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

ια) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

ιβ) $\rho = d\,(A, \varepsilon) = \frac{10}{5} = 2$

2. Οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες, η μεσοπαράλληλη θα έχει εξίσωση (ε): $y = - 3x + 3$ (αφού ε_1: $y = - 3x - 6$ και ε_2: $y = - 3x + 12$), το κέντρο Κ (x_0, y_0) ανήκει στην (ε), άρα $y_0 = - 3x_0 + 3$. Η απόσταση μεταξύ των $ε_1$, $ε_2$ είναι $\frac{18}{\sqrt{10}}$, άρα $ρ = \frac{9}{\sqrt{10}}$ και αφού το (1, 0) ανήκει στον κύκλο θα ισχύει: $(1 - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{81}{10}$, οπότε υπολογίζονται τα x_0, y_0 ($x_0 = 1,8$, $y_0 = - 2,4$)

3. Το κέντρο K έχει συντεταγμένες x_0, y_0 με $x_0 = y_0$ και $d(K, ε) = ρ = x_0$ (λόγω επαφής με τους άξονες), άρα $\frac{|2x_0 - 6|}{\sqrt{2}} = x_0$, άρα $x_0 = 6\sqrt{2}$

4. Από το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του κύκλου προκύπτει η εξίσωση $(λ^2 + 1) x^2 - 4x + 1 = 0$ με $Δ = - 4 (λ^2 - 3)$

α) Θα πρέπει $Δ > 0$, άρα $- \sqrt{3} < λ < \sqrt{3}$

β) Πρέπει $Δ = 0$, άρα $λ = \sqrt{3}$ ή $λ = - \sqrt{3}$

γ) Πρέπει $Δ < 0$, άρα $λ < - \sqrt{3}$ ή $λ > \sqrt{3}$

5. Το κέντρο είναι το K (1, 3). Το $λ_ε = - \frac{1}{2}$, άρα η ζητούμενη έχει εξίσωση $y - 3 = 2 (x - 1)$

6. Κάθε ευθεία έχει $λ = - 1$ και η ($ε_1$) τέμνει τον x΄x στο $(0, 4\sqrt{2})$, η $ε_2$ τον x΄x στο $(0, - 4\sqrt{2})$, άρα $ε_1$: $y - 4\sqrt{2} = - x$ και $ε_2$: $y + 4\sqrt{2} = - x$

7. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $x_0x + y_0y = 9$, το (0, 6) ανήκει στην (ε), άρα $y_0 = \frac{3}{2}$, οπότε $x_0 = \pm \frac{5}{2}$, άρα οι εφαπτόμενες είναι $(ε_1)$: $\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$ και $(ε_2)$: $-\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$

8. Το κέντρο του δοσμένου κύκλου είναι Κ (1, - 2) και ρ = d (Κ, ε) όπου ε: y - x = 0, άρα $ρ = \frac{3}{\sqrt{2}}$

9. Το σύστημα των δύο εξισώσεων δίνει την $x^2 - 4x + 4 = 0$, Δ = 0, άρα η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο (2, - 1)

10. **α)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AΓ} = 0$

β) Το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α, άρα το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται στο μέσον Μ $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ του ΒΓ και ρ = $\frac{BΓ}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

11. Προφανώς το κέντρο είναι το Ο (0, 0) και ακτίνα ρ = 3α

12. Το κοινό σημείο των ευθειών είναι το Μ (συνθ, ημθ) για το οποίο ισχύει $x^2 + y^2 = 1$, άρα το Μ ανήκει σε μοναδιαίο κύκλο

13. Αν Κ (x_0, y_0) το κέντρο, τότε $2x_0 + y_0 + 1 = 0$ (1)

Ακόμη το Κ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΒ, δηλαδή

στην (ε΄): $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 1)$, άρα $y_0 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{5}{6}$ (2)

Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα x_0, y_0. Η απόσταση ΚΑ είναι η ακτίνα

14. Τα κέντρα των κύκλων K_1 (2, 0) και K_2 (1, 0) και οι ακτίνες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 1$.

Παρατηρούμε $K_1K_2 = 1$ και $\rho_2 - \rho_1 = 1$

15. $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$

16. $(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2 = c$, άρα $3x^2 + 3y^2 - 6y + 11 - c = 0$ ή

$x^2 + y^2 - 2y + \frac{11 - c}{3} = 0$.

Για κατάλληλο c είναι κύκλος με κέντρο Κ (0, 1) που είναι το κέντρο βάρους του ΑΒΓ

17. Η εξίσωση γράφεται $(x + \frac{\lambda}{2})^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K(-\frac{\lambda}{2}, 0)$ που ανήκει πάνω στον άξονα x΄x

18. Αν Κ (0, - 2) το κέντρο του κύκλου τότε η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ΚΑ. $\lambda_{AK} = -1$, άρα $\lambda_\varepsilon = 1$ οπότε (ε): $y + 1 = 1(x + 1)$ ή $y = x$

19. **α)** $y^2 = 10x$

β) $y^2 = 2\rho x$ με $-2\rho = 16$, άρα $\rho = -8$

γ) $x^2 = 2\rho y$ με $4 = 4\rho$, άρα $\rho = 1$

δ) $x^2 = 2\rho y$ με $\rho = -8$

ε) $y^2 = 2\rho x$ με $\rho = -4$

στ) Το σύστημα των $y^2 = 2\rho x$ και $y = 4x + 1$ δίνει την $16x^2 + (8 - 2\rho)x + 1 = 0$. Πρέπει $\Delta = 0$, άρα $(8 - 2\rho)^2 = 64$, άρα $\rho = 8$

20. Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

21. Η εξίσωση της εφαπτομένης: $y_0 y = \frac{3}{2}(x + x_0)$

Για $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ προκύπτει $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$

Για $x_0 = 12$, $y_0 = 6$ προκύπτει η άλλη εφαπτομένη

22. Αν (x_0, y_0) το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε), τότε $\lambda_\varepsilon = \frac{\rho}{y_0} = \frac{3}{2y_0}$,

όμως $\lambda_\varepsilon = 2$, άρα $y_0 = \frac{3}{4}$ και $x_0 = \frac{9}{12}$

23. **α)** Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής, τότε το $K(-2, 3)$ ανήκει στην $y_0 y = 4(x + x_0)$, δηλαδή $4x_0 - 3y_0 = 8$, όμως $y_0^2 = 8x_0$. Το σύστημα δίνει τα σημεία επαφής $A(8, 8)$ και $B(\frac{1}{2}, -2)$

β) $\lambda_{AK} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{BK} = -2$

24. Η τεταγμένη του Α είναι $y_A = 4ρ$, άρα $x_A = 4ρ$. Όμοια $x_B = 4ρ$ και $y_B = -4ρ$, άρα $ΟΑ \perp ΟΒ$

25. Αν Α $(x_0, 2\sqrt{ρx_0})$, τότε Β $(x_0, -2\sqrt{ρx_0})$, και $ΟΑ = ΟΒ = 4\sqrt{ρx_0}$, άρα $4\sqrt{ρx_0} = \sqrt{ρx_0^2 + 4ρx_0}$ ή $x_0 = 12ρ$, άρα $y_0 = 4ρ\sqrt{3}$ ή $-4ρ\sqrt{3}$

26. **α)** ΕΑ = d (Α, δ) = ΚΕ εξ ορισμού (δ η διευθετούσα), άρα ΑΒ = 2ΚΕ

β) Το Α έχει συντεταγμένες $(\frac{ρ}{2}, ρ)$ και η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση (ε): $ρy = ρ\,(x + \frac{ρ}{2})$. Προφανώς το σημείο $(-\frac{ρ}{2}, 0)$ ανήκει στην (ε). Για την εφαπτομένη στο Β όμοια

27. Αν η ΟΒ έχει εξίσωση $y = λx$, $λ > 0$, τότε η ΟΓ έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{λ}x$. Τα σημεία Β, Γ έχουν συντεταγμένες $(\frac{2ρ}{λ^2}, \frac{2ρ}{λ})$ και $(2ρλ^2, 2ρλ)$ η εξίσωση της ΒΓ: $(\frac{1}{λ} + λ)\,x + (λ^2 - \frac{1}{λ^2})\,y - (\frac{2ρ}{λ} + 2ρλ) = 0$ ή $x - (λ + \frac{1}{λ})\,y - 2ρ = 0$ που περνά από το σημείο $(2ρ, 0)$ για κάθε λ

28. **α)** Ε $(\frac{1}{8}, 0)$

β) (ΑΕ) > (ΟΕ)

γ) Αν $y^2 = 2ρx$ η παραβολή με $ρ > 0$ και Α $(x_0, \sqrt{2ρx_0})$ τυχόν σημείο της, τότε $(ΑΕ) > \frac{ρ}{2} = ΟΕ$

δ) Πρέπει ΑΕ = ρ, άρα Α $(\frac{ρ}{2}, ρ)$

29. **α)** Ε (1, 0) που ανήκει στην (ε)

β) Η λύση του συστήματος δίνει Α $(3 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$, Β $(3 - 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$

γ) Αν $ε_Α$, $ε_Β$ οι εφαπτομένες, τότε $λ_{ε_Α} = \dfrac{2}{2+2\sqrt{2}}$, $λ_{ε_Β} = \dfrac{2}{2-2\sqrt{2}}$, που έχουν γινόμενο - 1

δ) Έστω Α $\left(\dfrac{y_1^2}{2ρ}, y_1\right)$, Β $\left(\dfrac{y_2^2}{2ρ}, y_2\right)$, τα δύο σημεία, τότε τα Α, Β, Ε είναι συνευθειακά και προκύπτει $\dfrac{ρ}{y_1} \cdot \dfrac{ρ}{y_2} = -1$

30. $x = \dfrac{x'}{α}$, $y = \dfrac{y'}{α}$ και $y^2 = 2ρx$, άρα $(y')^2 = 2αρ \cdot x'$

31. **α)** Αν $x = 2ρκ^2$ και $y = 2ρκ$, τότε $y^2 = 2ρx$

β) Τα σημεία Α, Β, Ε είναι συνευθειακά με Ε $\left(\dfrac{ρ}{2}, 0\right)$

32. Η εφαπτομένη (ε) στο $Μ_1$ είναι η $α^2x_1x + β^2y_1y = α_2β_2$ και έχει $λ_ε = \dfrac{-α^2x_1}{β^2y_1}$

33. **α)** Έστω Α (x_1y_1) το σημείο επαφής της παραβολής. Τότε η εφαπτομένη $ε_1$ έχει εξίσωση $4x - y_1y + 4x_1 = 0$. Πρέπει $d(0, ε_1) = \sqrt{2}$, άρα $x_1 = 2$ και $y_1 = 4$. Η εφαπτομένη $ε_2$ έχει σημείο επαφής (2, - 4) λόγω συμμετρίας

β) Οι συντελεστές διεύθυνσης είναι 1 και - 1 αντίστοιχα

34. Η απόσταση του κέντρου ενός τυχόντος κύκλου από το Α είναι ίση με την απόσταση από την (ε), άρα ισχύει ο ορισμός της παραβολής

35. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$

36. **α)** $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και Ε $(\sqrt{3}, 0)$

β) $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και Ε $(\sqrt{5}, 0)$

γ) $\varepsilon = \frac{4}{5}$ και Ε $(4, 0)$

37. Θα πρέπει ΜΕ = ΜΕ΄ = ΕΕ΄ (1)

Όμως εξ ορισμού ΜΕ + ΜΕ΄ = 2α και 2γ = ΕΕ΄, άρα θα έπρεπε 2α = 2γ, άτοπο

38. Ισχύει $\gamma = \beta$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, άρα $\alpha = \sqrt{2}\,\gamma$ και $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

39. Η δεύτερη έλλειψη γράφεται $\frac{x^2}{\frac{\alpha^2}{\kappa^2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\kappa^2}} = 1$ και έχει $\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\kappa^2} - \frac{\beta^2}{\kappa^2}}}{\frac{\alpha}{\kappa}} = \frac{\gamma}{\alpha}$

40. $\varepsilon_1^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και $\varepsilon_2^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 = \varepsilon_1^2 = [1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2]$, άρα $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

41. $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ ή $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, άρα $\beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$. Επομένως η έλλειψη έχει μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2} = 1$

43. **α)** Η συμμετρία οδηγεί στον υπολογισμό των άλλων σημείων $(-1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$

γ) Τα σημεία Μ ανήκουν σε κύκλο με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 4$ και στην έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$, άρα είναι τα σημεία του ερωτήματος (α)

44. Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο επαφής, τότε η ευθεία $9x_1x + 16y_1y = 144$ έχει $\lambda = -1$, άρα $\frac{9x_1}{16y_1} = 1$ και $9x_1^2 + 16y_1^2 = 144$. Άρα $x_1 = \pm\frac{16}{5}$, άρα $y_1 = \pm\frac{9}{5}$

45. **α)** Η μια διαγώνιος του τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης

β) $E = \frac{2\gamma \cdot 2\beta}{2}$

46. Η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτες τις $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = \frac{\alpha}{\beta}x$. Αφού $\alpha = 4$, άρα $\beta = 3$, οπότε $\gamma = 5$, άρα:

α) $E_1(0, 5)$ $E_2(0, -5)$

β) $E_1E_2 = 10$

γ) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

ε) $\varepsilon = \frac{5}{4}$

47. **α)** $E'(-3, 0)$ $E(3, 0)$, άρα $\gamma = 3$ και $\alpha = 2$ και η εξίσωσή της $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) $\gamma = 10$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 100$, άρα $\alpha = 6$ και $\beta = 8$

γ) $\gamma = 2$, $\alpha = \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, άρα $\alpha = \beta = \sqrt{2}$

48. Η παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$, η οποία αν θεωρηθεί σαν σύστημα με την εξίσωση της υπερβολής δίνει πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς x

49. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής τότε

το σύστημα $\left.\begin{aligned} x_0x - y_0y &= \alpha \\ y &= x \end{aligned}\right\}$ έχει λύση Α $\left(\frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}, \frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$ ενώ

το σύστημα $\left.\begin{aligned} x_0x - y_0y &= \alpha^2 \\ y &= -x \end{aligned}\right\}$ έχει λύση Β $\left(\frac{\alpha^2}{x_0 + y_0}, \frac{-\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$

και το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι α^2

50. $(x')^2 + c^2(y')^2 = \alpha^2$, που είναι εξίσωση έλλειψης

51. **α)** Η ε έχει $\lambda_\varepsilon = \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$, άρα η ε΄ έχει εξίσωση: $y - y_1 = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(x - x_1)$

β) Για $y = 0$, $x = x_1\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right) = x_1\varepsilon^2$

Για $x = 0$, $y = y_1\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right) = y_1 \frac{\gamma^2}{\beta^2}$

γ) Το μέσο Μ (x, y) έχει $x = \frac{x_1}{2}\varepsilon^2$ και $y = \frac{y_1}{2}\frac{\gamma^2}{\beta^2}$

δ) $x_1 = \frac{2x}{\varepsilon^2}$, $y_1 = \frac{2y\beta^2}{\gamma^2}$ ενώ $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{\frac{\gamma^4}{4\alpha^2}} - \frac{y^2}{\frac{\gamma^4}{4\beta^2}} = 1$, που

είναι εξίσωση της υπερβολής c_1: $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

ε) $\varepsilon_1^2 = 1 + \frac{B^2}{A^2} = 1 + \frac{4\beta^2}{4\alpha^2} = \varepsilon^2$

52. Αρκεί να βρεθεί το ρ. Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{4}$ και η παραβολή $y^2 = 2\rho x$, $\rho > 0$. Το σύστημα δίνει την εξίσωση $x^2 + 2\rho x - \frac{\rho^2}{4} = 0$, που έχει ρίζα $x = 1$ (λόγω του σχήματος), άρα $-\frac{\rho^2}{4} + 2\rho + 1 = 0$, άρα $\rho = 4 + 2\sqrt{5}$

53. **α)** c_1: $(x - 2\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_2: $(x - 4\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_κ: $(x - 2\nu\rho)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $2\rho + 4\rho + \ldots + 2\nu\rho = \nu(\nu + 1)\rho$

γ) $y = \rho$, $y = -\rho$

54. Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις (ε_1): $y = \frac{3}{4}x$ και (ε_2): $y = -\frac{3}{4}x$. Τα σημεία τομής των ε_1, ε_2 με την $y = 2$: Α $(\frac{8}{3}, 2)$, Β $(-\frac{8}{3}, 2)$. Στο τρίγωνο ΑΟΒ: (ΑΒ) = $\frac{16}{3}$ και το ύψος υ = 2, άρα (ΑΟΒ) = $\frac{16}{3}$

55. Αν (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $25x_1x - 4y_1y = 100$ έχει $\lambda = \frac{25x_1}{4y_1} = 3$ (1) ενώ $25x_1^2 - 4y_1^2 = 100$ (2). Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα σημεία επαφής

56. Οι εστίες της έλλειψης Ε΄ (- 3, 0) και Ε (3, 0), άρα για την υπερβολή ισχύει $\alpha = \beta$ και $\gamma = 3$, ενώ $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, άρα $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ και η υπερβολή έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$

57. Α (1, 3), Β (4,2, 4,6), Γ (4,6, 4,2) και το σύστημα:

$$\begin{aligned} \kappa + 3\lambda + \mu &= -10 \\ 4{,}6\kappa + 4{,}2\lambda + \mu &= -38{,}8 \\ 4{,}2\kappa + 4{,}6\lambda + \mu &= -38{,}8 \end{aligned}$$

έχει λύσεις κ = - 6, λ = - 6, μ = 14, άρα ρ = 2

58. **α)** αδύνατο σύστημα

β) η ΟΚ με Ο (0, 0), Κ (3, 2)

γ), δ) Α, Β, Γ, Δ τα σημεία τομής της ΟΚ με τους κύκλους

59. **α)** $\overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = 0$

β) $x^2 + y^2 = 4$

γ) απλό

δ) να δειχθεί ότι $x_0^2 + y_0^2 = 4$ (δεκτή και η γεωμετρική απόδειξη)

60. **α)** Τα σημεία τομής με τους άξονες Α $(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0)$, Β $(0, -\frac{\beta^2}{y_1})$

β) $\frac{x_1^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y_1^2}{\beta^2}$ άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \frac{\alpha}{x_1} < 1$,

άρα $-\alpha < \frac{\alpha^2}{x_1} < \alpha$, άρα το Α βρίσκεται μεταξύ των κορυφών

γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα