Κεφάλαιο 9ο:	**ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

Να χαρακτηρίσετε με «Σ» (σωστό) ή «Λ» (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.

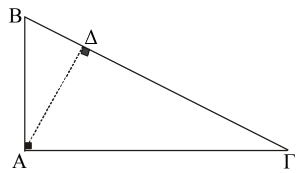
1. * Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, τότε το τρίγωνο είναι:

i. Ορθογώνιο με ορθή γωνία την Β **Σ Λ**

ii. Ορθογώνιο με ορθή γωνία την Α **Σ Λ**

ii. Ορθογώνιο με ορθή γωνία την Γ **Σ Λ**

2. * Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος ισχύει:



i. $ΑΒ^2 = ΒΔ·ΒΓ$ **Σ Λ**

ii. $ΑΓ^2 = ΑΒ·ΑΔ$ **Σ Λ**

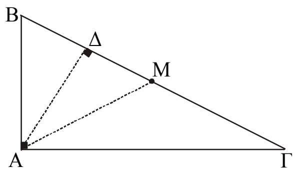
iii. $ΑΔ^2 = ΒΔ·ΔΓ$ **Σ Λ**

iv. $ΑΔ^2 = ΒΔ·ΒΓ$ **Σ Λ**

v. $ΑΒ^2 = ΒΔ·ΔΓ$ **Σ Λ**

vi. $ΑΓ^2 = ΔΓ·ΒΓ$ **Σ Λ**

3. * Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, στο οποίο η ΑΔ είναι ύψος και η ΑΜ διάμεσος, ισχύει:



i. $ΑΒ^2 = ΒΓ·ΒΔ$ **Σ Λ**

ii. $ΑΒ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2} - ΑΓ^2$ **Σ Λ**

iii. $ΑΒ^2 = ΑΜ^2 + ΒΜ^2$ **Σ Λ**

iv. $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$ **Σ Λ**

v. $ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2$ **Σ Λ**

vi. $ΑΒ^2 = \frac{ΒΓ^2}{4} + ΒΜ^2$ **Σ Λ**

4. * Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Ισχύει $α^2 > β^2 + γ^2$. **Σ Λ**

5. * Αν γ η μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο. **Σ** **Λ**

6. * Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Ισχύει $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$. **Σ** **Λ**

7. * Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο. **Σ** **Λ**

8. * Για τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ, ισχύει $ΑΒ^2 = ΒΓ\cdot ΒΔ$. **Σ** **Λ**

9. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} < 90°$ ισχύει $ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$. **Σ** **Λ**

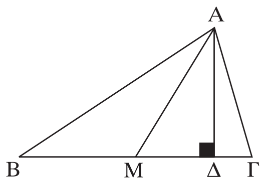
10. * Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύουν ταυτόχρονα: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. **Σ** **Λ**

11. * Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ για το οποίο να ισχύουν ταυτόχρονα: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$. **Σ** **Λ**

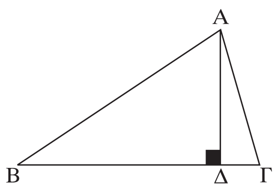
12. * Αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ α, β, γ, τότε συγκρίνοντας το τετράγωνο μιας οποιασδήποτε πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο. **Σ** **Λ**

13. * Το τρίγωνο που έχει μήκη πλευρών 5, 7, 9 είναι οξυγώνιο. **Σ** **Λ**

14. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει διάμεσο την ΑΜ και ύψος το ΑΔ ισχύει: $\left|ΑΓ^2 - ΑΒ^2\right| = 2ΒΓ\cdot ΔΜ$. **Σ** **Λ**

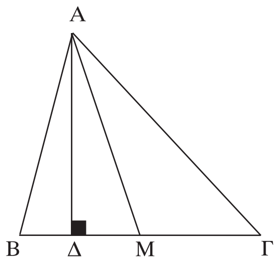


15. * Στο διπλανό σχήμα, αν το ΑΔ είναι ύψος, ισχύει $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΔ\cdot ΔΓ$. **Σ** **Λ**



16. * Αν ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην πλευρά β τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και ισχύουν ταυτόχρονα:
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta ΑΔ$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta ΑΔ$,
τότε το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. **Σ** **Λ**

17. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6 cm, ΑΓ = 8 cm και ΒΓ = 7 cm. Η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Το ΔΜ ισούται με 2 cm.



Σ **Λ**

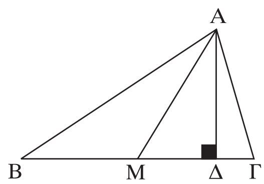
18. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μ_α είναι διάμεσός του.

Ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$.

Σ **Λ**

19. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Ισχύει:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \dfrac{ΔΜ^2}{2}$.



Σ **Λ**

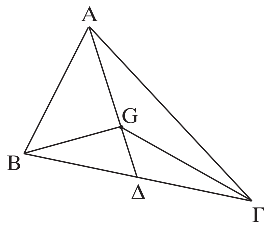
20. * Αν γνωρίζουμε τις διαμέσους ενός τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές του.

Σ **Λ**

21. * Η απόδειξη των θεωρημάτων της διαμέσου, μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της γενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

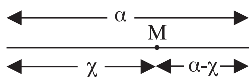
Σ **Λ**

22. * Το G είναι το βαρύκεντρο τριγώνου ΑΒΓ. Ισχύει $\dfrac{ΔΒ}{ΔΓ} = \dfrac{BG}{ΓG}$.



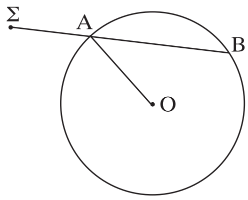
Σ **Λ**

23. * Το ευθύγραμμο τμήμα α διαιρείται σε μέσο και άκρο λόγο από το σημείο Μ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο λόγος $\varphi = \frac{\alpha}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ εκφράζει το λόγο της χρυσής τομής.



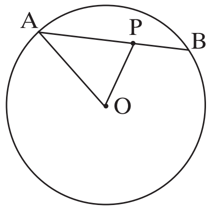
Σ **Λ**

24. * Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και ΣΟ = δ, ΟΑ = R. Ισχύει $ΣΑ \cdot ΑΒ = \delta^2 - R^2$.



Σ **Λ**

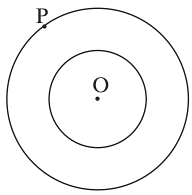
25. * Το σημείο Ρ είναι εσωτερικό του κύκλου (Ο, R) και ΟΡ = δ < R. Αν μια ευθεία διέρχεται από το Ρ και τέμνει τον κύκλο στα Α, Β, τότε $ΡΑ.ΡΒ = R^2 - \delta^2$.



Σ **Λ**

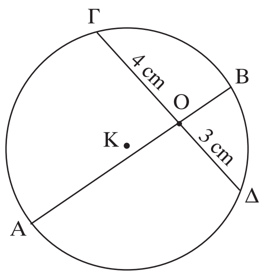
26. * Η δύναμη σημείου ως προς κύκλο και η απόσταση του σημείου από το κέντρο είναι ποσά ανάλογα. **Σ** **Λ**

27. * Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι. Σημείο Ρ κινείται στον εξωτερικό κύκλο. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον εσωτερικό κύκλο είναι σταθερή.



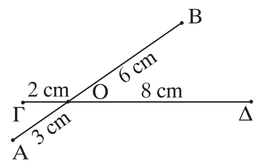
Σ **Λ**

28. * Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΓ = 4 cm, ΟΔ = 3 cm και $ΟΒ = \frac{ΟΑ}{3} = x$. Η τιμή του x είναι 2 cm.



Σ **Λ**

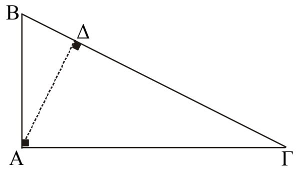
29. ***** Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο και είναι ΟΑ = 3 cm, ΟΒ = 6 cm, ΟΓ = 2 cm και ΟΔ = 8 cm. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.



Σ **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Οι παρακάτω σχέσεις αναφέρονται στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος. **Λανθασμένη** είναι η σχέση:



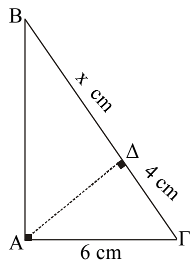
i. $Α\Delta^2 = Β\Delta \cdot \Delta\Gamma$ **ii.** $ΑΒ^2 = Β\Delta \cdot Β\Gamma$

iii. $Α\Gamma^2 = Β\Delta \cdot \Delta\Gamma$ **iv.** $ΑΒ^2 + Α\Gamma^2 = Β\Gamma^2$

v. $\dfrac{ΑΒ^2}{Α\Gamma^2} = \dfrac{Β\Delta}{\Delta\Gamma}$

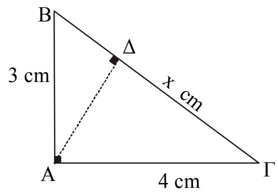
2. * Στο διπλανό σχήμα η ΔΒ σε cm ισούται με:

i. 3 **ii.** 4 **iii.** 5 **iv.** 6 **v.** 7



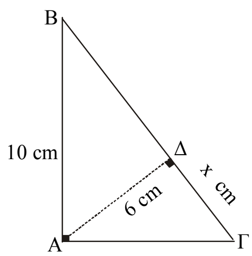
3. * Στο διπλανό σχήμα η ΔΓ σε cm ισούται με:

i. 2 **ii.** 3 **iii.** 2,2 **iv.** 3,2 **v.** 3,5



4. * Στο διπλανό σχήμα η ΔΓ σε cm ισούται με:

i. 5,5 **ii.** 8 **iii.** 4 **iv.** 5 **v.** 4,5



5. * Αν το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου είναι $\sqrt{5}α$, τότε τα μήκη των καθέτων πλευρών του είναι:

i. $3α$, $\sqrt{2}α$ **ii.** $α$, $\sqrt{2}α$ **iii.** $α$, $2α$ **iv.** $α$, $\sqrt{5}α$ **v.** $\sqrt{3}α$, $2α$

6. * Αν το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου είναι $\sqrt{2}\alpha$, τότε τα μήκη των καθέτων πλευρών του είναι:

i. $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$ **ii.** α, $\frac{1}{2}\alpha$ **iii.** $\frac{1}{3}\alpha$, α **iv.** $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$ **v.** α, α

7. * Η διαγώνιος τετραγώνου είναι 4 cm. Το μήκος της πλευράς του σε cm ισούται με:

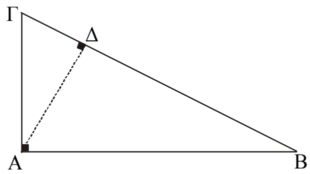
i. $2\sqrt{2}$ **ii.** 5 **iii.** $5\sqrt{2}$, **iv.** $3\sqrt{2}$ **v.** 2

8. * Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι μέση ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων με μήκη 2 cm και 4 cm έχει μήκος σε cm:

i. 8 **ii.** $3\sqrt{2}$ **iii.** 6, **iv.** $2\sqrt{2}$ **v.** 3

9. * Στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος ισχύει $\frac{AB}{A\Gamma} = 2$. Ο λόγος $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ ισούται με:

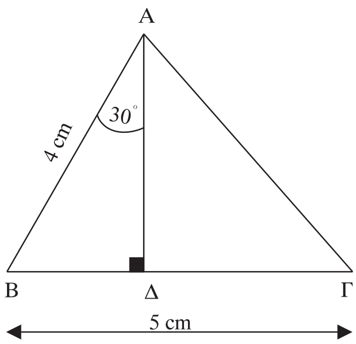
i. 3 **ii.** 4 **iii.** 2 **iv.** 1 **v.** 5



10. * Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = 4 cm, ΒΓ = 5 cm και το ΑΔ ύψος και η γωνία ΒΑΔ = 30°. Το μήκος της πλευράς ΑΓ σε cm ισούται με:

i. 3 **ii.** $\sqrt{41}$ **iii.** $\sqrt{10}$

iv. $\sqrt{21}$ **v.** $\sqrt{20}$

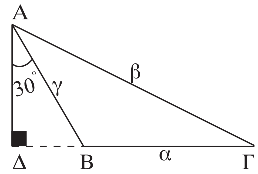


11. * Στο διπλανό σχήμα ισχύει:

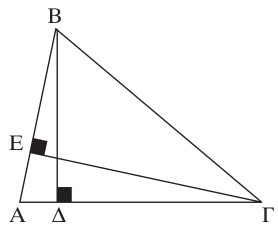
i. $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\gamma$ **ii.** $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha B\Delta$

iii. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma$ **iv.** $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma$

v. $\beta^2 = \gamma^2 + \Delta\Gamma^2$



12. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} < 90°$ φέρνουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Από τις παρακάτω ισότητες **λανθασμένη** είναι:



i. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta A\Delta$

ii. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma AE$

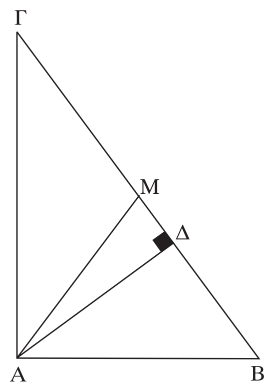
iii. $\alpha^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ **iv.** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta A\Delta$

v. $\alpha^2 = EB^2 + E\Gamma^2$

13. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ = ΑΒ στην ΑΓ τότε η γωνία ΑΒΔ είναι:

i. 45° **ii.** 30° **iii.** 60° **iv.** 75° **v.** 15°

14. * Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90°$, β > γ, το ΑΔ ύψος και η ΑΜ = μ_α διάμεσος. Από τις παρακάτω σχέσεις λανθασμένη είναι:



i. $\beta^2 + \gamma^2 = 4AM^2$

ii. $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\Delta M$

iii. $\beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + \alpha\Delta M$

iv. $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$

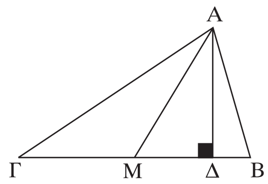
v. $\gamma^2 + \mu_\alpha^2 = 2A\Delta^2 + \dfrac{BM^2}{2}$

15. * Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) είναι:

i. $\beta^2 + \gamma^2 = \mu_\alpha^2$ **ii.** $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$ **iii.** $\beta^2 + \gamma^2 = 3\mu_\alpha^2$

iv. $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_\alpha^2$ **v.** $\beta^2 + \gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$

16. * Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ < ΑΓ, την ΑΜ διάμεσο και το ΑΔ ύψος. Ισχύει:



i. $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2ΒΓ.ΓΔ$

ii. $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = 2ΒΓ.ΔΜ$

iii. $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΒΓ.ΔΜ$

iv. $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = 2ΑΜ.ΔΜ$ **v.** κανένα από τα προηγούμενα

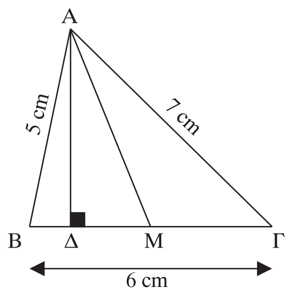
17. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει: $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βΑΔ$, όπου ΑΔ η προβολή της γ πάνω στη β. Αν έχουμε β < ΑΔ, τότε:

i. $\hat{Γ} < 90°$ **ii.** $\hat{Γ} > 90°$ **iii.** $\hat{Γ} = 90°$ **iv.** $\hat{Α} > 90°$ **v.** $\hat{Β} > 90°$

18. * Αν α = 10 cm, β = 9 cm και γ = 7 cm είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ τότε η προβολή ΑΔ της πλευράς γ πάνω στη β σε cm είναι:

i. $\frac{5}{3}$ **ii.** 8 **iii.** 9 **iv.** $\frac{17}{2}$ **v.** $\frac{19}{2}$

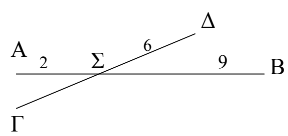
19. * Στο διπλανό τρίγωνο είναι ΑΒ = 5 cm, ΑΓ = 7 cm και ΒΓ = 6 cm. Η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Το ΔΜ έχει μήκος:



i. 1 **ii.** 2 **iii.** 2,5

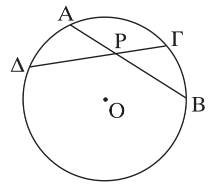
iv. 3 **v.** 4

20. * Στο διπλανό σχήμα είναι ΣΑ = 2 cm, ΣΒ = 9 cm, ΣΔ = 6 cm. Για να είναι ομοκυκλικά τα σημεία Α, Γ, Β και Δ, το ΓΣ πρέπει να ισούται με:



i. $\frac{6}{9}$ **ii.** $\frac{6\,.\,9}{2}$ **iii.** $\frac{2\,.\,6}{2}$ **iv.** $\frac{15}{2}$ **v.** 3

21. * Στο διπλανό σχήμα η σωστή σχέση είναι:

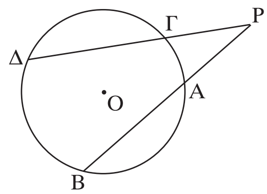


i. ΡΑ·ΡΓ = ΡΔ·ΡΒ **ii.** ΡΑ·ΡΒ = ΡΓ·ΡΔ

iii. ΡΑ·ΑΒ = ΡΓ·ΓΔ **iv.** ΡΑ·ΡΔ = ΡΓ·ΡΒ

v. ΡΑ·ΓΔ = ΡΓ·ΑΒ

22. * Στο διπλανό σχήμα η σωστή σχέση είναι:



i. ΡΑ·ΑΒ = ΡΓ·ΓΔ **ii.** ΡΑ·ΡΒ = ΡΓ·ΡΔ

iii. ΡΑ·ΡΔ = ΡΓ·ΡΒ **iv.** ΡΑ·ΓΔ = ΡΓ·ΑΒ

v. ΡΑ·ΡΓ = ΑΒ·ΓΔ

23. * Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τη χορδή ΑΒ. Σημείο Ρ μετακινείται πάνω στη χορδή. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο γίνεται μέγιστη όταν:

i. το Ρ είναι ένα από τα άκρα Α και Β

ii. το Ρ είναι μέσο της ΑΒ

iii. οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ

iv. το Ρ διαιρεί το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο

v. κανένα από τα παραπάνω

24. * Το πρόβλημα της χρυσής τομής είναι:

i. η διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο

ii. η διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος στο μέσο

iii. η διαίρεση κύκλου σε δύο τόξα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου

iv. η διαίρεση γωνίας σε τρεις ίσες γωνίες

v. κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. * Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα αναφέρονται τα μήκη των πλευρών τεσσάρων τετραγώνων. Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το στοιχείο της στήλης Β που αντιστοιχεί στο μήκος της διαγωνίου του.

στήλη Α ***Μήκος πλευράς τετραγώνου***	**στήλη Β** ***Μήκος διαγωνίου τετραγώνου***
1. $4α$ **2.** $\sqrt{72}\,α$ **3.** $4\sqrt{2}\,α$ **4.** $\sqrt{5}\,α$	**Α.** $\sqrt{10}\,α$ **Β.** $6α$ **Γ.** $8α$ **Δ.** $4\sqrt{2}\,α$ **Ε.** $12α$ **ΣΤ.** $\sqrt{6}\,α$

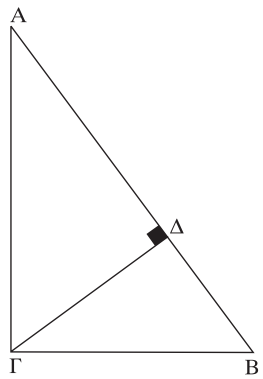
1	**2**	**3**	**4**

2. * Στη στήλη Α έχουμε είδη μιας γωνίας τριγώνου ΑΒΓ και στη στήλη Β σχέσεις μεταξύ των πλευρών του. Να αντιστοιχήσετε σε κάθε γωνία της στήλης Α την αντίστοιχη σχέση από τη στήλη Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $A = 90°$	**Α.** $β^2 = α^2 - γ^2$
	Β. $α^2 < β^2 + γ^2$
2. $A < 90°$	**Γ.** $α^2 > β^2 + γ^2$
	Δ. $α^2 + γ^2 = β^2$
3. $B = 90°$	**Ε.** $γ^2 - β^2 > α^2$
4. $B < 90°$	**Ζ.** $β^2 < γ^2 + α^2$
	Η. $γ^2 = α^2 + β^2$

1	**2**	**3**	**4**

3. * Από κάθε σχήμα της στήλης Α προκύπτει μια σχέση της στήλης Β. Να αντιστοιχήσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με την αντίστοιχη σχέση της στήλης Β.

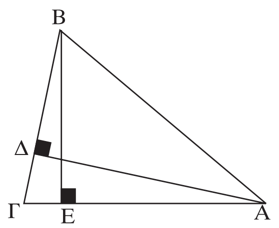
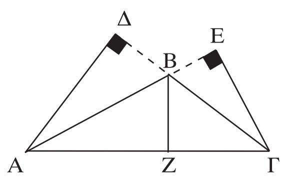
<table>
<tr><th colspan="2">στήλη Α</th><th>στήλη Β</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td rowspan="3">Α. $Γ\Delta^2 = Α\Delta.\Delta Β + ΑΒ.ΒΓ$

Β. $Α\Delta^2 + Β\Delta^2 = ΑΕ^2 + ΕΒ^2$

Γ. $ΑΒ^2 = Α\Delta^2 + Β\Delta^2 + Β\Delta.Α\Delta$

Δ. $ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = Α\Delta^2 - Β\Delta^2$

Ε. $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 + ΑΓ^2 + 2ΒΓ.\Delta Γ$

Ζ. $Α\Delta^2 + Γ\Delta^2 = ΑΕ^2 + ΕΓ^2$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td></tr>
</table>

1	2	3

4. * Στο επίπεδο του κύκλου (Ο, R) παίρνουμε σημείο Σ που απέχει απόσταση δ από το κέντρο Ο του κύκλου. Φέρνουμε από το σημείο Σ ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Να αντιστοιχήσετε κάθε θέση του σημείου Σ που περιγράφεται στη στήλη Α με την αντίστοιχη τιμή του γινομένου ΣΑ·ΣΒ που βρίσκεται στη στήλη Β.

στήλη Α ***Το σημείο είναι:***	**στήλη Β** ***Τιμή του γινομένου ΣΑ·ΣΒ***
1. εσωτερικό του κύκλου	**Α.** $\delta^2 - R^2$
	Β. $R^2 - \delta^2$
2. εξωτερικό του κύκλου	**Γ.** 0
3. πάνω στο κέντρο	**Δ.** δ^2
	Ε. R^2
4. πάνω στον κύκλο	**Ζ.** $R^2 + \delta^2$

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

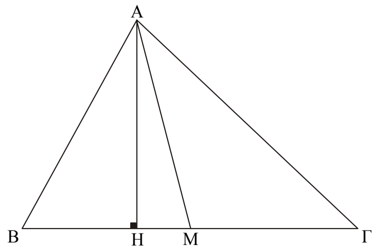
1. * Με βάση το διπλανό σχήμα, όπου ΑΗ ύψος και ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i. $ΑΓ^2 = ΑΜ^2 + ΜΓ^2 + 2ΜΓ$ ....

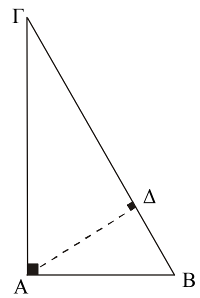
ii. $ΑΜ^2 = ΑΗ^2 +$ ……

iii. $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 =$ ……

iv. $2ΑΜ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2$ ....

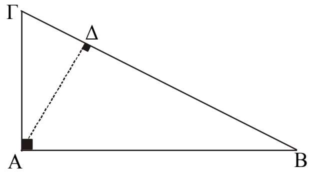


2. * Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος να συμπληρωθεί ο πίνακας:



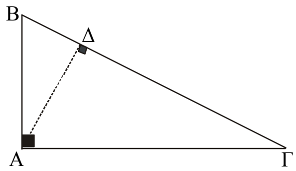
ΑΒ	3
ΑΓ	4
ΒΓ	
ΓΔ	
ΔΒ	
ΑΔ	

3. * Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος να συμπληρωθεί ο πίνακας:



ΔΓ	4
ΑΓ	8
ΒΓ	
ΑΒ	
ΔΒ	
ΑΔ	

4. * Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το διπλανό σχήμα:



i. $ΑΒ^2 = ΒΔ\cdot$ ……

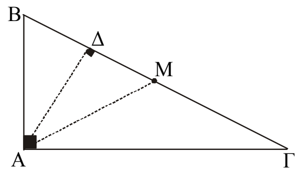
ii. $ΑΓ^2 = ΒΓ\cdot$ ……

iii. $ΑΔ^2 =$ …… · ……

iv. $ΑΓ\cdot ΑΒ =$ …… · ……

v. $ΒΓ^2 = (……)^2 + (……)^2$

5. * Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το διπλανό σχήμα:



i. $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 +$ ……

ii. $ΑΓ^2 = ΔΓ^2 +$ ……

iii. $ΑΓ^2 = ΔΓ \cdot$ ……

iv. $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot$ ……

v. $ΑΔ^2 = ΑΓ^2 -$ ……

vi. $ΑΜ^2 = ΑΔ^2 +$ ……

vii. $2ΑΜ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 -$ ……

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α, έχουμε ΒΓ = 4 cm και ΑΒ = 7 cm. Να υπολογίσετε:
   i. Το ύψος ΑΗ
   ii. Το ύψος ΒΚ

2. ** Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΒ + ΑΓ = $2 + \sqrt{2}$. Να υπολογίσετε:
   i. Την πλευρά ΑΒ
   ii. Τη διαγώνιο ΑΓ

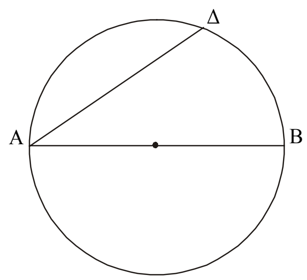
3. ** Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, r). Αν η πλευρά ΑΒ = 16 cm και η ακτίνα r = 4 cm, να υπολογίσετε:
   i. Την πλευρά ΒΓ του τριγώνου
   ii. Την πλευρά ΑΓ του τριγώνου

4. ** Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει ύψος ΑΗ. Αν ισχύει ΒΓ - ΑΗ = 12 cm, να υπολογίσετε:
   i. Την πλευρά του
   ii. Το ύψος του υ

5. ** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές 5α, 5β, 5γ είναι τρίγωνο ορθογώνιο.

6. ** Η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών τριγώνου ισούται με τη διαφορά των τετραγώνων των προβολών τους πάνω στην τρίτη πλευρά.

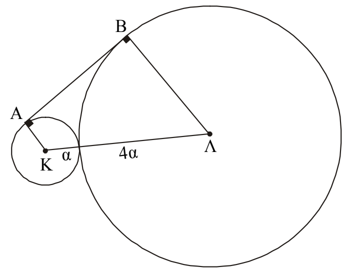
7. ** Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και η ΑΔ τυχαία χορδή του. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι μέση ανάλογος της διαμέτρου ΑΒ και της προβολής της πάνω στη διάμετρο ΑΒ.



8. ** Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΒΔ. Να δείξετε ότι:
$(ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΓΔ)^2 + 2\,(ΑΔ)^2 + 3\,(ΒΔ)^2$.

9. ** Δύο κύκλοι με ακτίνες α και 4α εφάπτονται εξωτερικά, όπως στο σχήμα. Αν ΑΒ είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων:

i. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΛΒ είναι τραπέζιο.
ii. Να υπολογίσετε το μήκος ΑΒ συναρτήσει του α.



10. ** Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

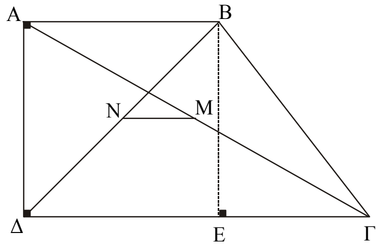
i. Το ύψος του υ
ii. Το ύψος υ΄ του ισόπλευρου τριγώνου, που η πλευρά του είναι ίση με το ύψος υ του πρώτου τριγώνου.

11. ** Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 84 m. Να υπολογιστούν οι διαγώνιοί του, αν γνωρίζουμε ότι η μία είναι τα $\frac{3}{5}$ της άλλης.

12. ** Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \frac{E\Gamma}{2}$

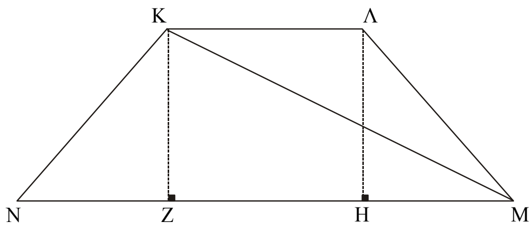
ii. $B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4MN^2$.



13. ** Στο ισοσκελές τραπέζιο ΚΛΜΝ να δείξετε:

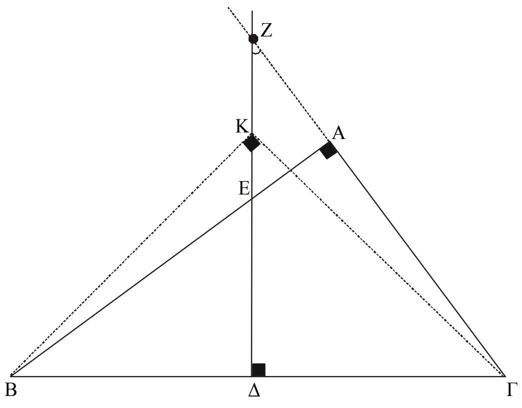
i. ΖΝ = ΗΜ

ii. $KM^2 - KN^2 = K\Lambda \cdot MN$



14. ** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) η $AB = \frac{3}{4} A\Gamma$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου, να δείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{16} \Delta\Gamma$.

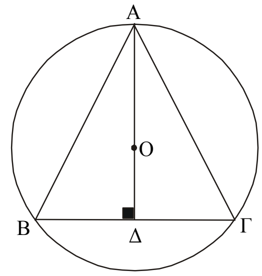
15. ** Έστω Δ τυχαίο σημείο στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Η κάθετη στο Δ τέμνει την ΑΒ στο Ε και την προέκτασή της ΑΓ στο Ζ. Αν Κ σημείο της ΔΖ τέτοιο ώστε $B\hat{K}\Gamma = 90°$, να δείξετε:



i. $\Delta K^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

ii. $\Delta K^2 = \Delta Z \cdot \Delta E$

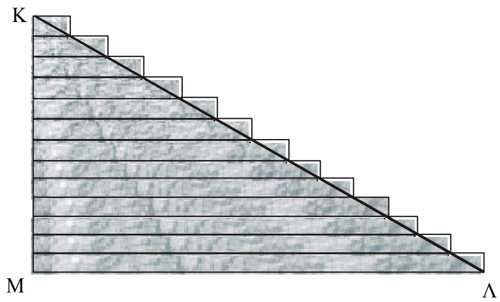
16. ** Σ’ ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η βάση του ΒΓ και το ύψος του ΑΔ έχουν το ίδιο μήκος 8 cm. Να υπολογιστεί η ακτίνα R του περιγεγραμμένου του κύκλου.



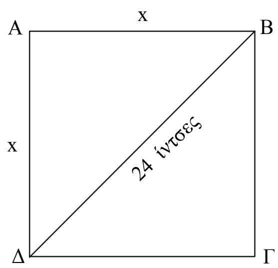
17. ** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, να δείξετε ότι $\dfrac{A\Gamma^2}{AB^2} = 3$.

18. ** Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ΔΒ = ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΓΕ. Αν ισχύει ΑΒ = 4ΒΕ, να δείξετε ότι $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \dfrac{3}{2}\, A\Gamma^2$.

19. ** Να υπολογίσετε την απόσταση ΚΛ της τσιμεντένιας σκάλας, αν το πλάτος κάθε σκαλοπατιού είναι 40 cm και το ύψος του 30 cm.



20. ** Να υπολογίσετε (σε ίντσες) την πλευρά τετράγωνης οθόνης τηλεόρασης 24 ιντσών.



Σημείωση: *Με την έκφραση «τηλεόραση α ιντσών» εννοούμε ότι η διαγώνιος της οθόνης είναι α ίντσες.*

21. ** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ (ως προς τις γωνίες του) του οποίου οι πλευρές γ, β, α, είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6 αντιστοίχως. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, να δείξετε ότι $ΑΔ = \dfrac{α+β+γ}{30}$.

22. ** Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 2, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. Να δείξετε ότι η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά με μήκος $\sqrt{6}$ είναι 60°.

23. ** Ενός τριγώνου ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι 5 cm, 3 cm και 7 cm.

i. Να προσδιοριστεί το είδος του ως προς τις γωνίες του.

ii. Να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του.

24. ** Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 11 παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε να είναι ΒΔ = 3 και ΔΓ = 7. Να υπολογίσετε το ΑΔ.

25. ** Να βρείτε το είδος του τριγώνου αν έχει διαμέσους με μήκη 3, 4, 5.

26. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ορθόκεντρο Η να δείξετε ότι:
$ΗΓ^2 - ΗΒ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2$.

27. ** Αν κ, λ, $\sqrt{κ^2 + λ^2 - κλ}$ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά που έχει μήκος $\sqrt{κ^2 + λ^2 - κλ}$.

28. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι αν $μ_β < μ_γ$, τότε β > γ.

29. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120°$. Αν ΒΔ είναι το ύψος του, τότε να δείξετε ότι:

i. $ΑΔ = \frac{γ}{2}$

ii. $α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$

30. ** Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι: ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 7 cm.

i. Να δείξετε ότι η γωνία Β είναι αμβλεία.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή ΒΔ της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

iii. Να υπολογίσετε τη γωνία Β.

31. ** Για τις βάσεις ΑΒ και ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ έχουμε ΓΔ = 2ΑΒ. Να δείξετε ότι $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2$.

32. ** Σε κύκλο (Κ, R) παίρνουμε σημείο Μ μιας χορδής ΑΒ. Να δείξετε ότι $ΚΜ^2 + ΜΑ \cdot ΜΒ = R^2$.

33. Με εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) να αποδείξετε ότι: $μ_α = \frac{α}{2}$.

34. ** Με εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α να αποδείξετε ότι το ύψος του ισούται με $\frac{α\sqrt{3}}{2}$.

35. ** Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ. Παίρνουμε το μέσο Λ του ΒΜ και το μέσο Ν του ΜΓ. Αν είναι ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α, ΑΛ = ν και ΑΝ = λ, να αποδείξετε ότι: $β^2 + γ^2 = ν^2 + λ^2 + \frac{3α^2}{8}$.

36. ** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

37. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε πάνω στη βάση του ΒΓ τα σημεία Δ και Ε ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να δείξετε ότι: $AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$.

38. ** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90°$) να δειχθεί ότι:

i. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8\mu_\alpha^2$

ii. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$

39. ** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι μ_β και μ_γ τέμνονται κάθετα, να δείξετε ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$.

40. ** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$ και το G είναι το κέντρο βάρους του. Να αποδείξετε ότι:

i. $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{3}{2}\alpha^2$

ii. $GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2 = \dfrac{2}{3}\alpha^2$

41. ** Αν $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με διαμέσους μ_α, μ_β, μ_γ είναι ορθογώνιο.

42. ** Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικές πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με α > β, γ > δ, να αποδείξετε ότι η διαφορά $(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2)$ ισούται με το διπλάσιο της μιας διαγωνίου επί την προβολή της άλλης πάνω σ’ αυτήν.

43. ** Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

$$16\,(\mu_\alpha^2\,\mu_\beta^2 + \mu_\beta^2\,\mu_\gamma^2 + \mu_\alpha^2\,\mu_\gamma^2) = 9\,(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$$

44. ** Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + 2ΒΓ^2$.

45. ** Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και τη γωνία του Α αμβλεία. Να αποδείξετε ότι: $ΒΓ^2 = 2ΑΓ\cdot ΔΓ$, όπου Δ η προβολή του Β πάνω στην ΑΓ.

46. ** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$). Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και προς την ΑΜ στο σημείο Μ κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Σ. Να αποδείξετε ότι: $ΣΒ^2 + ΣΓ^2 = 2ΣΑ^2$.

47. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $ΓΕ = \dfrac{\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι: $ΑΕ^2 = 3\beta^2 + \gamma^2 - 3\,\mu_\alpha^2$.

48. ** Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), μια διάμετρό του ΑΒ και τα σημεία Γ και Δ της ΑΒ ώστε ΟΓ = ΟΔ = δ. Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου (Ο, R) και Ε, Ζ οι τομές των ΡΓ και ΡΔ αντιστοίχως με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι:

i. $ΔΖ = \dfrac{R^2 - \delta^2}{ΔΡ}$ και $ΓΕ = \dfrac{R^2 - \delta^2}{ΓΡ}$ $(\delta < R)$

ii. $\dfrac{ΓΡ}{ΓΕ} + \dfrac{ΔΡ}{ΔΖ}$ = σταθερό.

49. ** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $ΓΔ^2 = 2ΒΓ\cdot ΑΔ$.

50. ** Σε κύκλο (Ο, R) είναι εγγεγραμμένο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Από το Α φέρνουμε τυχούσα ευθεία η οποία τέμνει την ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι:

i. $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΑΕ$

ii. ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε εφάπτεται στην ΑΒ.

51. ** Σε κύκλο ακτίνας R = 15 cm παίρνουμε σημείο Γ που απέχει από το κέντρο 10 cm. Μια χορδή ΑΒ διέρχεται από το Γ και είναι ΑΓ = 3ΓΒ. Να βρεθεί το μήκος της χορδής.

52. ** Από σημείο Ρ εκτός κύκλου φέρνουμε την εφαπτόμενη ΡΑ και την τέμνουσα ΡΒΓ του κύκλου. Να δειχθεί ότι:

i. Το τρίγωνο ΡΑΒ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΡΓΑ.

ii. $\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \dfrac{ΡΒ}{ΡΓ}$

53. ** Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται στο Η.

i. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

ii. Να δείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΗ \cdot ΒΕ + ΑΗ \cdot ΑΔ$.

54. ** Με πλευρά τη χορδή ΑΒ = α κύκλου (Ο, R) κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ που η πλευρά του ΒΓ δεν έχει σημείο εσωτερικό του κύκλου. Αν το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του κύκλου είναι ΓΕ = 2α, να βρείτε το R.

55. ** Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν τα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ και ΡΑ = 9 cm, ΡΒ = 10 cm, ΡΓ = 15 cm, να υπολογιστεί η πλευρά ΓΔ και η εφαπτόμενη ΡΣ του κύκλου.

56. ** Δυο κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι ή ότι τέμνονται κάθετα, όταν η γωνία των εφαπτομένων τους σ’ ένα από τα σημεία τομής τους είναι ορθή. Να αποδείξετε ότι:

i. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να τέμνονται δύο κύκλοι κάθετα είναι το τετράγωνο της διακέντρου τους να είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ακτίνων τους.

ii. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) ορθογώνιοι είναι: η δύναμη του κέντρου του O_1 ως προς τον κύκλο O_2 να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του O_1, δηλαδή: $\Delta^{O_1}_{(O_2, R_2)} = R_1^2$.

57. ** Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), μια σταθερή διάμετρό του ΑΒ και μια σταθερή ευθεία $\varepsilon \perp AB$. Αν η ευθεία ε τέμνει τυχαία χορδή ΑΓ του κύκλου στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι: $A\Sigma \cdot A\Gamma$ = σταθερό.

58. ** Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), μια διάμετρο αυτού ΑΒ και ένα σημείο Ρ στην προέκταση της ΒΑ. Φέρνουμε την εφαπτομένη ΡΓ και την κάθετη στο Ρ προς την ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:
$PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$.

59. ** Να αποδείξετε ότι τα σημεία που ισαπέχουν απ’ το κέντρο του κύκλου, έχουν την ίδια δύναμη ως προς τον κύκλο αυτό.

60. ** Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) και μια διάμετρό του ΑΒ. Γράφουμε μια χορδή ΓΔ του κύκλου που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε έτσι ώστε $A\hat{E}\Delta = 45°$. Να αποδείξετε ότι: $AE \cdot EB + 2OZ^2 = R^2$, όπου Ζ η προβολή του Ο στην ΓΔ.

61. ** Δυο κύκλοι (Ο, R) και (Ο΄, R΄) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα, που γράφονται από τυχαίο σημείο της προέκτασης του ΑΒ προς τους δύο κύκλους είναι ίσα.

62. ** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Η διάμεσος του τριγώνου ΑΜ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.

i. Να υπολογίσετε το γινόμενο ΑΜ·ΜΕ συναρτήσει του α.

ii. Να υπολογίσετε το γινόμενο ΑΜ·ΜΕ συναρτήσει των β, γ και του μ_α.

63. ** Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα R. Μέσα στον κύκλο παίρνουμε σταθερό σημείο Α και κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα τη χορδή ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο της μεταβλητής της υποτείνουσας ΒΓ και Δ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΑ, να δείξετε ότι:

i. $AM^2 + KM^2 = R^2$

ii. ΜΔ = σταθερό

64. ** Επί ενός κύκλου λαμβάνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ή οι φορείς που ορίζουν τα τέσσερα αυτά σημεία τέμνονται το πολύ σε τρία σημεία. Να γράψετε όλες τις σχέσεις, που συνδέουν τις αποστάσεις των σημείων τομής από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

65. ** Με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γράφουμε κύκλο τυχαίας ακτίνας. Αν Ρ σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι: $PA^2 + PB^2 + P\Gamma^2 + P\Delta^2$ = σταθερό.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

(με τη χρήση αβαθμολόγητου χάρακα και διαβήτη)

1. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που έχουν την ιδιότητα $MA^2 + MB^2 = 50λ^2$, όταν τα Α και Β είναι σταθερά σημεία, ώστε ΑΒ = 6λ, όπου λ δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

2. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, που έχουν την ιδιότητα $MA^2 - MB^2 = 2λ^2$ όταν ΑΒ = 2λ (Α, Β σταθερά).

3. ** Να βρεθεί σημείο Ρ του τόξου μιας χορδής ΑΒ ώστε να είναι: $\frac{PA}{PB} = \frac{μ}{ν}$.

4. ** Να κατασκευασθεί το ευθύγραμμο τμήμα x ώστε $x^2 = 2α^2 + β^2$, όταν α, β είναι δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα.

5. ** Να λυθεί γεωμετρικά το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ xy &= 8 \end{aligned}\right\}$.

6. ** Δίνονται δύο σημεία Α και Β εκτός της ευθείας ε, η ευθεία ε και ο λόγος $\frac{μ}{ν}$. Να βρεθούν τα σημεία Μ της ευθείας ε, ώστε να είναι $\frac{MA}{MB} = \frac{μ}{ν}$.

7. ** Δίνονται δύο σταθερά σημεία Α και Β εκτός της ευθείας ε και η ευθεία ε. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας ε, ώστε το άθροισμα $MA^2 + MB^2$ να είναι ελάχιστο.

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ - Υ Π Ο Δ Ε Ι Ξ Ε Ι Σ

Σ Υ Ν Τ Ο Μ Ε Σ Λ Υ Σ Ε Ι Σ

Σ Τ Ι Σ Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1.	**i.**	**Λ**	**3.**	**i.**	**Σ**	**4. Σ**	**13. Λ**	**22. Λ**
	ii.	**Λ**		**ii.**	**Σ**	**5. Σ**	**14. Σ**	**23. Σ**
	iii.	**Σ**		**iii.**	**Λ**	**6. Σ**	**15. Λ**	**24. Λ**
2.	**i.**	**Σ**		**iv.**	**Σ**	**7. Λ**	**16. Σ**	**25. Σ**
	ii.	**Λ**		**v.**	**Σ**	**8. Λ**	**17. Σ**	**26. Λ**
	iii.	**Σ**		**vi.**	**Λ**	**9. Σ**	**18. Σ**	**27. Σ**
	iv.	**Λ**				**10. Σ**	**19. Λ**	**28. Σ**
	v.	**Λ**				**11. Λ**	**20. Σ**	**29. Λ**
	vi.	**Σ**				**12. Λ**	**21. Σ**	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. iii	**7. i**	**13. ii**	**19. ii**
2. iii	**8. iv**	**14. v**	**20. v**
3. iv	**9. ii**	**15. iv**	**21. ii**
4. v	**10. iv**	**16. v**	**22. ii**
5. iii	**11. iii**	**17. ii**	**23. ii**
6. v	**12. iv**	**18. i**	**24. i**

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Δ
2	Ε
3	Γ
4	Α

2.

1	Α
2	Β
3	Δ
4	Ζ

3.

1	Δ
2	Β
3	Ζ

4.

1	Β
2	Α
3	Ε
4	Γ

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. i. $ΑΓ^2 = ΑΜ^2 + ΜΓ^2 + 2ΜΓ \cdot ΗΜ$

ii. $ΑΜ^2 = ΑΗ^2 + ΗΜ^2$

iii. $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2ΒΓ \cdot ΗΜ$

iv. $2ΑΜ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 - \frac{ΒΓ^2}{2}$

2.

ΑΒ	3
ΑΓ	4
ΒΓ	5
ΓΔ	3,2
ΔΒ	1,8
ΑΔ	2,4

3.

ΔΓ	4
ΑΓ	8
ΒΓ	16
ΑΒ	$8\sqrt{3}$
ΔΒ	12
ΑΔ	$4\sqrt{3}$

4. i. $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

ii. $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

iii. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

iv. $A\Gamma \cdot AB = B\Gamma \cdot A\Delta$

v. $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

5. i. $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$

ii. $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + A\Delta^2$

iii. $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$

iv. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

v. $A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2$

vi. $AM^2 = A\Delta^2 + \Delta M^2$

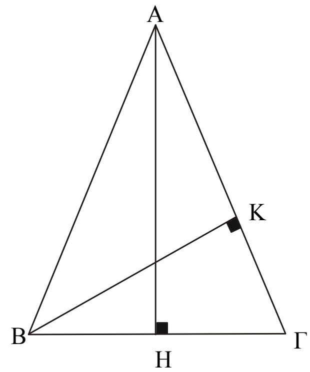
vii. $2AM^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - \frac{B\Gamma^2}{2}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ, με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, έχουμε:

$ΑΗ^2 = ΑΓ^2 - ΗΓ^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45.$

Άρα ΑΗ = $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.



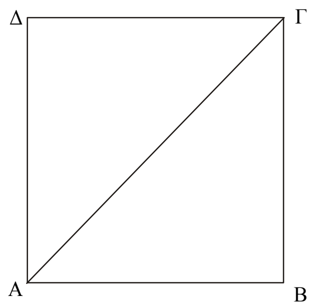
ii. Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{2} = \frac{ΑΓ \cdot ΒΚ}{2}, \text{ άρα}$$

$$ΒΚ = \frac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{ΑΓ}$$

$$ΒΚ = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}}{7} = \frac{12\sqrt{5}}{7} \text{ cm}$$

2. i. Υπολογισμός της πλευράς ΑΒ:



Έχουμε: ΑΒ + ΑΓ = 2 + $\sqrt{2}$ ή

ΑΒ + ΑΒ $\sqrt{2}$ = 2 + $\sqrt{2}$

ΑΒ (1 + $\sqrt{2}$) = 2 + $\sqrt{2}$

$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$

$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{2-1}$$

$$ΑΒ = (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

ii. Υπολογισμός της πλευράς ΑΓ:

Από την αρχική σχέση έχουμε: ΑΒ + ΑΓ = 2 + $\sqrt{2}$ ή ΑΓ = 2 + $\sqrt{2}$ - ΑΒ

Άρα ΑΓ = $2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$

ΑΓ = 2

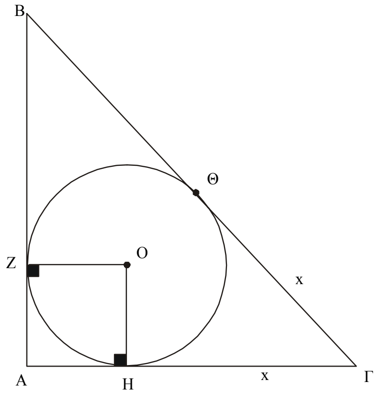
3. Είναι $ZO \perp AB$, $OH \perp A\Gamma$

$ZO = OH = 4$ cm, $AZ = 4$ cm

Άρα $BZ = 12$ cm, άρα $B\Theta = 12$ cm

Αν $\Theta\Gamma = x$, τότε $H\Gamma = x$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ και με δεδομένο ότι $AB = 16$, $A\Gamma = 4 + x$, $B\Gamma = x + 12$, έχουμε:



$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

$16^2 + (4 + x)^2 = (x + 12)^2$

$256 + 16 + 8x + x^2 = x^2 + 24x + 144$

$24x - 8x = 256 + 16 - 144$

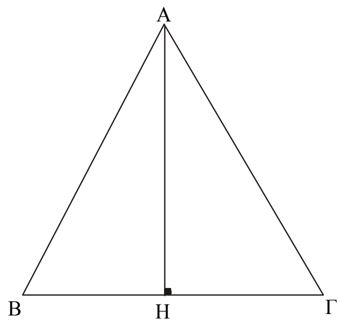
$16x = 128$

$x = \dfrac{128}{16}$, άρα $x = 8$

Άρα i. $B\Gamma = 8 + 12 = 20$ cm

ii. $A\Gamma = 4 + 8 = 12$ cm

4. i. Αν α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου, με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΗΓ έχουμε:



$AH = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Άρα η σχέση $B\Gamma - AH = 12$ cm γράφεται

$\alpha - \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = 12$. Άρα:

$\alpha\,(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 12$ ή $\alpha = \dfrac{12}{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24}{2-\sqrt{3}}$

Άρα $\alpha = 24\,(2 + \sqrt{3})$ cm

ii. $\upsilon = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα $\upsilon = \dfrac{24\,(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = 12\,(2 + \sqrt{3})\sqrt{3}$ cm =

$12\,(2\sqrt{3} + 3)$ cm.

5. $(5β)^2 + (5γ)^2 = 25β^2 + 25γ^2 = 25\,(β^2 + γ^2) = 25α^2 = (5α)^2$

Άρα το τρίγωνο με πλευρές 5α, 5β, 5γ είναι ορθογώνιο.

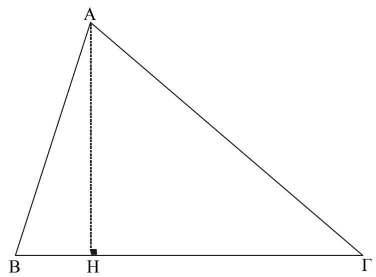
6. Έστω ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ και έχουμε:

$ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = (ΑΗ^2 + ΗΓ^2) - (ΑΗ^2 + ΒΗ^2) = ΗΓ^2 - ΗΒ^2$

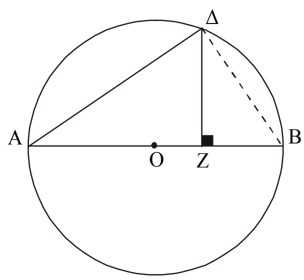
Σημείωση:

Τρίγωνο ΑΗΓ ορθογώνιο, άρα $ΑΓ^2 = ΑΗ^2 + ΗΓ^2$

Τρίγωνο ΑΗΒ ορθογώνιο, άρα $ΑΒ^2 = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$



7. Πρέπει να δείξουμε ότι $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΖ$. Φέρνουμε την ΔΒ. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ. Άρα από το ΑΔΒ τρίγωνο, έχουμε: $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΖ$ (Το τετράγωνο μιας καθέτου πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πάνω στην υποτείνουσα).

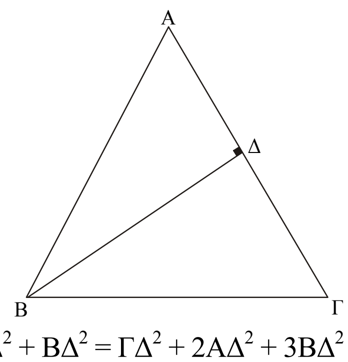


8. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο, άρα $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$

Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα $ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΔΓ^2$

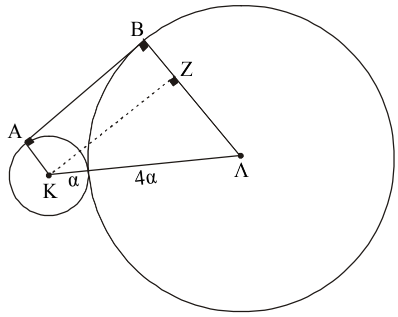
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$

Άρα



$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 + ΒΔ^2 + ΔΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = ΓΔ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$

9. i. $\left.\begin{array}{l} AK \perp AB \\ B\Lambda \perp AB \end{array}\right\}$, άρα ΑΚ // ΒΛ, άρα ΑΒΛΚ τραπέζιο

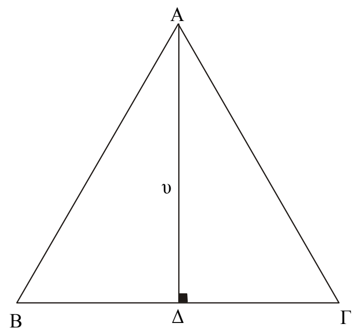


ii. Φέρνουμε ΚΖ // ΑΒ, ΚΖ = ΑΒ (ΑΚΖΒ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Το τρίγωνο ΚΖΛ είναι ορθογώνιο στο Ζ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$KZ^2 = K\Lambda^2 - Z\Lambda^2$ ή $KZ^2 = (5\alpha)^2 - (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 - 9\alpha^2 = 16\alpha^2$

$KZ = 4\alpha$, $KZ = AB = 4\alpha$

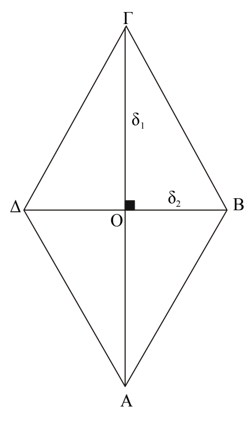
10. Το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α.



i. $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)

ii. $\upsilon' = \frac{\upsilon\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$ ή $\upsilon' = \frac{3\alpha}{4}$

11. Έστω $A\Gamma = \delta_1$, $B\Delta = \delta_2$ και $B\Gamma = \frac{84}{4} = 21$ cm



Ισχύει: $\delta_2 = \frac{3}{5}\delta_1$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε:

$\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = 21^2$ (2)

Με λύση του συστήματος των (1) και (2) έχουμε:

$$\left(\frac{\frac{3}{5}\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = 21^2 \text{ ή } \frac{9}{25}\delta_1^2 + \delta_1^2 = 441\cdot 4 \text{ ή } \frac{34}{25}\delta_1^2 = 1764$$

$$34\delta_1^2 = 25\cdot 441\cdot 4$$

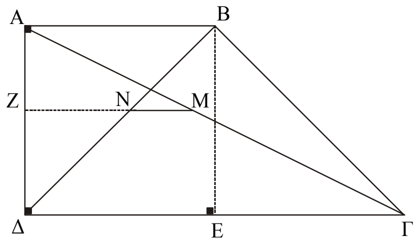
$$\delta_1^2 = \frac{25\cdot 441\cdot 4}{34}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{25\cdot 441\cdot 4}{34}} = \frac{5\cdot 2\cdot 21}{34}\sqrt{34} \text{ cm}$$

Άρα $\delta_2 = \frac{3}{5}\delta_1 = \frac{3}{5}\cdot\frac{5\cdot 2\cdot 21}{34}\sqrt{34} = \frac{\sqrt{34}\cdot 126}{34} = \frac{63\sqrt{34}}{17}$ cm

12. i. Φέρνουμε $BE \perp \Gamma\Delta$.

Η ευθεία MN διέρχεται και από το μέσον της πλευράς $A\Delta$.



Άρα $ZM = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, $ZN = \frac{AB}{2}$ και

$MN = ZM - ZN$, άρα

$$MN = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta E}{2} = \frac{E\Gamma}{2} \quad (1)$$

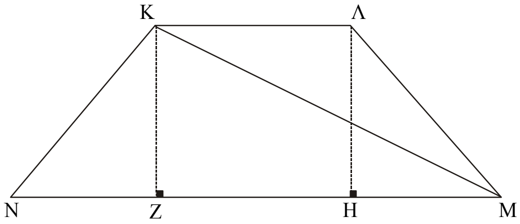
ii. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ έχουμε:

$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = A\Delta^2 + E\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 - A\Delta^2 = E\Gamma^2$ (2)

Από την (1) έχουμε: $E\Gamma = 2MN$ ή $E\Gamma^2 = 4MN^2$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4MN^2$

13. i. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΚΖΝ, ΛΗΜ έχουμε ΖΝ = ΗΜ.



ii. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΖΜ, ΚΖΝ έχουμε:

$KM^2 = KZ^2 + ZM^2 \qquad (1)$

$KN^2 = KZ^2 + ZN^2 \qquad (2)$

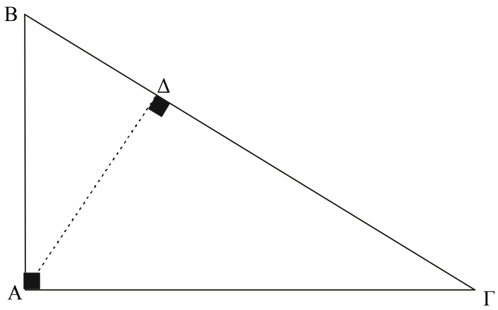
Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$KM^2 - KN^2 = ZM^2 - ZN^2 = (ZM + ZN)\,(ZM - ZN) = MN \cdot ZH = NM \cdot K\Lambda$

14. $AB = \frac{3}{4}\,A\Gamma$, άρα $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$

Αλλά $\frac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, άρα

$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

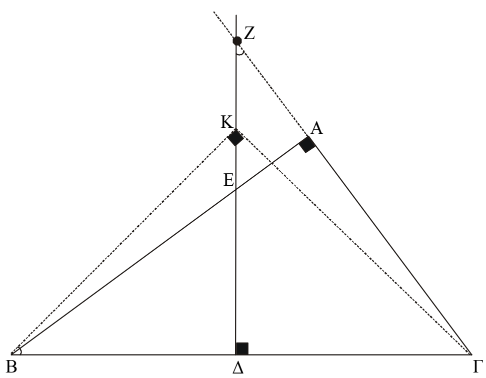


15. i. Το ΔΚ είναι ύψος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ. Άρα $\Delta K^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

ii. Αρκεί να δείξουμε $\Delta B \cdot \Delta\Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E$ ή

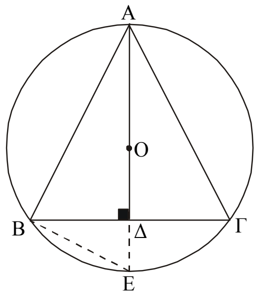
$\frac{\Delta B}{\Delta E} = \frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma}$

Τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΖΔΓ είναι ορθογώνια και $E\hat{B}\Delta = \Delta\hat{Z}\Gamma$ (έχουν κάθετες πλευρές).



Συνεπώς $B\overset{\Delta}{\Delta}E \approx Z\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$. Άρα $\Delta B \cdot \Delta\Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E$

16. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΓ = ΑΔ = 8 cm. Το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου είναι πάνω στην ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΔ και έστω Ε το σημείο τομής της με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Φέρουμε την ΒΕ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε $B\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta E$. Αλλά ΔΕ = ΑΕ - ΑΔ = 2R - 8. Άρα $4^2 = 8\,(2R - 8)$. Άρα R = 5 cm.

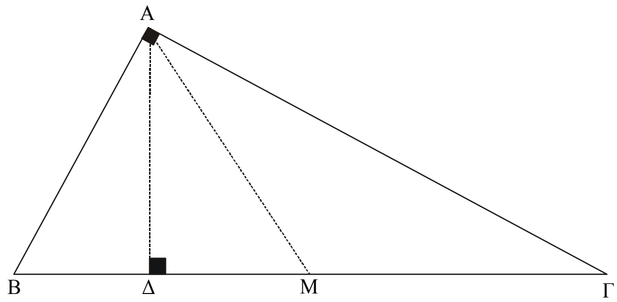


17. Το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Αφού $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$,

έχουμε $\hat{B} = 60°$,

$\hat{\Gamma} = 30°$



ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος του ΑΒΓ.

Άρα $\dfrac{A\Gamma^2}{AB^2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$ (1) $\quad AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = BM$ (2)

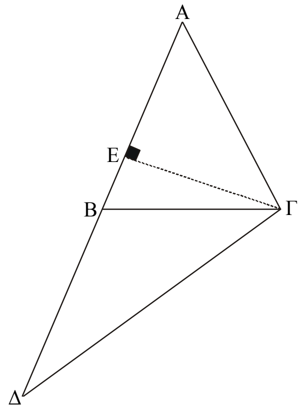
Άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο (αφού $\hat{B} = 60°$). Άρα ΑΔ ύψος και διάμεσος για το ΑΒΜ. Άρα $\Delta B = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{M\Gamma}{2}$ (3)

Άρα από (1), (3) έχουμε $\dfrac{A\Gamma^2}{AB^2} = \dfrac{\Delta M + M\Gamma}{\Delta B} = \dfrac{\Delta B + 2\Delta B}{\Delta B} = \dfrac{3\Delta B}{\Delta B} = 3$

18. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ, έχουμε:

$$ΓΔ^2 = ΔΕ^2 + ΕΓ^2 = \left(\frac{5ΑΒ}{4}\right)^2 + ΕΓ^2 =$$

$$ΑΒ^2 + \left(\frac{3ΑΒ}{4}\right)^2 + ΕΓ^2 \qquad (1)$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ, έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΕΓ^2 + ΒΕ^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$ΓΔ^2 = ΑΒ^2 + \frac{9}{16}\,ΑΒ^2 + ΕΓ^2 = ΑΒ^2 + \left(\frac{ΑΒ}{4}\right)^2 + \frac{8}{16}\,ΑΒ^2 + ΕΓ^2 =$$

$$ΑΒ^2 + ΒΕ^2 + ΕΓ^2 + \frac{8}{16}\,ΑΒ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2 + \frac{1}{2}\,ΑΒ^2 =$$

$$ΒΓ^2 + \frac{3}{2}\,ΑΒ^2 = ΒΓ^2 + \frac{3}{2}\,ΑΓ^2$$

19. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΙΝ έχουμε:

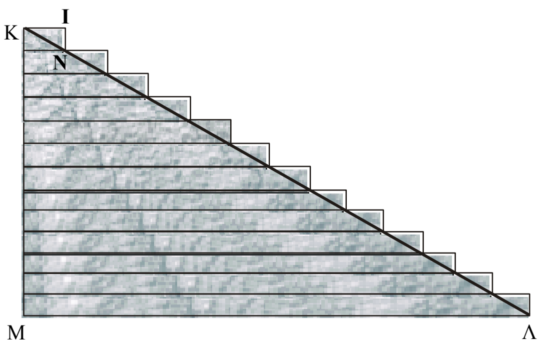
$ΚΝ^2 = 30^2 + 40^2$ ή

$ΚΝ^2 = 900 + 1600$ ή

$ΚΝ = 50$ cm

$ΚΛ = 13 \cdot 50$ cm ή

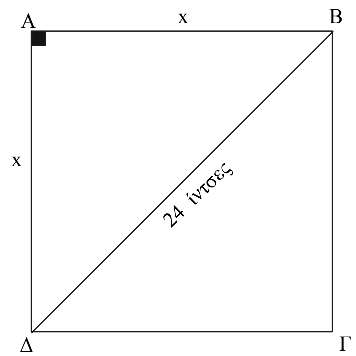
$ΚΛ = 650$ cm



20. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$2x^2 = 24^2$ ή $x^2 = 288$ ή

$x = \sqrt{288}$ ή $x \approx 17$ ίντσες



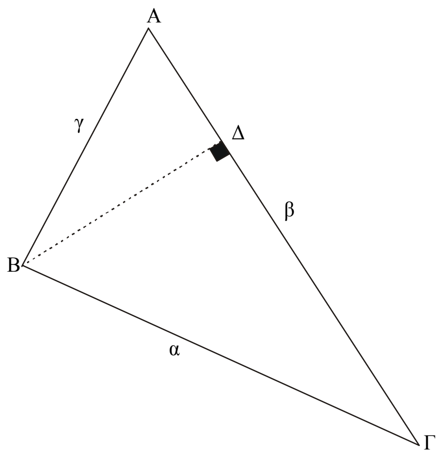
21. Αν α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $\frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha}{6} = \kappa$. Τότε:

$\gamma = 4\kappa$, $\beta = 5\kappa$, $\alpha = 6\kappa$ (1)

Ισχύει: $36\kappa^2 < 25\kappa^2 + 16\kappa^2$ ή

$36\kappa^2 < 41\kappa^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

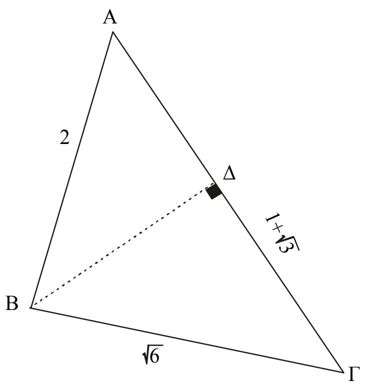
Επίσης, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:



$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\text{ΑΔ}$ ή $36\kappa^2 = 25\kappa^2 + 16\kappa^2 - 2\cdot 5\cdot\kappa\cdot\text{ΑΔ}$ ή $-5\kappa^2 = -10\kappa\cdot\text{ΑΔ}$

Άρα $\text{ΑΔ} = \frac{\kappa}{2}$ ή $\text{ΑΔ} = \frac{15\kappa}{30}$ ή $\text{ΑΔ} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{30}$ (λόγω της (1)).

22. Έστω ΒΓ = $\sqrt{6}$, ΑΓ = 1 + $\sqrt{3}$, ΑΒ = 2



Όπως προκύπτει από τις σχέσεις των μηκών των πλευρών, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$(\sqrt{6})^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

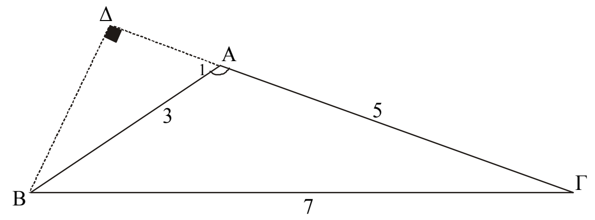
$6 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

$6 - 8 - 2\sqrt{3} = - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

$- 2\,(1 + \sqrt{3}) = - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$, άρα ΑΔ = 1

Αλλά συνΑ = $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{1}{2}$. Άρα Α = 60°.

23. i. Έχουμε: $7^2 > 5^2 + 3^2$, $49 > 34$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία $\hat{Α}$.



ii. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2\cdot5\cdotΑΔ$

$49 = 25 + 9 + 10ΑΔ$

$15 = 10ΑΔ$ ή $ΑΔ = 1{,}5$ cm

συν$\hat{Α}_1 = \dfrac{1{,}5}{3} = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$, άρα $\hat{Α}_1 = 60°$, άρα $\hat{Α} = 120°$

24. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος, έχουμε:

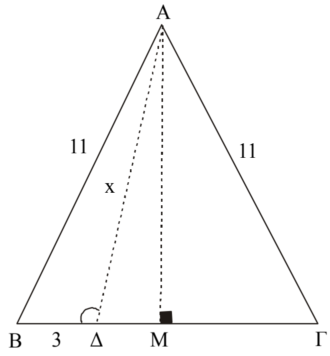
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta \cdot \Delta M$

$11^2 = x^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2$

$121 = x^2 + 9 + 12$

$121 = x^2 + 21$, άρα $x^2 = 100$, άρα $x = 10$

Άρα $A\Delta = 10$



25.
$$\left.\begin{aligned} \mu_\alpha^2 &= \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \\ \mu_\beta^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \\ \mu_\gamma^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \end{aligned}\right\}$$
. Έστω $\mu_\alpha = 5$, $\mu_\beta = 3$, $\mu_\gamma = 4$. Θα είναι:

$\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$ ή $2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$ ή

$\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2 > \alpha^2$, τότε $\hat{A} < 90°$. Παρόμοια βρίσκουμε $\hat{B} < 90°$ ή $\hat{\Gamma} < 90°$

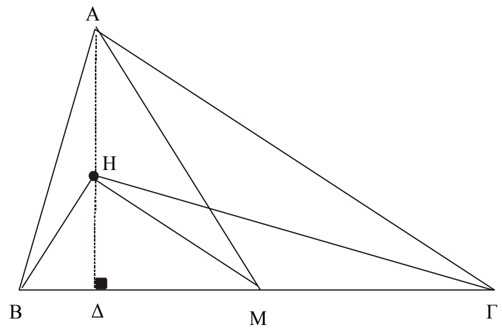
26. Έστω το Μ μέσον της ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ με εφαρμογή του 2ου θεωρήματος διαμέσων έχουμε:

$H\Gamma^2 - HB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

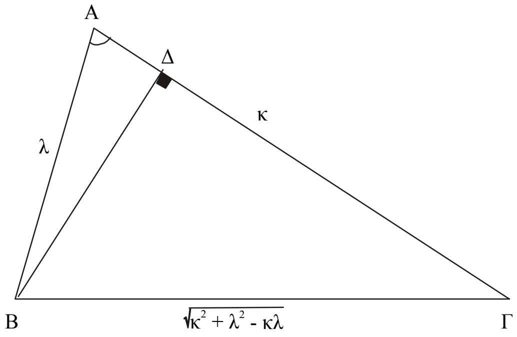
$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $H\Gamma^2 - HB^2 = A\Gamma^2 - AB^2$



27. Είναι: $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda < \kappa^2 + \lambda^2$.

Άρα η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά $\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}$ είναι οξεία.



Έχουμε: $\left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}\right)^2 =$

$\kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\cdot A\Delta$

$\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda = \kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\cdot A\Delta - \kappa\lambda = -2\kappa\cdot A\Delta$

$\lambda = 2A\Delta$ ή $A\Delta = \dfrac{\lambda}{2}$. Όμως $\text{συν}A = \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{1}}$ ή $\text{συν}A = \dfrac{1}{2}$, άρα $\hat{A} = 60°$

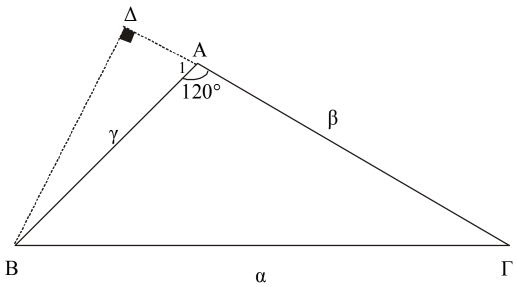
28. Ισχύει $\mu_\beta < \mu_\gamma$, άρα $\mu_\beta^2 < \mu_\gamma^2$.

Άρα $\dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} < \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$ ή $3\gamma^2 < 3\beta^2$ ή $\gamma^2 < \beta^2$. Άρα $\beta > \gamma$.

29. i. Ισχύει:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\cdot A\Delta$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:



$\text{συν}A_1 = \dfrac{A\Delta}{\gamma}$

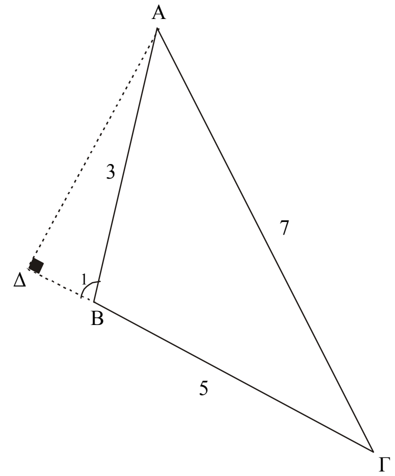
$\text{συν}60° = \dfrac{A\Delta}{\gamma}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{A\Delta}{\gamma}$, άρα $A\Delta = \dfrac{\gamma}{2}$ (2)

ii. Από (1) και (2) έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\,\dfrac{\gamma}{2}$ $\qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$

30. i. $7^2 > 3^2 + 5^2$ δηλαδή $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$, άρα $\hat{B}$ αμβλεία



ii. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \Delta B$

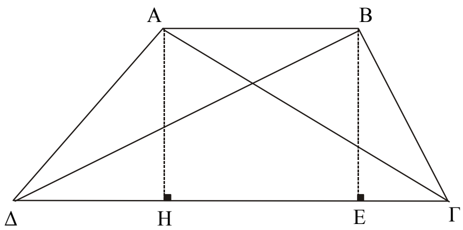
$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot \Delta B$ ή

$49 - 25 - 9 = 10\Delta B$ ή $\Delta B = 1,5$

iii. $\sigma\upsilon\nu B_1 = \dfrac{\Delta B}{AB} = \dfrac{1,5}{3} = 0,5.$

Άρα $B_1 = 60°$, άρα $\hat{B} = 120°$

31. Στο τρίγωνο ΑΔΓ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta B^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma$ (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2):

$A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma =$

$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\,(\Delta H + E\Gamma).$

Αλλά $\Delta H + E\Gamma = AB = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα: $A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \dfrac{2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Gamma}{2} =$

$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$

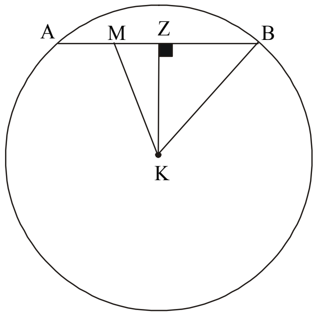
32. Στο τρίγωνο ΜΚΒ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$KB^2 = MK^2 + MB^2 - 2MB \cdot MZ$

$R^2 = MK^2 + MB\,(MB - 2MZ)$

Αλλά $MB - 2MZ = AM$

Άρα $R^2 = MK^2 + MB \cdot AM$



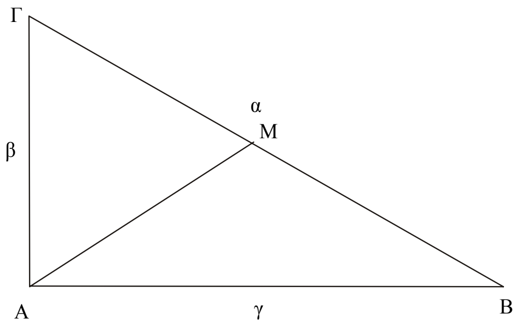
33. Έχουμε:

$$\gamma^2 + \beta^2 = 2\,\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2\,\mu_\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2\,\mu_\alpha^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4}, \text{ άρα } \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

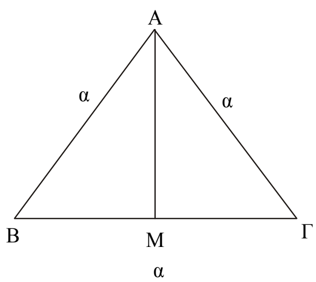


34. $AM = \mu_\alpha = \upsilon_\alpha$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2\,\mu_\alpha^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

$$2\,\mu_\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{3\alpha^2}{2}$$

Τότε: $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \upsilon_\alpha$

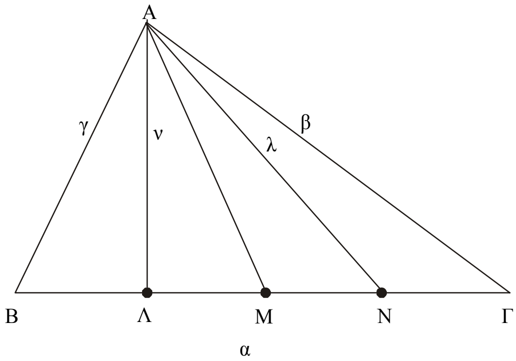


35. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A B \Gamma}}$ έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \qquad (1)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A \Lambda N}}$ έχουμε:

$$\lambda^2 + \nu^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2}.$$



Τότε: $2\mathrm{AM}^2 = \lambda^2 + \nu^2 - \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2} \qquad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε: $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2} =$

$$= \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2} = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8}, \text{ άρα } \beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{3\alpha^2}{8}$$

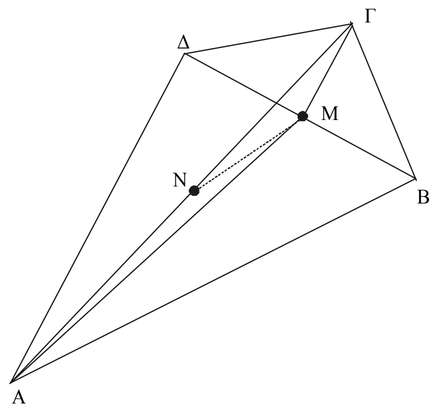
36. Έστω Μ μέσον του ΒΔ και Ν μέσον του ΑΓ.

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A B \Delta}}$ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{2} \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B \Gamma \Delta}}$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 = 2\Gamma\mathrm{M}^2 + \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{2} \qquad (2)$$

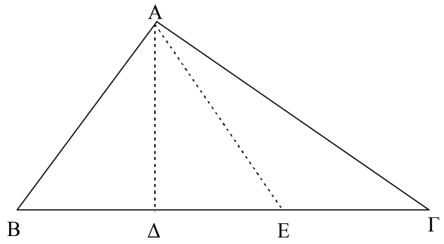


Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 = 2\,(\mathrm{AM}^2 + \Gamma\mathrm{M}^2) + \mathrm{B\Delta}^2 =$$

$$2\,(2\mathrm{MN}^2 + \frac{\mathrm{A}\Gamma^2}{2}) + \mathrm{B\Delta}^2 = 4\mathrm{MN}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B\Delta}^2 \geq \mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B\Delta}^2$$

37. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{E}$, $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$:



$$AB^2 + AE^2 = 2A\Delta^2 + \frac{BE^2}{2} \quad (1)$$

$$A\Delta^2 + A\Gamma^2 = 2AE^2 + \frac{\Delta\Gamma^2}{2} \quad \text{ή}$$

$$2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 4AE^2 + \Delta\Gamma^2 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

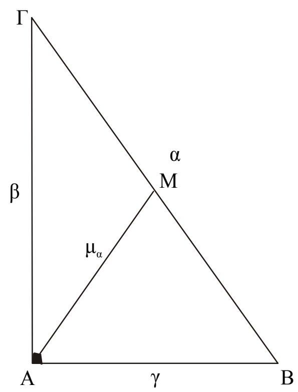
$$AB^2 + AE^2 + 2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 4AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \frac{BE^2}{2} \quad \text{ή}$$

$$AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \frac{BE^2}{2} \quad (3)$$

Αλλά: $\Delta\Gamma = 2\Delta E$, $BE = 2\Delta E$

Άρα η (3) γίνεται: $AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 4\Delta E^2 + 2\Delta E^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$

38. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:



$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

Άρα πρέπει να δειχθεί: $\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2$

Αλλά $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ ή $2\mu_\alpha = \alpha$.

Άρα $4\mu_\alpha^2 = \alpha^2$ (1)

ii. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

$=$

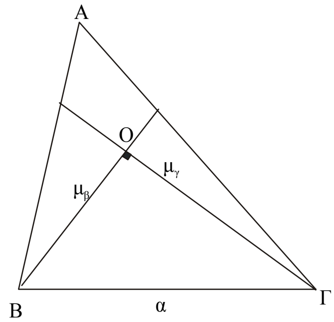
$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4} = \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = 5\mu_\alpha^2$ (λόγω της (1)).

39. Το τρίγωνο $B\overset{\Delta}{O}\Gamma$ είναι ορθογώνιο. Άρα:

$BO^2 + O\Gamma^2 = B\Gamma^2$

$(\frac{2}{3}\mu_\beta)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\gamma)^2 = \alpha^2$

$\frac{4}{9}(\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) = \alpha^2$



$\frac{4}{9}\left(\frac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}\right) = \alpha^2$ ή $4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\alpha^2$ ή $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$

40. i. $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 =$

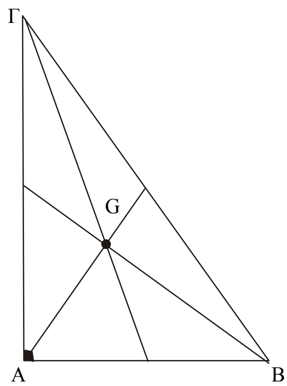
$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

$= \frac{3\beta^2 + 3\gamma^2 + 3\alpha^2}{4} = \frac{3(\beta^2 + \gamma^2) + 3\alpha^2}{4} =$

$\frac{3\alpha^2 + 3\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3}{2}\alpha^2$

ii. $GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2 = (\frac{2}{3}\mu_\alpha)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\beta)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\gamma)^2 =$

$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$



41. Ισχύει $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}$ (1)

$5\mu_\alpha^2 = 5\,\dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ (2)

$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$ (3)

Η σχέση (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2}{4}$ ή $4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2$

$9\alpha^2 = 9\beta^2 + 9\gamma^2$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ορθογώνιο

42. Πρέπει να δειχθεί ότι:

$(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) = 2A\Gamma\cdot ZH$ ή

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma\cdot ZH$

Στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εφαρμόζουμε το 2ο θεώρημα διαμέσων:

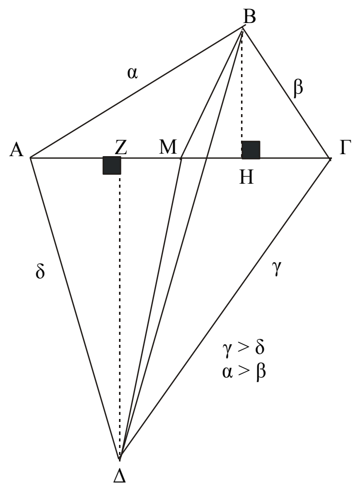
$A\overset{\Delta}{B}\Gamma$: $\alpha^2 - \beta^2 = 2A\Gamma\cdot MH$ (1)

$A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$: $\gamma^2 - \delta^2 = 2A\Gamma\cdot MZ$ (2)

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma\,(MH + MZ)$ ή

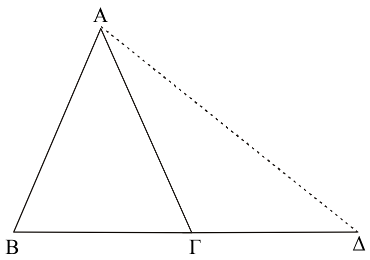
$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma\cdot ZH$



43. $16\,(\mu_\alpha^2\,\mu_\beta^2 + \mu_\beta^2\,\mu_\gamma^2 + \mu_\alpha^2\,\mu_\gamma^2) = \ldots$ (με αντικατάσταση και πράξεις) =

$9\,(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

44. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ έχουμε:

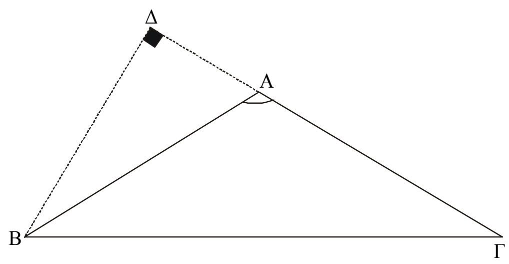


$$A\Delta^2 + AB^2 = 2A\Gamma^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$$

$$A\Delta^2 = 2A\Gamma^2 - AB^2 + \frac{B\Delta^2}{2} =$$

$$A\Gamma^2 + \frac{(2B\Gamma)^2}{2} = A\Gamma^2 + \frac{4B\Gamma^2}{2} = A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2$$

45. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$:

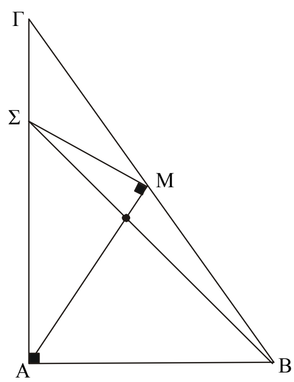


$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta =$

$2A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta =$

$2A\Gamma\,(A\Gamma + A\Delta) = 2A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

46. Στο $\Gamma\overset{\Delta}{\Sigma}B$ εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων:



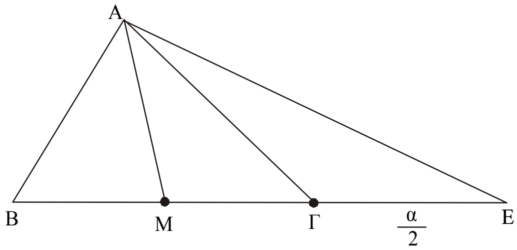
$$\Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma M^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} =$$

$$2\Sigma M^2 + \frac{(2AM)^2}{2} = 2\Sigma M^2 + 2AM^2 =$$

$2\,(\Sigma M^2 + AM^2) = 2\Sigma A^2$

(γιατί το $\Sigma\overset{\Delta}{M}A$ είναι ορθογώνιο στο Μ)

47. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{AME}$, στο οποίο η ΑΓ είναι διάμεσος και έχουμε:



$$AE^2 + AM^2 = 2A\Gamma^2 + \frac{ME^2}{2}$$

$$AE^2 = 2\beta^2 - \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1)$$

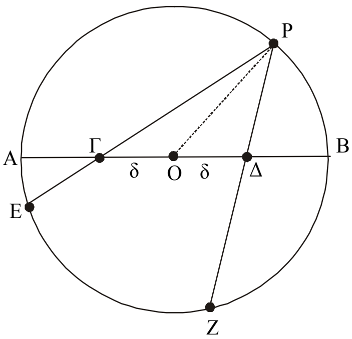
Από την εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \text{ ή } \gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \text{ ή } \frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\mu_\alpha^2 \quad (2)$$

Η σχέση (1) βάσει της (2) γίνεται:

$$AE^2 = 2\beta^2 - \mu_\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\mu_\alpha^2 \text{ ή } AE^2 = 3\beta^2 + \gamma^2 - 3\mu_\alpha^2$$

48. i. Ισχύει: $\Delta Z \cdot \Delta P = \Delta B \cdot \Delta A = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$



Άρα $\Delta Z \cdot \Delta P = R^2 - \delta^2$ ή $\Delta Z = \dfrac{R^2 - \delta^2}{\Delta P}$ (1)

Ομοίως $\Gamma E \cdot \Gamma P = A\Gamma \cdot \Gamma B = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$

Άρα $\Gamma E \cdot \Gamma P = R^2 - \delta^2$ ή $\Gamma E = \dfrac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P}$ (2)

ii. Από τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{\Gamma P}{\Gamma E} + \frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{\Gamma P}{\dfrac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P}} + \frac{\Delta P}{\dfrac{R^2 - \delta^2}{\Delta P}} = \frac{\Gamma P^2}{R^2 - \delta^2} + \frac{\Delta P^2}{R^2 - \delta^2} =$$

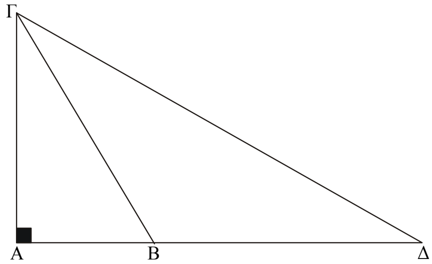
$$\frac{\Gamma P^2 + \Delta P^2}{R^2 - \delta^2} = \frac{2OP^2 + \dfrac{\Gamma\Delta^2}{2}}{R^2 - \delta^2} = \frac{2R^2 + 2\delta^2}{R^2 - \delta^2} = \text{σταθ.}$$

49. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε:

$Γ Δ^2 = Γ Β^2 + Β Δ^2 + 2 Δ Β \cdot Α Β =$

$2 Γ Β^2 + 2 Γ Β \cdot Α Β = 2 Γ Β\,(Γ Β + Α Β) =$

$2 Γ Β\,(Β Δ + Α Β) = 2 Γ Β \cdot Α Δ$



50. i. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο $Α\overset{\Delta}{Β}Δ$ έχουμε:

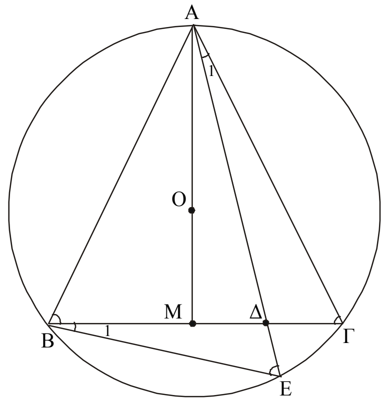
$Α Β^2 = Α Δ^2 + Β Δ^2 - 2 Β Δ \cdot Μ Δ$

$Α Β^2 = Α Δ^2 + Β Δ\,(Β Δ - 2 Μ Δ) \quad (1)$

Αλλά:

$Β Δ - 2 Μ Δ = Β Δ - Μ Δ - Μ Δ =$

$\dfrac{Β Γ}{2} - Μ Δ = Δ Γ \quad (2)$



Από (1) και (2) έχουμε: $Α Β^2 = Α Δ^2 + Β Δ \cdot Δ Γ \quad (3)$

Αλλά $Α Δ \cdot Δ Ε = Β Δ \cdot Δ Γ \quad (4)$

Από (3) και (4) έχουμε: $Α Β^2 = Α Δ^2 + Α Δ \cdot Δ Ε = Α Δ\,(Α Δ + Δ Ε) = Α Δ \cdot Α Ε$

ii. Από τα Β, Δ, Ε περνά ένας κύκλος και το σημείο Α είναι εξωτερικό του σημείο. Από τη σχέση $Α Β^2 = Α Δ \cdot Α Ε$ έχουμε ότι το ΑΒ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζεται από τα σημεία Δ, Ε, Β.

51. Ισχύει $A\Gamma \cdot \Gamma B = \Gamma E \cdot \Gamma Z$ (1)

Αλλά $A\Gamma = 3\Gamma B$

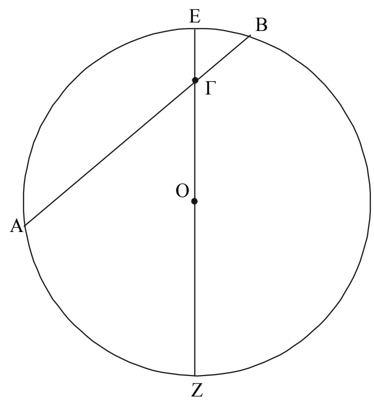
$\Gamma E = EO - \Gamma O = 15 - 10 = 5$ cm

$\Gamma Z = \Gamma O + OZ = 10 + 15 = 25$ cm

Η σχέση (1) βάσει των παραπάνω γίνεται:

$3\Gamma B \cdot \Gamma B = 5 \cdot 25$ ή $3\Gamma B^2 = 125$ ή

$\Gamma B = \sqrt{\dfrac{125}{3}}$



Αλλά $AB = A\Gamma + \Gamma B$. Άρα $AB = 4\Gamma B$ ή $AB = 4\sqrt{\dfrac{125}{3}}$ cm

52. i. $P\overset{\Delta}{A}B \approx P\overset{\Delta}{\Gamma}A$ (1) γιατί

$P\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$ (υπό χορδής και εφαπτομένης)

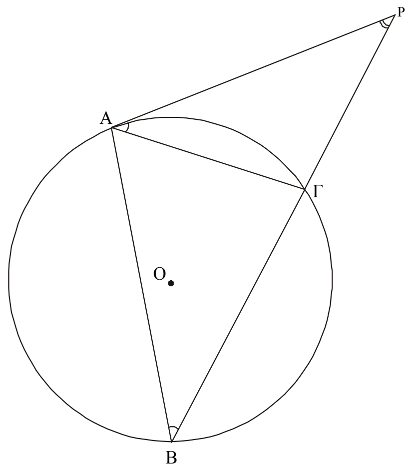
$\hat{P} = \hat{P}$ (κοινή)

Άρα ισχύει η (1)

ii. Από την ομοιότητα έχουμε:

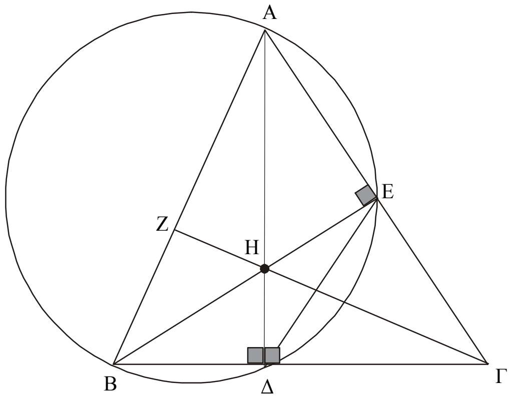
$\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{PA}{P\Gamma}$ άρα

$PA^2 = PB \cdot P\Gamma$



Τότε: $\left(\dfrac{AB}{A\Gamma}\right)^2 = \left(\dfrac{PB}{PA}\right)^2 = \dfrac{PB^2}{PA^2} = \dfrac{PB^2}{PB \cdot P\Gamma} = \dfrac{PB}{P\Gamma}$

53. i. Θα δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (1). Η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τα Δ, Ε με γωνία ορθή. Άρα ισχύει η (1). Ομοίως τα ΑΖΗΕ, ΖΗΔΒ είναι εγγράψιμα σε κύκλο.



ii. Θα δείξουμε ότι

$AB^2 = BHBE + AH \cdot A\Delta$

Αφού από τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ, ΖΗΔΒ περνά κύκλος ισχύει:

$BH \cdot BE = BZ \cdot AB$, $AH \cdot A\Delta = AZ \cdot AB$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$BH \cdot BE + AH \cdot A\Delta = (BZ + AZ)\, AB$ ή $BH \cdot BE + AH \cdot A\Delta = AB^2$

54. Ισχύει $\Gamma E^2 = \Gamma B \cdot \Gamma Z$

$(2\alpha)^2 = \alpha \cdot \Gamma Z$ ή $\Gamma Z = 4\alpha$

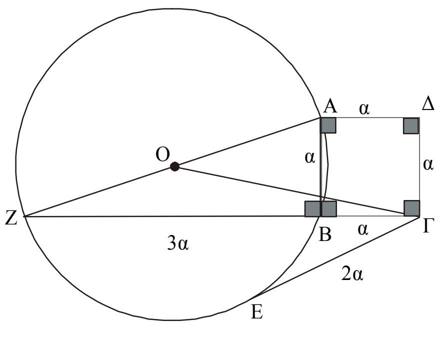
Αλλά $ZB = \Gamma Z - B\Gamma = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$

Το $A\overset{\Delta}{B}Z$ ορθογώνιο:

$(2R)^2 = ZB^2 + BA^2$ ή

$4R^2 = (3\alpha)^2 + \alpha^2$ ή $4R^2 = 9\alpha^2 + \alpha^2$ ή

$R = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,\alpha$ ή $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\,\alpha$



55. $PA = 9$ cm, $PB = 10$ cm, $P\Gamma = 15$ cm

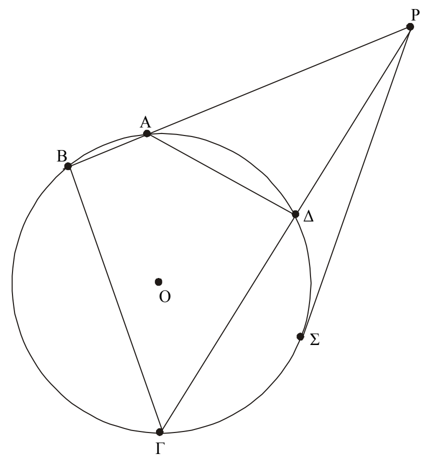
Ισχύει: $PA \cdot PB = P\Delta \cdot P\Gamma$

$9 \cdot 10 = P\Delta \cdot 15$ ή $P\Delta = 6$ cm

$P\Sigma^2 = P\Delta \cdot P\Gamma$

$P\Sigma^2 = 6 \cdot 15$

$P\Sigma = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$ cm



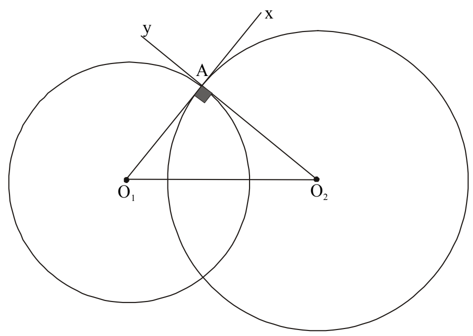
56. i. Έστω (O_1, R_1), (O_2, R_2) οι δύο κύκλοι

$x\hat{A}y = 90°$, άρα $O_1 \overset{\Delta}{A} O_2$ ορθογώνιο

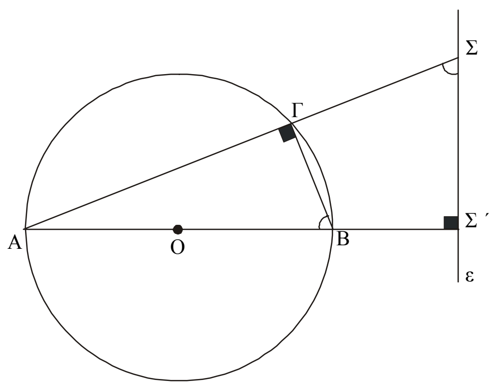
$(O_1O_2)^2 = (O_1A)^2 + (O_2A)^2$ ή

$(O_1O_2)^2 = R_1^2 + R_2^2$ (1)

ii. $\Delta^{O_1}_{(O_2, R_2)} = (O_1O_2)^2 - R_2^2 \overset{(1)}{=} R_1^2$

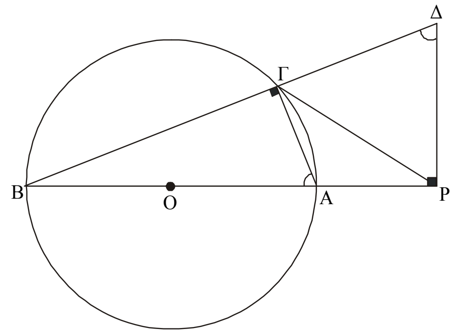


57. Το τετράπλευρο ΒΓΣΣ΄ είναι εγγράψιμο ($\hat{\Gamma} = \hat{\Sigma}' = 1L$) σε κύκλο, άρα $A\Gamma \cdot A\Sigma = AB \cdot A\Sigma'$. Αφού η ε σταθερή και ο κύκλος $(O, \frac{AB}{2})$ σταθερός, το γινόμενο $AB \cdot A\Sigma'$ είναι σταθερό: $A\Gamma \cdot A\Sigma = AB \cdot A\Sigma' =$ σταθερό.



58. Θα δείξουμε: $PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$ (1)

$P\Gamma^2 = PA \cdot PB$ ως εφαπτομένη στον (O, R)



Από την (1) έχουμε:

$PB^2 - P\Gamma^2 = PB^2 - PA \cdot PB =$

$PB\,(PB - PA) = PB \cdot AB \qquad (2)$

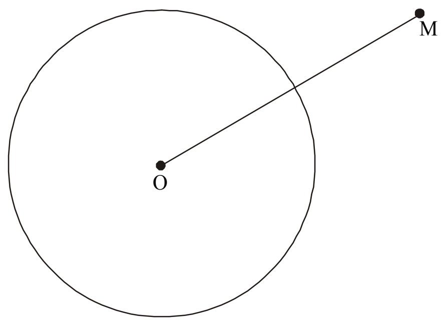
Αλλά ισχύει $PB \cdot AB = B\Gamma \cdot B\Delta$, γιατί το $A\Gamma\Delta P$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Άρα η (2) γίνεται: $PB^2 - P\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ ή $PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$

59. Για κάθε σημείο Μ έτσι ώστε

$MO = \delta$ ισχύει $\Delta^{M}_{(O,\,R)} = = OM^2 - R^2 =$

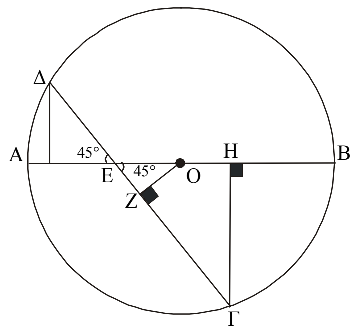
$\delta^2 - R^2 =$ σταθερό, $\delta > R$.



60. Θα δείξουμε: $AE \cdot EB + 2OZ^2 = R^2$

Ισχύει $AE \cdot EB = R^2 - OE^2$ ή

$AE \cdot EB + OE^2 = R^2 \quad (1)$



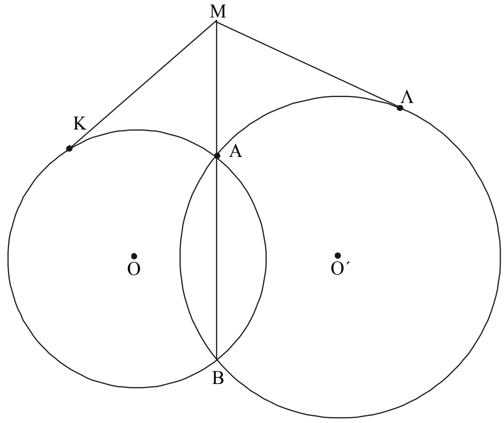
Αλλά το ορθογώνιο τρίγωνο $E\overset{\Delta}{Z}O$

($\hat{Z} = 90°$) είναι και ισοσκελές, άρα $EZ = ZO$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

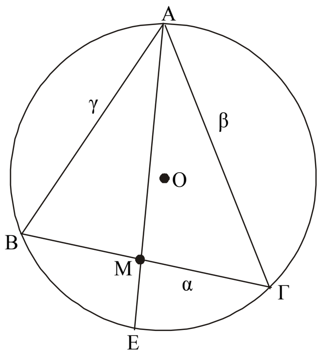
$OE^2 = EZ^2 + ZO^2 = 2ZO^2$. Άρα η σχέση (1) γίνεται: $AE \cdot EB + 2ZO^2 = R^2$

61. Έστω (O, R), (O΄, R΄) οι δύο κύκλοι και ΜΑΒ η κοινή τέμνουσα των δύο κύκλων. Τότε $MK^2 = MA \cdot MB$ και $M\Lambda^2 = MA \cdot MB$ Άρα ΜΚ = ΜΛ.



62. i. Ισχύει: $AM \cdot ME = BM \cdot M\Gamma = \frac{\alpha^2}{4}$,

(αφού $BM = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$)



ii. Θεώρημα διαμέσων στο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$:

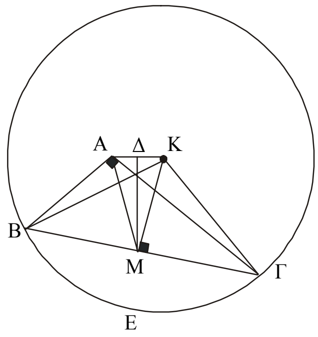
$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ (1) ή

$2(\beta^2 + \gamma^2) = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2$ ή $\alpha^2 = 2(\beta^2 + \gamma^2) - 4\mu_\alpha^2$

Από (i) έχουμε: $AM \cdot ME = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - 4\mu_\alpha^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} - \mu_\alpha^2$

63. i. Πρέπει να δείξουμε ότι: $AM^2 + MK^2 = R^2$

Αφού $BM = M\Gamma$, $KB = K\Gamma$, τότε $KM \perp B\Gamma$



Είναι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$ γιατί $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ορθογώνιο στην $\hat{A}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\overset{\Delta}{M}\Gamma$ έχουμε:

$MK^2 + M\Gamma^2 = R^2$ ή

$$MK^2 + \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = R^2 \text{ ή } MK^2 + AM^2 = R^2 \qquad (1)$$

ii. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διαμέσων στο $A\overset{\Delta}{M}K$:

$$AM^2 + KM^2 = 2\Delta M^2 + \frac{AK^2}{2} \quad (AK \text{ σταθερό}) \quad (2)$$

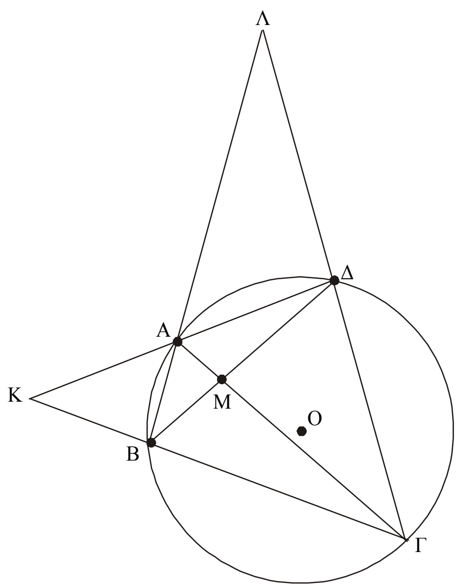
Από (1) και (2) έχουμε: $R^2 - \dfrac{AK^2}{2} = 2\Delta M^2$ ή $\Delta M = \sqrt{\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{AK^2}{4}} =$ σταθερό

64. Το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΔΓ τέμνονται στο Λ, οι προεκτάσεις των ΑΔ, ΒΓ στο Κ, καθώς και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΓ, ΒΔ στο Μ. Έτσι οι δυνατές σχέσεις που συνδέουν τις αποστάσεις των σημείων τομής από τα Α, Β, Γ, Δ είναι οι παρακάτω:

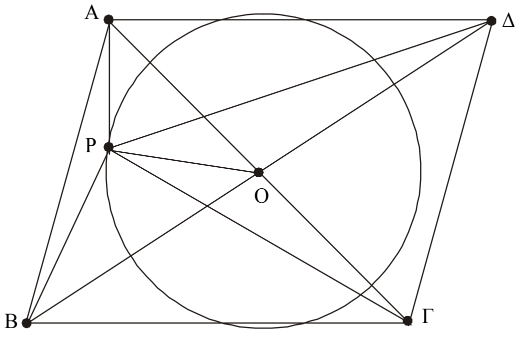
α) $MA \cdot M\Gamma = MB \cdot M\Delta$

β) $KA \cdot K\Delta = KB \cdot K\Gamma$

γ) $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda\Delta \cdot \Lambda\Gamma$



65. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $P\overset{\Delta}{B}\Delta$, $P\overset{\Delta}{A}\Gamma$ και έχουμε:



$$PB^2 + P\Delta^2 = 2PO^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \qquad (1)$$

$$PA^2 + P\Gamma^2 = 2PO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \qquad (2)$$

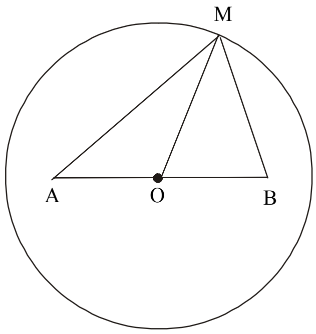
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2): $PA^2 + PB^2 + P\Gamma^2 + P\Delta^2 =$

$4PO^2 + \dfrac{A\Gamma^2 + B\Delta^2}{2} = 4R^2 + \dfrac{A\Gamma^2 + B\Delta^2}{2} =$ σταθερό, αφού οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου είναι σταθερά ευθύγραμμα τμήματα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Απαντήσεις - Λύσεις

1. Δίνεται ΑΒ = 6λ



Έστω Μ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$,

Ο μέσον του ΑΒ ή $50λ^2 = 2MO^2 + \dfrac{36λ^2}{2}$ ή

$MO^2 = 16λ^2$ ή ΜΟ = 4λ = σταθερό

Άρα το σημείο Μ απέχει σταθερή απόσταση από το μέσο του ΑΒ, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος (Ο, 4λ)

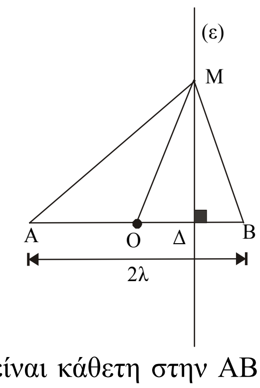
Αντίστροφα: Έστω ένα σημείο Μ του κύκλου (Ο, 4λ).

Τότε: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2\,(4λ)^2 + \dfrac{36λ^2}{2} = 32λ^2 + 18λ^2 = 50λ^2$

Άρα το Μ έχει την ιδιότητα: $MA^2 + MB^2 = 50λ^2$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία του κύκλου (Ο, 4λ).

2. Δίνεται ΑΒ = 2λ, Ο το μέσον του.



Έστω ένα σημείο Μ του επιπέδου με:

$MA^2 - MB^2 = 2AB{\cdot}OΔ$ ή $2λ^2 = 2AB{\cdot}OΔ$

$2λ^2 = 4λ{\cdot}OΔ$ ή $OΔ = \dfrac{λ}{2}$ = σταθερό

(ΜΑ > ΜΒ) Το σημείο Δ βρίσκεται στην ημιευθεία ΟΒ και απέχει από το Ο σταθερή απόσταση $OΔ = \dfrac{λ}{2}$.

Το δε σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε, που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Δ.

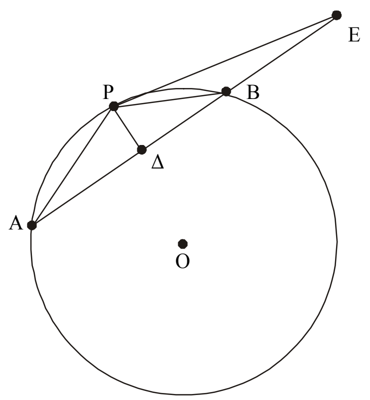
Αντίστροφα: Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ευθείας (ε) ισχύει:

$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot O\Delta = 2 \cdot 2\lambda \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\lambda^2$.

Το Μ ικανοποιεί την ιδιότητα του προβλήματος. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε).

3. Έστω Ρ σημείο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$ και σημεία Δ, Ε του ΑΒ ώστε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{PA}{PB} = \frac{EA}{EB} = \frac{\mu}{\nu} \qquad (1)$$



Σύμφωνα με την (1) αρκεί να χωρίσουμε τη χορδή ΑΒ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, εσωτερικά και εξωτερικά.

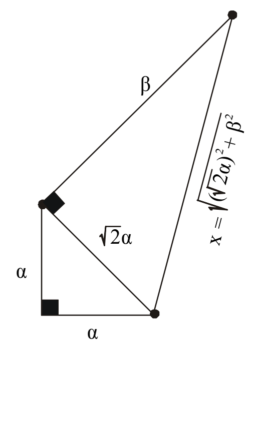
Τότε τα Δ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και η $\Delta\hat{P}E = 90°$. Άρα το Ρ βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ.

Κατασκευή: Γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ όπου η τομή με τον (Ο, R) ορίζει το σημείο Ρ του $\overset{\frown}{AB}$ (έλασσον) που αντιστοιχεί στη χορδή ΑΒ. Ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ τέμνει το μεγάλο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ σ' ένα σημείο και δίνει δεύτερη λύση.

4. $x^2 = (\sqrt{2}\,\alpha)^2 + \beta^2$. Κατασκευάζω:

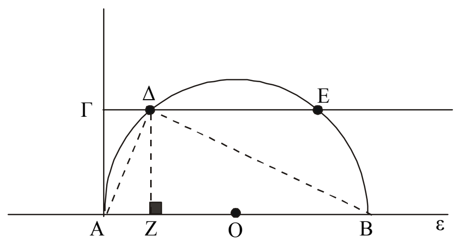
i. το $\sqrt{2}\,\alpha$, ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, α.

ii. το x ως υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές β, $\sqrt{2}\,\alpha$.



5. Πρέπει να είναι $\quad x + y = 6$

$$xy = 8 = (2\sqrt{2})^2$$



Πάνω σε ευθεία ε παίρνουμε τμήμα ΑΒ = 6. Με διάμετρο το ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο (Ο, $\frac{AB}{2}$).

Από το Α φέρουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο και σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα ΑΓ = $2\sqrt{2}$. Από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία Δ, Ε.

Η κάθετος από το Δ προς την ΑΒ τέμνει αυτήν σε σημείο Ζ, που τη χωρίζει σε δύο τμήματα ΑΖ, ΖΒ. Αυτά είναι τα ζητούμενα τμήματα x, y.

Πράγματι ΑΖ + ΖΒ = 6. Επίσης εάν φέρουμε τις ΑΔ, ΔΒ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει:

$\Delta Z^2 = AZ \cdot ZB$ ή $(2\sqrt{2})^2 = xy$

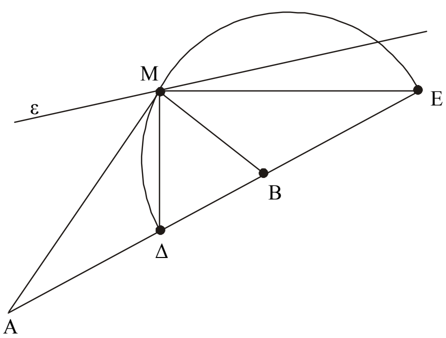
Άρα ΑΖ = x, ΖΒ = y.

Παρατήρηση: Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν δύο λύσεις, αφού $2\sqrt{2} < 3$ και άρα η παράλληλη από το Γ προς την ΑΒ τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία.

6. Έστω Μ σημείο της ε ώστε

$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ και Δ, Ε σημεία του ΑΒ

ώστε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).



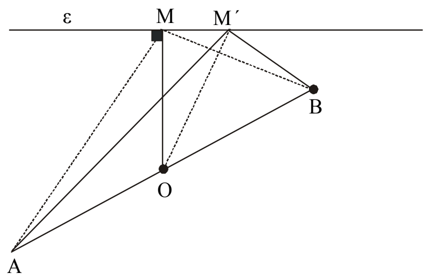
Τα Δ, Ε είναι τα συζυγή αρμονικά των Α, Β, είναι σταθερά και η $\Delta\hat{M}E = 90°$.

Άρα το σημείο Μ βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ.

Κατασκευή: Προσδιορίζουμε τα Δ, Ε ώστε να είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β σύμφωνα με την (1). Γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ. Οι τομές του κύκλου αυτού με την ε ορίζουν τα ζητούμενα σημεία Μ.

Παρατήρηση: Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει η απόσταση του μέσου του ΔΕ από την ε να είναι μεγαλύτερη ή ίση με $\frac{ΔΕ}{2}$ (δύο λύσεις ή μία λύση αντίστοιχα).

7. $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = 2ΜΟ^2 + \frac{ΑΒ^2}{2}$ (θεώρημα διαμέσων στο $Α\overset{\Delta}{Μ}Β$, ΑΒ σταθερό). Για να είναι το $ΜΑ^2 + ΜΒ^2$ ελάχιστο θα πρέπει να είναι ελάχιστο το ΜΟ, το οποίο είναι όταν ΟΜ ⊥ (ε) (ΟΜ ≤ ΟΜ΄), Μ΄ τυχαίο σημείο της (ε).



Κεφάλαιο 10:	**ΕΜΒΑΔΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1.	* Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.	**Σ**	**Λ**
2.	* Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διχοτόμο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.	**Σ**	**Λ**
3.	* Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από ένα ύψος του σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.	**Σ**	**Λ**
4.	* Ένα τρίγωνο χωρίζεται από μία διάμεσό του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.	**Σ**	**Λ**
5.	* Δύο ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.	**Σ**	**Λ**
6.	* Ο τύπος του Ήρωνα $Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$ ισχύει μόνο σε ορθογώνια τρίγωνα.	**Σ**	**Λ**
7.	* Ο τύπος $Ε = \dfrac{δ_1 . δ_2}{2}$ όπου $δ_1$, $δ_2$ οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου ισχύει σε κάθε τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιους.	**Σ**	**Λ**
8.	* Δύο τρίγωνα όμοια και ισεμβαδικά είναι ίσα.	**Σ**	**Λ**
9.	* Δύο τετράγωνα τα οποία έχουν ίσα εμβαδά είναι ίσα.	**Σ**	**Λ**
10.	* Ο λόγος των εμβαδών δύο ισοπλεύρων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των υψών τους.	**Σ**	**Λ**
11.	* Αν οι γωνίες Α και Δ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι συμπληρωματικές, τότε $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \dfrac{ΑΒ.ΑΓ}{ΔΕ.ΔΖ}$.	**Σ**	**Λ**
12.	* Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, αν Μ είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ, τότε τα σχήματα ΑΜΓΔ και ΑΜΓΒ είναι ισοδύναμα.	**Σ**	**Λ**
13.	* Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 4 cm η καθεμία, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 16 cm^2.	**Σ**	**Λ**

14. * Αν η πλευρά τετραγώνου τριπλασιαστεί, τότε το εμβαδόν του 9-πλασιάζεται. **Σ** **Λ**

15. * Τετράγωνο πλευράς α είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με τη διαγώνιο του τετραγώνου. **Σ** **Λ**

16. * Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, β είναι ισοδύναμο με τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. **Σ** **Λ**

17. * Ρόμβος με διαγωνίους δ_1, δ_2 είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις διαγώνιες δ_1, δ_2 του ρόμβου. **Σ** **Λ**

18. * Ρόμβος με διαγώνιες δ_1, δ_2 είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις δ_1, δ_2. **Σ** **Λ**

19. * Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς α. **Σ** **Λ**

20. * Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α είναι ισοδύναμο με ρόμβο πλευράς α και οξείας γωνίας 60°. **Σ** **Λ**

21. * Αν οι γωνίες Α και Δ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι παραπληρωματικές, τότε $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΕΖ})} = \frac{\text{ΑΒ.ΑΓ}}{\text{ΔΕ.ΔΖ}}$. **Σ** **Λ**

22. * Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{\text{ΑΒ}^2} = \frac{(\text{ΚΛΜ})}{\text{ΚΛ}^2} = \lambda^2$, όπου ΑΒ και ΚΛ ομόλογες πλευρές τους. **Σ** **Λ**

23. * Το εμβαδό ενός τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{2}\,\delta^2$, όπου δ η διαγώνιός του. **Σ** **Λ**

24. * Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δύο βάσεων τραπεζίου το διαιρεί σε δύο ισοδύναμα τραπέζια. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και ίσα εμβαδά, έχουν αντίστοιχα ίσα

Α. όλα τα ύψη τους.

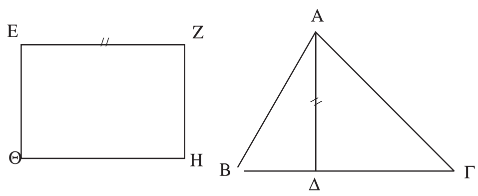
Β. όλες τις διαμέσους τους.

Γ. τις διαμέσους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές.

Δ. τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές.

Ε. τις διχοτόμους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές.

2. * Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ και ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουν ίσα εμβαδά και το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι ίσο με την πλευρά ΕΖ. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η



Α. ΒΓ = ΕΘ. **Β.** ΑΔ = ΕΘ. **Γ.** ΕΘ = 2ΒΓ.

Δ. ΕΘ = ΑΓ. **Ε.** ΗΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

3. * Αν ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι $\frac{1}{3}$, τότε ο λόγος των εμβαδών είναι

Α. $\frac{1}{3}$. **Β.** $\frac{1}{9}$. **Γ.** $\frac{1}{6}$. **Δ.** $\frac{1}{27}$. **Ε.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. * Ο τύπος $Ε = \frac{δ_1.δ_2}{2}$ ($δ_1$, $δ_2$ οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου) εκφράζει το εμβαδό

Α. ενός τετραπλεύρου με δύο από τις πλευρές του ίσες.

Β. ενός τετραπλεύρου με τις πλευρές του κάθετες ανά δύο.

Γ. ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιους.

Δ. ενός ορθογωνίου με διαγώνιες που έχουν σχέση $δ_1 = 2δ_2$.

Ε. ενός ισοσκελούς τραπεζίου.

5. * Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς γ το εμβαδόν του ισούται με

Α. $γ^2 \sqrt{\frac{3}{4}}$. **Β.** $γ \frac{υ}{4}$. **Γ.** $\frac{γ}{2} υ^2$. **Δ.** $γ^2 \sqrt{\frac{3}{16}}$. **Ε.** $γ^2 \frac{3}{\sqrt{4}}$.

6. * Αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ συμβαίνει ΑΑ΄ // ΒΓ τότε

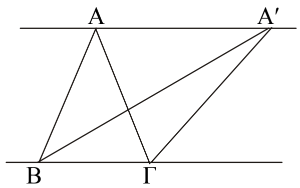
Α. (ΑΒΓ) = (Α΄ΒΓ).

Β. τρίγωνο ΑΒΓ = τρίγωνο Α΄ΒΓ.

Γ. γωνία Α΄ = Α.

Δ. γωνία Α΄ = 90° - Α.

Ε. τρίγωνο ΑΒΓ ≈ τρίγωνο Α΄ΒΓ.



7. * Η διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα

Α. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Β. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Γ. μόνο όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Δ. πάντα.

Ε. μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

8. * Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $Α_1Β_1Γ_1$ ο τύπος $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(Α_1Β_1Γ_1)} = \dfrac{ΑΒ.ΑΓ}{Α_1Β_1.Α_1Γ_1}$ ισχύει όταν

Α. γωνία $Γ = Γ_1$.
Β. γωνία $Β = Β_1$.
Γ. γωνία $Α = 180° - Β_1 - Γ_1$.
Δ. γωνία $Α = 90° + Α_1$.
Ε. γωνία $Α = Α_1$ ή γωνία $(Α + Α_1) = 180°$.

9. * Το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα όταν

Α. γωνία Α = 90°.
Β. γωνία Α = Β.
Γ. γωνία Α = 60° = Β.
Δ. ΒΓ = ΑΓ.
Ε. ΒΓ = ΑΒ.

10. * Ένα τραπέζιο με βάσεις $β_1$, $β_2$ και ύψος υ είναι ισοδύναμο με ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις είναι

Α. $β_1 + β_2$ και υ.
Β. $\dfrac{β_1 + β_2}{2}$ και $\dfrac{υ}{2}$.
Γ. $β_1 + υ$ και $\dfrac{β_2}{2}$.
Δ. $\dfrac{β_1 + β_2}{4}$ και 2υ.
Ε. 2υ και $\dfrac{β_1 + β_2}{2}$.

11. * Ο τύπος $Ε = \sqrt{τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ)}$ δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές α, β, γ αν

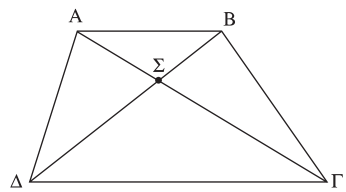
Α. $τ = α + β + γ$.
Β. $2α = 2(τ - β)$.
Γ. $α = \dfrac{β + γ}{2}$.
Δ. $τ = \dfrac{α}{2} + \dfrac{β}{2} + \dfrac{γ}{2}$.
Ε. τ = αβημΓ.

12. * Αν E_1, E_2 τα εμβαδά δύο ομοίων πολυγώνων και λ ο λόγος ομοιότητάς τους, τότε ισχύει

Α. $\lambda^2 = E_1.E_2$. **Β.** $\lambda^2 = \dfrac{E_1}{E_2}$. **Γ.** $E_1\lambda = E_2^2$.

Δ. $\lambda = \left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)^2$. **Ε.** $E_1.E_2 = \lambda$.

13. * Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και Σ το σημείο τομής των διαγωνίων του, τότε ισχύει



Α. (ΣΑΔ) = (ΣΒΓ).
Β. (ΣΑΒ) = (ΣΔΓ).
Γ. (ΣΒΓ) = (ΣΑΔ) + (ΣΔΓ).
Δ. (ΑΒΓ) = (ΑΔΓ).
Ε. (ΣΑΔ) = 2 (ΣΒΓ).

14. * Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου είναι $4\sqrt{3}$ cm^2. Η κάθε πλευρά του είναι

Α. $4\sqrt{3}$ cm. **Β.** $8\sqrt{3}$ cm. **Γ.** $4\sqrt[4]{3}$ cm.

Δ. 4 cm. **Ε.** $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ cm.

15. * Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{2}$ αγημΑ. **Β.** $\dfrac{1}{2}$ αβσυνΓ. **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ βγσυν (90° - Α).

Δ. $\sqrt{\tau(\tau+\alpha)(\tau+\beta)(\tau+\gamma)}$. **Ε.** $\dfrac{1}{2}$ αγσυνΒ.

16. * Το εμβαδόν τετραγώνου με διαγώνιο δ είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{2}\delta^2$. **Β.** $\frac{\delta^2}{4}$. **Γ.** $2\delta^2$. **Δ.** $\delta\sqrt{2}$. **Ε.** $\frac{\delta\sqrt{2}}{2}$.

17. * Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) το εμβαδόν του είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{2}$ αβημΑ. **Β.** $\frac{1}{2}$ βγ. **Γ.** $\frac{1}{2}$ αγημΑ.

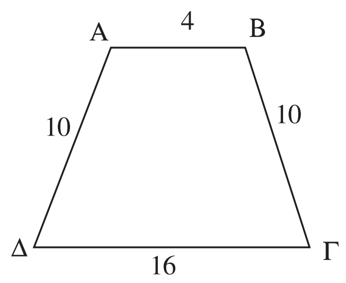
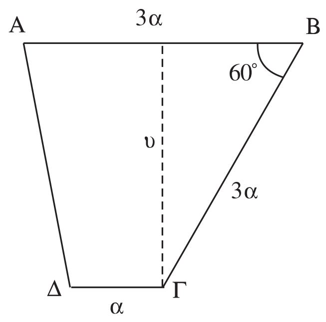
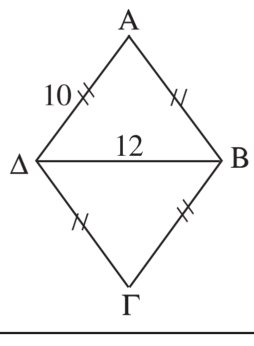
Δ. $\frac{1}{2}$ βγσυνΑ. **Ε.** $\frac{1}{2}$ αβγ.

18. * Αν ένα τετράπλευρο έχει κάθετες τις διαγώνιές του δ_1, δ_2, τότε το εμβαδόν του ισούται με

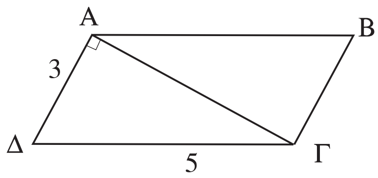
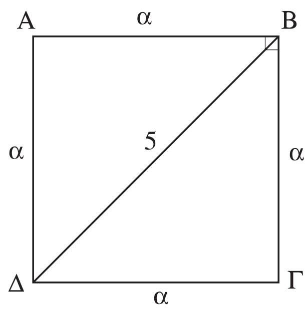
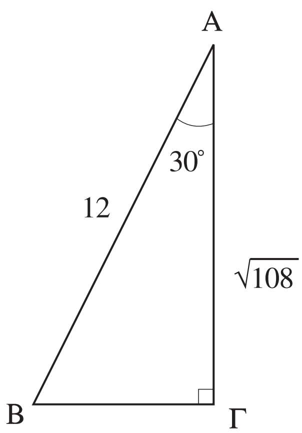
Α. $\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$. **Β.** $\frac{\delta_1.\delta_2}{2}$. **Γ.** $\frac{\delta_1.\delta_2}{4}$. **Δ.** $\delta_1^2.\delta_2^2$. **Ε.** $\delta_1.\delta_2$.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

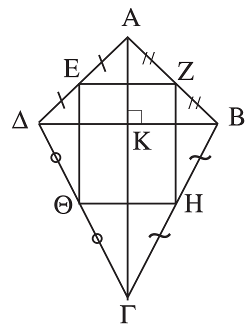
1. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με το εμβαδό του στη στήλη Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $3\alpha^2\sqrt{3}$
	Β) 80
	Γ) 60
2. 	**Δ)** 96
	Ε) $9\alpha^2\sqrt{3}$
3. 	

2. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με το εμβαδόν του στη στήλη Β.

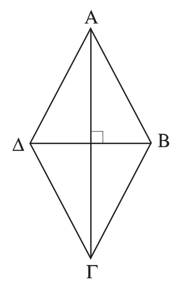
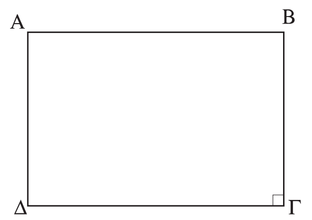
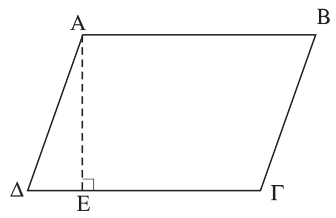
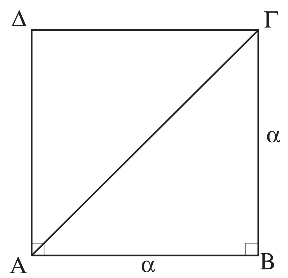
στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** 12,5 **Β)** 25
2. 	**Γ)** $3\sqrt{108}$ **Δ)** $\dfrac{\sqrt{108}}{12}$
3. 	**Ε)** 12

3. * Οι ισότητες στη στήλη Α εκφράζουν εμβαδά και περιέχουν στοιχεία του διπλανού σχήματος. Οι προτάσεις στη στήλη Β προσδιορίζουν τα στοιχεία του διπλανού σχήματος, όπως αυτά χρησιμοποιούνται στις ισότητες της στήλης Α. Να αντιστοιχίσετε τις ισότητες της στήλης Α με τις προτάσεις της στήλης Β.

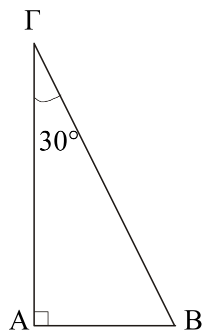
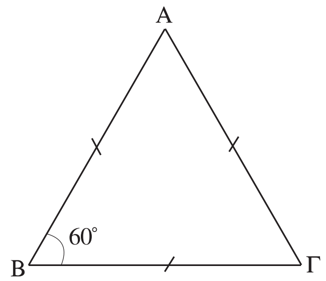
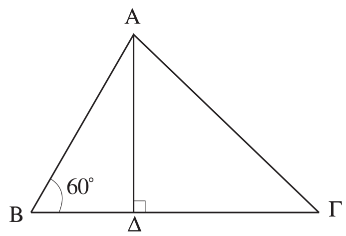
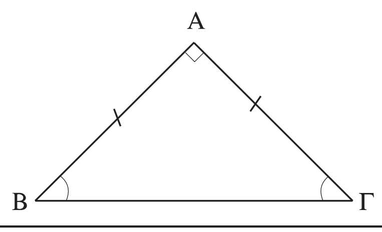


στήλη Α	**στήλη Β**
1. $(\Delta A\Gamma) = \dfrac{\Delta K.A\Gamma}{2}$	**Α)** ΑΓ, ΔΒ διαγώνιοι του ΑΒΓΔ
2. $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{A\Gamma.\Delta B}{2}$	**Β)** ΕΖ ύψος του ΕΖΗΘ
3. $EZ.ZH = (EZH\Theta)$	**Γ)** ΔΒ βάση του τριγώνου ΑΔΒ
4. $(A\Delta B) = \dfrac{\Delta B.AK}{2}$	**Δ)** ΔΚ ύψος του τριγώνου ΑΔΓ
	Ε) ΑΓ βάση του τριγώνου ΑΒΓ
	ΣΤ) ΔΒ βάση του τριγώνου ΔΓΒ

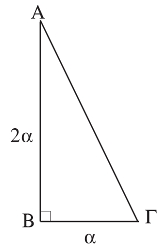
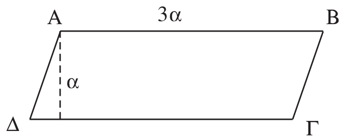
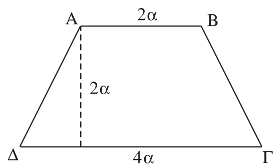
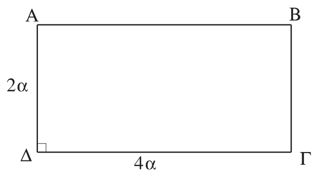
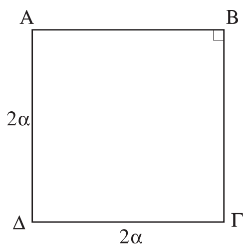
4. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με έναν τύπο της στήλης Β ο οποίος εκφράζει το εμβαδόν του.

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $E = \dfrac{ΔΑ^2}{2}$ **Β)** $E = ΑΔ.ΒΓ$
2. 	**Γ)** $E = ΑΒ.ΑΕ$ **Δ)** $E = ΑΔ.ΔΓ$
3. 	**Ε)** $E = \dfrac{ΑΓ^2}{2}$ **ΣΤ)** $E = \dfrac{ΑΓ.ΔΒ}{2}$
4. 	

5. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με έναν τύπο της στήλης Β ο οποίος εκφράζει το εμβαδόν του.

στήλη Α	στήλη Β
1. 	**Α)** $\frac{1}{4}$ ΑΓ.ΒΓ
	Β) ΑΒ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
2. 	**Γ)** $\frac{ΑΓ.ΑΒ}{2}$
	Δ) $\frac{1}{2}$ ΑΒ.ΒΓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. 	**Ε)** $\frac{1}{2}$ ΑΓ.ΒΓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 	**ΣΤ)** $\frac{ΑΒ^2\sqrt{3}}{4}$

6. * Στη στήλη Α υπάρχουν ευθύγραμμα σχήματα. Στη στήλη Β υπάρχουν εμβαδά. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της στήλης Α με το εμβαδόν του στη στήλη Β.

στήλη Α	**στήλη Β**
1. 	**Α)** $8α^2$ **Β)** $7α^2$
2. 	**Γ)** $6α^2$ **Δ)** $4α^2$
3. 	**Ε)** $3α^2$
4. 	**ΣΤ)** $2α^2$ **Ζ)** $α^2$
5. 	**Η)** $\frac{3α^2}{2}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου των μη παράλληλων πλευρών επί ……………… .

2. * Αν το ένα ύψος ενός παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το άλλο του ύψος, τότε η μία πλευρά που αντιστοιχεί σ' αυτό είναι ……………… .

3. * Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει (ΑΒΓ) = $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου τ = ……………… .

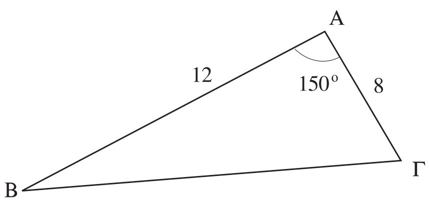
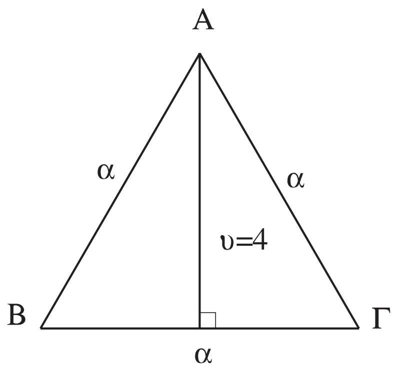
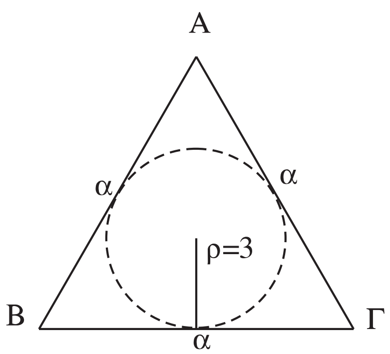
4. * Αν το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{\alpha\beta}{2}$ (όπου α, β πλευρές), τότε η μεγαλύτερη γωνία του είναι η ……………… και είναι ίση με …………… .

5. * Αν δ_1, δ_2 είναι οι διαγώνιοι ρόμβου, το εμβαδό του ισούται με ………… .

6. * Αν ένας ρόμβος πλευράς α με διαγώνιες δ_1, δ_2 είναι ισοδύναμος με ένα ορθογώνιο, τότε οι πλευρές του ορθογωνίου είναι οι ……………… ή οι ……………… .

7. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι 30°. Το εμβαδόν του συναρτήσει των πλευρών του α, γ είναι ……………… .

8. * Υπολογίστε και συμπληρώστε στη στήλη Β τα εμβαδά των σχημάτων που βρίσκονται στη στήλη Α.

στήλη Α	**στήλη Β**
	Ε = ………..
	Ε = ………..
	Ε = ………..

9. * Υπολογίστε και συμπληρώστε στη στήλη Β τα εμβαδά των τριγώνων των οποίων τα στοιχεία βρίσκονται στη στήλη Α.

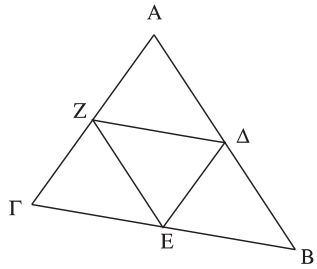
στήλη Α **στοιχεία τριγώνου ΑΒΓ**	**στήλη Β** **εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ**
$\alpha = 2,\ \gamma = 3,\ B = 60°$	Ε = ...
$\alpha = 3,\ \beta = 3,\ \gamma = 4$	Ε = ...
$\alpha = \beta = \gamma,\ \ \upsilon_\alpha = 5\sqrt{3}$	Ε = ...
$\alpha = \beta = \gamma = 4$	Ε = ...

Ερωτήσεις ανάπτυξης

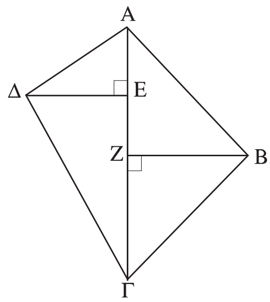
1. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) (ΔΕΖ) = (ΖΓΕ)

β) (ΔΕΖ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ).



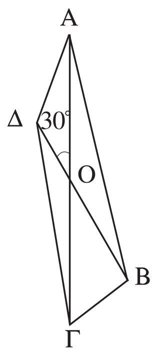
2. ** Να δείξετε ότι το εμβαδόν τυχόντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με το γινόμενο της μιας διαγωνίου του ΑΓ επί το ημιάθροισμα των αποστάσεων ΔΕ, ΖΒ των δύο άλλων κορυφών από τη διαγώνιο αυτή.



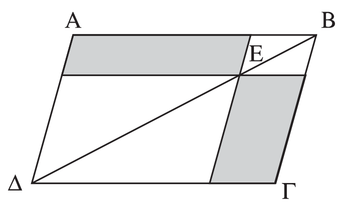
3. ** Όταν οι διαγώνιες ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία Ο = 30°, να δείξετε ότι ισχύει:

α) (ΑΟΔ) = $\frac{1}{4}$ ΟΔ.ΟΑ

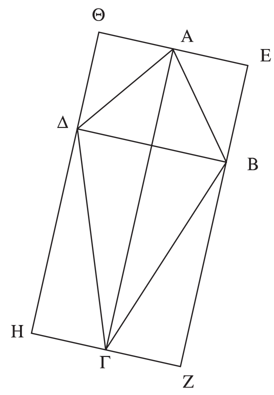
β) (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{4}$ ΑΓ.ΔΒ.



4. ** Από ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ είναι ισοδύναμα.

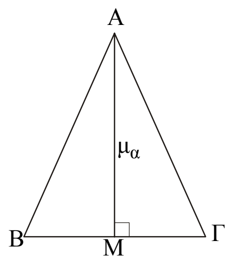


5. ** Από τις κορυφές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγωνίους του. Να δείξετε ότι το περιγεγραμμένο στο τετράπλευρο παραλληλόγραμμο ΗΖΕΘ έχει εμβαδό διπλάσιο από το εμβαδό του τετραπλεύρου.

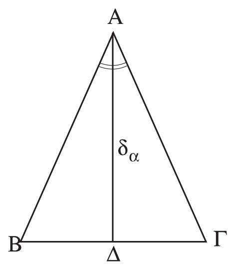


6. ** Να δείξετε ότι σε ρόμβο, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας διαγωνίου επί την πλευρά του, μια γωνία του είναι 60°.

7. ** Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου το εμβαδόν ισούται με $\frac{1}{2}$ $\alpha.\mu_\alpha$, όπου μ_α η διάμεσος από την κορυφή Α, είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

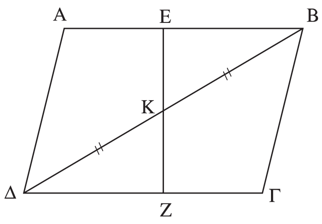


8. ** Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το εμβαδόν του οποίου ισούται με $\frac{1}{2}$ $\alpha.\delta_\alpha$, όπου δ_α η διχοτόμος της γωνίας Α, είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

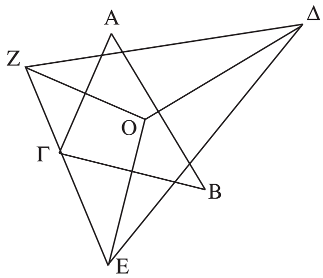


9. ** Να δείξετε ότι αν ένα τετράγωνο πλευράς α και ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς β έχουν την ίδια περίμετρο, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με $\frac{9\beta^2}{16}$.

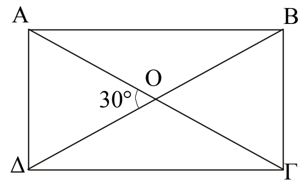
10. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το μέσο Κ της διαγωνίου ΒΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία ΕΖ που τέμνει τις ΑΒ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι (ΑΕΖΔ) = (ΒΓΖΕ).



11. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από ένα σημείο Ο εσωτερικό του ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ = ΑΒ, ΟΕ = ΒΓ, ΟΖ = ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ισχύει:
α) (ΔΟΕ) = (ΑΒΓ) και
β) (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ).

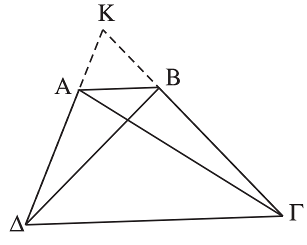


12. ** Ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ το εμβαδόν του είναι ίσο με $\frac{ΑΓ^2}{4}$, όπου ΑΓ η μία διαγώνιός του. Δείξτε ότι η οξεία γωνία ΑΟΔ των διαγωνίων του είναι 30°.

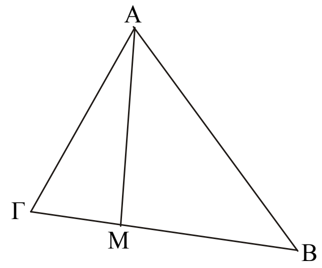


13. ** Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 256 cm^2. Αν ελαττώσουμε την πλευρά του κατά 10 cm, κατά πόσα cm^2 ελαττώνεται το εμβαδόν του;

14. ** Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ είναι ισοδύναμα.



15. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ, τέτοιο ώστε ΒΜ = $\frac{2}{3}$ ΒΓ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΜ είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



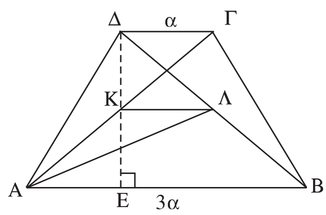
16. ** Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α και ΚΛΜ τρίγωνο με γωνία $\hat{K} = 120°$. Τότε να δείξετε ότι $\frac{(ΚΛΜ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΚΛ.ΛΜ}{α^2}$.

17. ** Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις α και 3α και ύψος ΔΕ = 2α και Κ, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΛ.

β) Να δείξετε ότι:

(ΑΚΛ) = (ΒΚΛ) = (ΓΚΛ) = (ΔΚΛ).



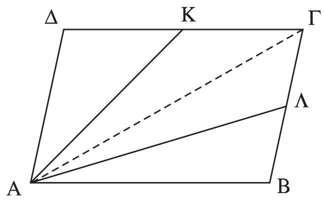
18. ** Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 136 m^2. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου αυτού.

19. ** Η περίμετρος ενός ρόμβου ΑΒΓΔ είναι 48 cm και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5 cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ρόμβου.

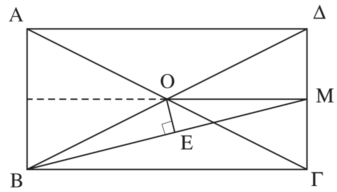
20. ** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει γωνία Γ = 60°, β = 12 cm, α = 3 cm και είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί η πλευρά του ισοπλεύρου αυτού τριγώνου.

21. ** Σ’ ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή Α με τα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

(ΑΚΓΛ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓΔ).



22. ** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΒΓ = α και ΑΒ = β. Φέρνουμε την ΟΜ, όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ.

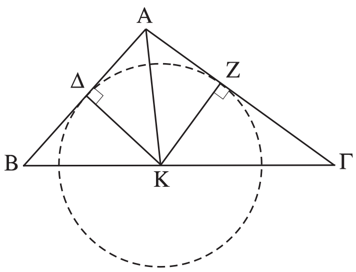


α) Να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου ΟΜΒ συναρτήσει των α, β.

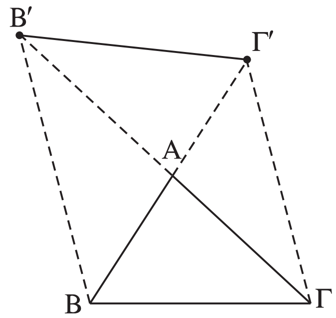
β) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΓ είναι ισοδύναμα.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΟΜΒ συναρτήσει των α, β.

23. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και κύκλος (Κ, R) που έχει το κέντρο του στην πλευρά ΒΓ και εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Να δείξετε ότι:
R (β + γ) = 2Ε.

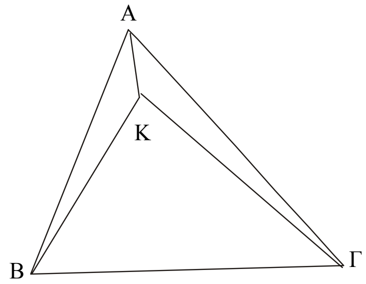


24. ** Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μια οποιαδήποτε ευθεία που να συναντά την προέκταση της ΓΑ, προς το μέρος του Α σε ένα σημείο Β΄, καθώς και την ΓΓ΄//ΒΒ΄, που συναντά την προέκταση της ΒΑ στο Γ΄. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ είναι ισεμβαδικά.



25. ** Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Κ έτσι ώστε να είναι γωνία ΑΚΒ = γωνία ΓΚΑ = 120° και ΚΑ = 2 cm, ΚΒ = 6 cm, ΚΓ = 10 cm. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριγώνων:

α) ΚΒΓ και β) ΑΒΓ.



26. ** Αν το άθροισμα των διαγωνίων ενός ρόμβου είναι 14 cm και η περίμετρός του είναι 20 cm, να βρεθούν:

α) το εμβαδόν του και

β) το ύψος του ρόμβου από την κορυφή Α.

27. ** Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μια γωνία του 5-πλάσια μιας άλλης και την περίμετρό του 12-πλάσια μιας πλευράς. Αν το εμβαδόν του είναι 40 cm^2, να υπολογισθούν:

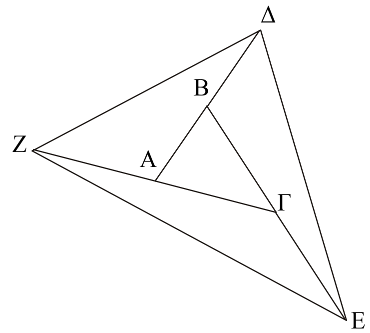
α) οι πλευρές του και

β) τα ύψη του.

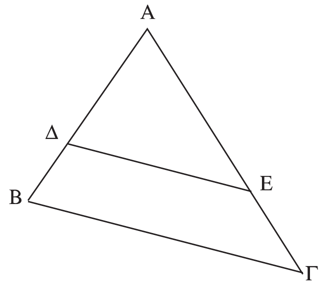
28. ** Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως κατά τμήματα ΒΔ = ΒΑ, ΓΕ = ΓΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να δείξετε ότι:

α) (ΖΓΕ) = 2 (ΑΒΓ) και

β) (ΔΕΖ) = 7 (ΑΒΓ).



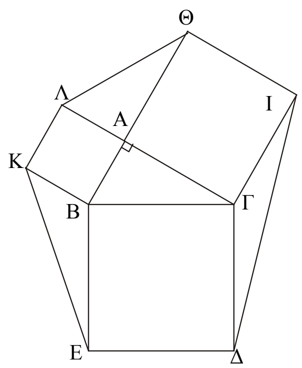
29. ** Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΒΓ) \cdot (ΑΔΕ)$.



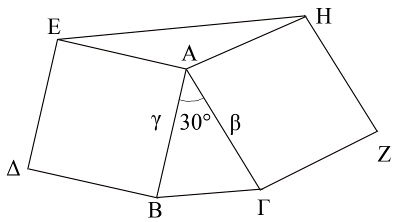
30. ** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Κατασκευάζουμε επί των τριών πλευρών και εκτός του τριγώνου τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΓΑΘΙ, ΑΒΚΛ. Αν γνωρίζουμε τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α, να υπολογισθούν:

α) Τα εμβαδά (ΚΒΕ), (ΔΓΙ), (ΛΑΘ) και

β) Το εμβαδόν του εξαγώνου ΔΕΚΛΘΙ,



31. ** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = γ, ΑΓ = β και γωνία Α = 30°. Επί των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και έξω από το τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ και φέρνουμε την ΕΗ.



α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

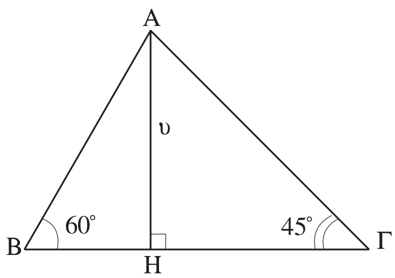
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΒΓΖΗΕΔ.

32. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΗ = υ, γωνία Β = 60° και γωνία Γ = 45°. Να υπολογίσετε συναρτήσει του υ:

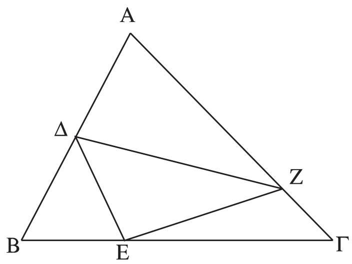
α) Τις πλευρές του τριγώνου

β) Το εμβαδόν του

γ) Τα ύψη προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.



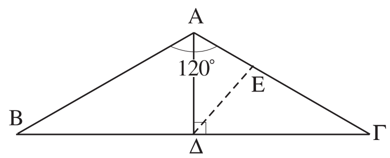
33. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ έτσι ώστε: $ΑΔ = \frac{1}{2}$ ΑΒ, $ΒΕ = \frac{1}{3}$ ΒΓ, $ΓΖ = \frac{1}{4}$ ΓΑ. Αν γνωρίζουμε ότι (ΑΒΓ) = Ε, να υπολογίσετε:



α) Τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΕ, ΕΖΓ, ΑΔΖ.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

34. ** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με ΑΒ = 6 cm και γωνία ΒΑΓ = 120°.

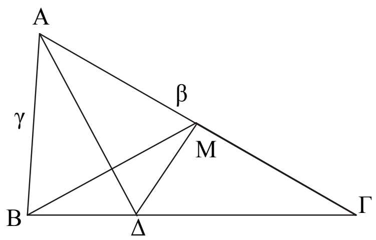


α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

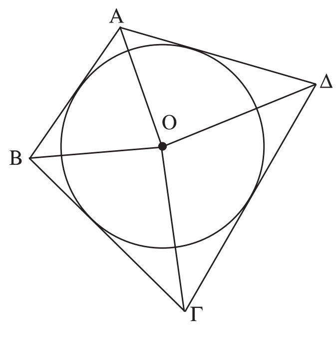
β) Αν Ε σημείο της ΑΓ, τέτοιο ώστε $ΑΕ = \frac{1}{2}$ ΕΓ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.

35. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 2γ, ΑΔ μια διχοτόμος του και ΒΜ μια διάμεσός του. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{(ΒΜΔ)}{(ΔΜΓ)} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{(ΜΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}$.



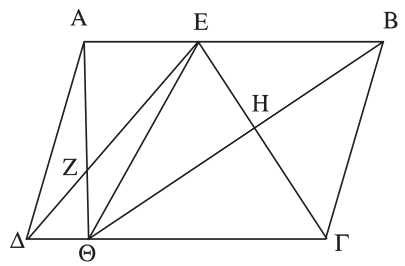
36. ** Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Ο. Να δείξετε ότι αληθεύει η σχέση:
(ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).



37. ** Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε δύο τυχόντα σημεία Ε και Θ επί των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Οι ευθείες ΔΕ και ΑΘ τέμνονται στο Ζ και οι ευθείες ΓΕ και ΒΘ τέμνονται στο Η. Να δείξετε ότι:

α) (ΕΖΘ) = (ΑΖΔ)

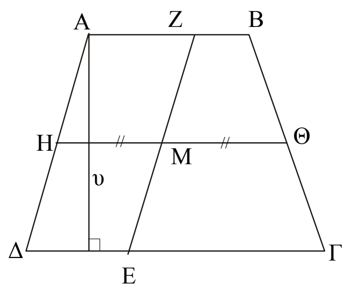
β) (ΕΗΘΖ) = (ΒΗΓ) + (ΑΔΖ).



38. ** Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ, υ το ύψος από το Α και ΗΘ η διάμεσός του. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το μέσο Μ της ΗΘ και τέμνει τις ΑΒ, ΔΓ στα σημεία Ζ, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) (ΑΖΕΔ) = ΗΜ.υ και

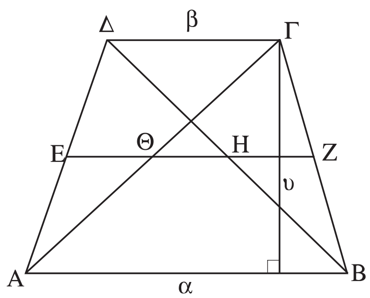
β) (ΑΖΕΔ) = (ΖΒΓΕ).



39. ** Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι βάσεις είναι ΑΒ = α, ΓΔ = β και υ το ύψος του. Φέρνουμε τη διάμεσο ΕΖ που τέμνει τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ στα Θ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

α) (ΑΗΓ) = $\dfrac{(\alpha - \beta)\,\upsilon}{4}$ και

β) (ΑΒΖΕ) - (ΕΖΓΔ) = (ΑΗΓ).

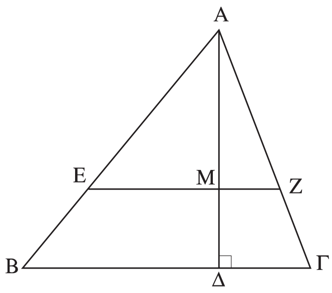


40. ** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει α = 17 cm, β = 8 cm, γ = 15 cm.

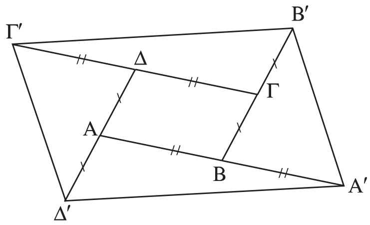
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

41. ** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν 90 cm^2. Από ένα σημείο Μ του ύψους του ΑΔ, που το διαιρεί σε δύο τμήματα ΑΜ, ΜΔ με λόγο $\frac{2}{1}$, φέρνουμε παράλληλο προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.



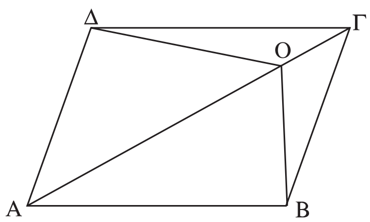
42. ** Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις πλευρές του και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΑΔ΄ = ΑΔ, ΒΑ΄ = ΒΑ, ΓΒ΄ = ΓΒ, ΔΓ΄ = ΔΓ.



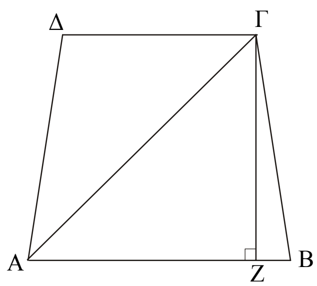
α) Να δείξετε ότι το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι παραλληλόγραμμο

β) Να εκφραστεί το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄Δ΄, συναρτήσει του εμβαδού Ε του ΑΒΓΔ.

43. ** Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο σημείο της διαγωνίου του ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΔ είναι ισοδύναμα.

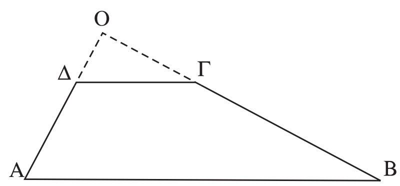


44. ** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ και ύψος ΓΖ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου αυτού είναι διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΖ.



45. ** Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου, αν γνωρίζουμε ότι η περίμετρός του είναι 60 m, το εμβαδόν του 160 m^2 και το ύψος του 8 m.

46. ** Δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, που έχει βάσεις ΑΒ = 70 cm, ΓΔ = 20 cm και μη παράλληλες πλευρές ΒΓ = 40 cm και ΑΔ = 30 cm.



α) Να αποδειχθεί ότι οι ΒΓ και ΑΔ είναι κάθετοι.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

47. ** Να δείξετε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει:

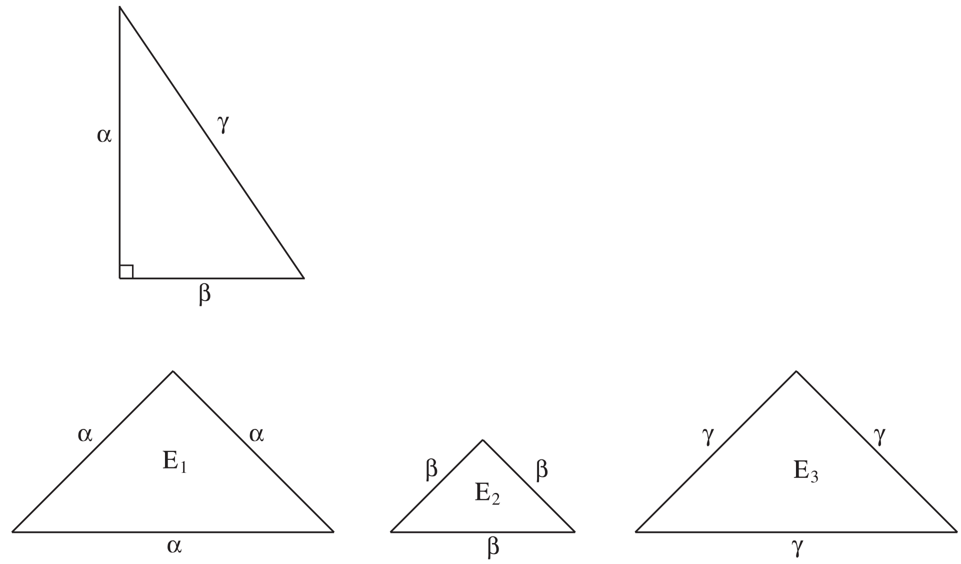
$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3Ε\sqrt{3}$

(μ_α, μ_β, μ_γ οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου και Ε το εμβαδόν του).

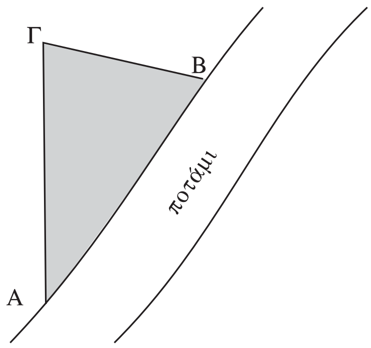
48. ** Δείξτε ότι δύο τρίγωνα που έχουν κορυφή ένα τυχόν σημείο της περιμέτρου ενός παραλληλογράμμου και βάσεις τις διαγώνιές του, έχουν σταθερό άθροισμα εμβαδών.

49. ** Να διαιρεθεί τετράγωνο πλευράς α = 6 cm σε τρία ισοδύναμα μέρη με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.

50. ** Παρατηρώντας τα 4 παρακάτω τρίγωνα, βρείτε τη σχέση που συνδέει μεταξύ τους τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 των αντίστοιχων τριγώνων. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



51. ** Μια ομάδα προσκόπων κατασκηνώνει δίπλα σ' ένα ποτάμι και θέλει να σχηματίσει μια τριγωνική περίφραξη στην όχθη του ποταμού (βλ. διπλανό σχήμα). Η ομάδα έχει στη διάθεσή της δύο σχοινιά μήκους 30 m και 40 m και θέλει να περιφράξει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. Πώς θα το καταφέρει:

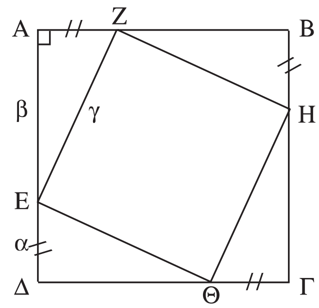


α) αν τα μήκη ΑΓ, ΓΒ της τριγωνικής περίφραξης είναι 40 m και 30 m αντίστοιχα;

β) αν το ΑΓ + ΓΒ = 70 m;

Σημείωση: *Θεωρήστε την όχθη ΑΒ περίπου ευθεία γραμμή.*

52. ** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και ΕΔ = ΘΓ = ΗΒ = ΑΖ.



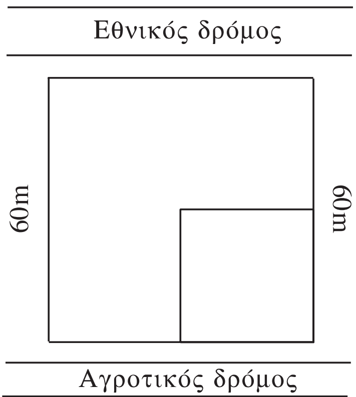
α) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ συναρτήσει των α, β.

β) Τι σχήμα είναι το ΕΖΗΘ;

γ) Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΖΕ, ΕΔΘ, ΘΓΗ, ΗΒΖ και του σχήματος ΕΖΗΘ συναρτήσει των α, β.

δ) Χρησιμοποιώντας τις απαντήσεις των ερωτημάτων (α), (γ), ποιο βασικό πολύ γνωστό γεωμετρικό θεώρημα μπορείτε να αποδείξετε;

53. ** Τέσσερις αδελφοί κληρονόμησαν από τον πατέρα τους διαμπερές τετραγωνικό οικόπεδο πλευράς 60 m. Για να πληρώσουν την Εφορία πούλησαν ένα τμήμα από αυτό σχήματος τετραγώνου, πλευράς 30 m, με πρόσοψη στον αγροτικό δρόμο. Το υπόλοιπο οικόπεδο το μοίρασαν μεταξύ τους τα αδέλφια σε 4 ισεμβαδικά οικόπεδα με πρόσοψη στον Εθνικό δρόμο.



α) Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα πούλησαν για να πληρώσουν την Εφορία.

β) Να βρείτε πόσο είναι το εμβαδόν καθενός από τα 4 οικόπεδα που πήραν οι αδελφοί.

γ) Να σχεδιάσετε τα οικόπεδα που πήρε καθένας από τους τέσσερις αδελφούς και να βρείτε την περίμετρό τους.

δ) Αν το τετράγωνο που πουλήθηκε ήταν σε διαφορετική θέση, μπορούσε να γίνει δικαιότερη η διαίρεση του υπόλοιπου οικοπέδου για τα τέσσερα αδέλφια;

Παρατήρηση: *Η ερώτηση (δ) να μην δοθεί σε διαγώνισμα, γιατί είναι θέμα που μπορούμε να διαπραγματευθούμε μόνο στην τάξη.*

54. ** Για να ρυμοτομηθεί τετραγωνικό αγροτεμάχιο πλευράς 600 m, κατασκευάζεται στο κέντρο του τετραγωνική πλατεία πλευράς 300 m. Το υπόλοιπο αγροτεμάχιο χωρίζεται σε 8 ισεμβαδικά οικόπεδα.

α) Σχεδιάστε τις διαγωνίους του τετραγωνικού αγροτεμαχίου και υπολογίστε το μήκος τους.

β) Τοποθετήστε στο σχήμα την τετραγωνική πλατεία και υπολογίστε το εμβαδόν της.

γ) Ολοκληρώστε το σχήμα σχεδιάζοντας τα 8 ζητούμενα ισεμβαδικά οικόπεδα. Τι σχήμα έχουν αυτά;

δ) Υπολογίστε για καθένα από τα 8 οικόπεδα:

i) το εμβαδόν του

ii) την περίμετρό του.

Παρατήρηση: *Το παραπάνω πρόβλημα μπορούμε να το διαπραγματευθούμε στην τάξη και με την παρακάτω εκφώνηση:*

Πρόβλημα:

Για να ρυμοτομηθεί τετραγωνικό αγροτεμάχιο πλευράς 600 m, κατασκευάζεται στο κέντρο του τετραγωνική πλατεία πλευράς 300 m. Το υπόλοιπο αγροτεμάχιο να χωριστεί σε 8 ισεμβαδικά οικόπεδα.

55. ** Δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο ορθογώνιο.

56. ** Δεδομένο πεντάγωνο να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

57. ** Δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο ορθογώνιο τρίγωνο.

58. ** Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δεδομένο ορθογώνιο με διαστάσεις $\alpha = 3$, $\beta = 7$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δ, **2.** Ε, **3.** Β, **4.** Γ, **5.** Δ, **6.** Α, **7.** Δ, **8.** Ε, **9.** Γ, **10.** Δ, **11.** Δ, **12.** Β, **13.** Α, **14.** Δ, **15.** Γ, **16.** Α, **17.** Β, **18.** Β.

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Λ, **2.** Σ, **3.** Σ, **4.** Σ, **5.** Λ, **6.** Λ, **7.** Σ, **8.** Σ, **9.** Σ, **10.** Σ, **11.** Λ, **12.** Σ, **13.** Λ, **14.** Σ, **15.** Λ, **16.** Λ, **17.** Σ, **18.** Λ, **19.** Λ, **20.** Λ, **21.** Λ, **22.** Σ, **23.** Σ, **24.** Σ.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Β
2	Α
3	Δ

2.

1	Ε
2	Α
3	Γ

3.

1	Δ
2	Α
3	Β
4	Γ

4.

1	ΣΤ
2	Δ
3	Γ
4	Ε

5.

1	Α
2	ΣΤ
3	Δ
4	Γ

6.

1	Ζ
2	Ε
3	Γ
4	Α
5	Δ

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Το ύψος του.

2. Το μισό της άλλης.

3. $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$

4. Η Γ και είναι ίση με 90°.

5. Το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

6. δ_1, $\dfrac{\delta_2}{2}$ ή οι $\dfrac{\delta_1}{2}$, δ_2.

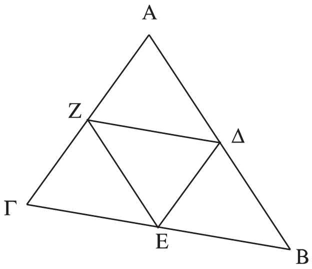
7. $\dfrac{\alpha\gamma}{4}$

8. α) 24 β) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ γ) $\dfrac{9\alpha}{2}$

9. α) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ β) $2\sqrt{5}$ γ) $25\sqrt{3}$ δ) $4\sqrt{3}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

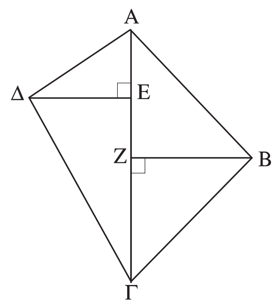
1. α) Επειδή τα Ζ, Δ, Ε είναι μέσα των πλευρών τριγώνου είναι ΖΔ // ΓΕ και ΔΕ // ΖΓ. Άρα το τετράπλευρο ΖΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. Η διαγώνιος ΖΕ του παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Άρα (ΔΕΖ) = (ΖΓΕ).



β) Έχουμε (ΔΕΖ) = (ΖΓΕ) από το παραλληλόγραμμο ΖΔΕΓ, (ΔΕΖ) = (ΔΕΒ) από το παραλληλόγραμμο ΖΔΒΕ και (ΔΕΖ) = (ΑΖΔ) από το παραλληλόγραμμο ΑΖΕΔ. Άρα (ΔΕΖ) = (ΔΕΒ) = (ΖΓΕ) = (ΑΖΔ). Επομένως

$(ΑΒΓ) = 4\,(ΔΕΖ)$ ή $(ΔΕΖ) = \frac{1}{4}\,(ΑΒΓ)$.

2. Θα δείξουμε ότι $(ΑΒΓΔ) = ΑΓ\,\frac{ΔΕ + ΒΖ}{2}$.



Πράγματι είναι:

$$(ΑΔΓ) = \frac{ΑΓ \cdot ΔΕ}{2}$$

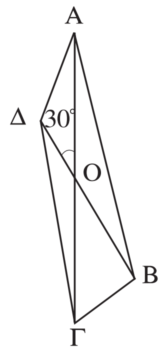
$$(ΑΒΓ) = \frac{ΑΓ \cdot ΒΖ}{2}$$

Επομένως $(ΑΔΓ) + (ΑΒΓ) = \frac{ΑΓ \cdot ΔΕ}{2} + \frac{ΑΓ \cdot ΒΖ}{2}$ ή

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΓ \cdot ΔΕ + ΑΓ \cdot ΒΖ}{2} = \frac{ΑΓ\,(ΔΕ + ΒΖ)}{2}$$

$$(ΑΒΓΔ) = ΑΓ\,\frac{ΔΕ + ΒΖ}{2}$$

3. α) $(ΑΟΔ) = \frac{1}{2}$ ΟΑ.ΟΔ·ημ30° $= \frac{1}{2}$ ΟΑ.ΟΔ·$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ΟΑ.ΟΔ



β) Έχουμε: $(ΑΟΔ) = \frac{1}{4} ΟΑ \cdot ΟΔ$

Όμοια έχουμε: $(ΓΟΒ) = \frac{1}{4} ΟΓ \cdot ΟΒ$

$(ΔΟΓ) = \frac{1}{4} ΟΔ \cdot ΟΓ$

$(ΑΟΒ) = \frac{1}{4} ΟΑ \cdot ΟΒ$

Άρα: $(ΑΟΔ) + (ΓΟΒ) + (ΔΟΓ) + (ΑΟΒ) =$

$\frac{1}{4} (ΟΑ \cdot ΟΔ + ΟΓ \cdot ΟΒ + ΟΔ \cdot ΟΓ + ΟΑ \cdot ΟΒ) =$

$\frac{1}{4} [ΟΑ (ΟΔ + ΟΒ) + ΟΓ (ΟΒ + ΟΔ)] =$

$\frac{1}{4} (ΟΑ \cdot ΒΔ + ΟΓ \cdot ΒΔ) = \frac{1}{4} [(ΒΔ (ΟΑ + ΟΓ)] = \frac{1}{4} ΒΔ \cdot ΑΓ$

$(ΑΒΓΔ) = (ΑΟΔ) + (ΓΟΔ) + (ΓΟΒ) + (ΑΟΒ) = \frac{1}{4} ΑΓ \cdot ΒΔ$

4. Είναι $(ΑΒΔ) = (ΒΓΔ)$ (1)

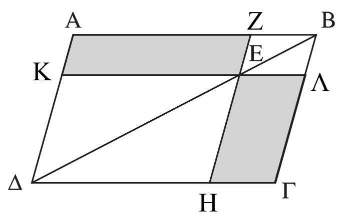
από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ

$(ΚΕΔ) = (ΕΗΔ)$ (2)

από το παραλληλόγραμμο ΚΕΗΔ

$(ΒΖΕ) = (ΒΛΕ)$ (3)

από το παραλληλόγραμμο ΖΒΛΕ



Αφαιρούμε τις ισότητες (2) και (3) από την (1) και έχουμε:

$(ΑΒΔ) - (ΚΕΔ) - (ΒΖΕ) = (ΒΓΔ) - (ΕΗΔ) - (ΒΛΕ)$

$(ΑΚΕΖ) = (ΕΛΓΗ)$

Από ίσα αφαιρέσαμε ίσα και έμειναν ίσα.

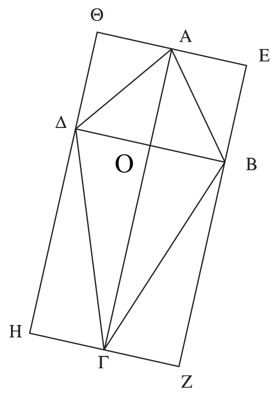
5. Θα δείξουμε ότι (ΗΖΕΘ) = 2 (ΑΒΓΔ).

Πράγματι, από τα σχηματιζόμενα παραλληλόγραμμα ΑΕΒΟ, ΑΟΔΘ, ΔΟΓΗ και ΓΖΒΟ έχουμε ότι (ΑΘΔ) = (ΑΟΔ), (ΑΕΒ) = (ΑΟΒ), (ΔΟΓ) = (ΔΗΓ) και (ΓΟΒ) = (ΒΖΓ). Επομένως:

(ΗΖΕΘ) = (ΑΘΔ) + (ΑΟΔ) + (ΑΕΒ) + (ΑΟΒ) + (ΔΟΓ) + (ΔΗΓ) + (ΓΟΒ) + (ΒΖΓ) =

2 (ΑΟΔ) + 2 (ΑΟΒ) + 2 (ΔΟΓ) + 2 (ΓΟΒ) =

2 [(ΑΟΔ) + (ΑΟΒ) + (ΔΟΓ) + (ΓΟΒ)] = 2 (ΑΒΓΔ)



6. Από την εκφώνηση έχουμε ότι Ε = $\frac{\delta_1\alpha}{2}$. Όμως ξέρουμε ότι το εμβαδό του ρόμβου δίνεται από τη σχέση Ε = $\frac{\delta_1\delta_2}{2}$. Άρα $\frac{\delta_1\alpha}{2} = \frac{\delta_1\delta_2}{2}$ ή ή α = δ_2.

Επειδή λοιπόν καταλήξαμε ότι η μία διαγώνιος του ρόμβου θα ισούται με την πλευρά του και επειδή οι διαδοχικές πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, η διαγώνιος αυτή λοιπόν θα χωρίζει το ρόμβο σε δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Άρα υποχρεωτικά τότε η μία γωνία του ρόμβου θα είναι 60°.

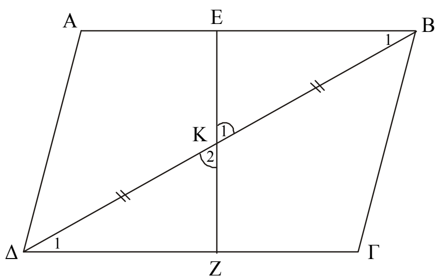
7. Ξέρουμε ότι το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τη σχέση Ε = $\frac{1}{2}\alpha\ \upsilon_\alpha$. Όμως σύμφωνα με την εκφώνηση είναι Ε = $\frac{1}{2}\ \alpha\cdot\mu_\alpha$. Άρα $\frac{1}{2}\alpha\cdot\mu_\alpha = \frac{1}{2}\ \alpha\cdot\upsilon_\alpha$ ή $\mu_\alpha = \upsilon_\alpha$.

Για να συμβαίνει όμως αυτή η σχέση ότι δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά α να ισούται με το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά α, πρέπει το τρίγωνο να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

8. Ξέρουμε ότι το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$. Όμως, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\cdot\delta_\alpha$. Άρα $\frac{1}{2}\alpha\cdot\delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$ ή $\delta_\alpha = \upsilon_\alpha$.
Για να συμβαίνει όμως αυτή η σχέση ότι δηλαδή η διχοτόμος της γωνίας που αντιστοιχεί στην πλευρά α να ισούται με το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά α, πρέπει το τρίγωνο να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

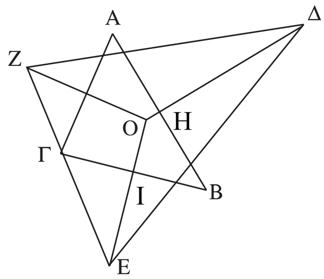
9. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς α είναι 4α και το εμβαδό του είναι α^2. Η περίμετρος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς β είναι 3β. Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι 4α = 3β ή $\alpha = \frac{3\beta}{4}$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά $\alpha = \frac{3\beta}{4}$ θα είναι $E = \alpha^2 = \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2 = \frac{9\beta^2}{16}$.

10. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΚΕΒ και ΚΔΖ είναι ίσα γιατί $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφή, $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ και ΚΒ = ΚΔ.
Άρα ΕΒ = ΔΖ.



Όμως επειδή ΑΒ = ΔΓ θα έχουμε ότι ΑΒ - ΕΒ = ΓΔ - ΔΖ ή ΑΕ = ΖΓ. Τα τραπέζια λοιπόν ΑΕΖΔ και ΕΒΓΖ είναι ισοδύναμα, αφού έχουν ίσα ύψη και ίσο ημιάθροισμα βάσεων.
Δηλαδή: $\frac{AE + \Delta Z}{2}\upsilon = \frac{EB + Z\Gamma}{2}\upsilon$ ή (ΑΕΖΔ) = (ΒΓΖΕ).

11. α) $(\Delta OE) = \frac{1}{2}\ O\Delta \cdot OE \cdot \etaμE\hat{O}\Delta =$



$\frac{1}{2}\ AB \cdot B\Gamma \cdot \etaμB = (AB\Gamma)$

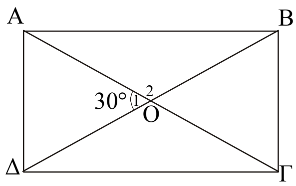
$\etaμE\hat{O}\Delta = \etaμB$ γιατί το τετράπλευρο ΟΗΒΙ

είναι εγγράψιμο, αφού έχει $\hat{I} = \hat{H} = 90°$.

β) Όμοια βρίσκουμε ότι $(ZO\Delta) = (AB\Gamma)$ και $(ZOE) = (AB\Gamma)$.

Άρα $(\Delta OE) + (ZOE) + (ZO\Delta) = 3\ (AB\Gamma)$.

12. Είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{A\Gamma^2}{4}$.



Όμως $(AO\Delta) = \frac{1}{2}\ OA \cdot O\Delta \cdot \etaμO_1$ και

$(AOB) = \frac{1}{2}\ OA \cdot OB \cdot \etaμO_2$

Τα τρίγωνα αυτά είναι ισεμβαδικά γιατί $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180°$.

Άρα $(AB\Gamma\Delta) = 4\ (AO\Delta)$

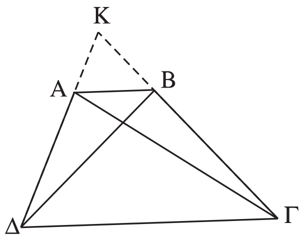
$4\ (AO\Delta) = \frac{A\Gamma^2}{4}$ ή $4\ \frac{1}{2} \cdot \frac{A\Gamma}{2} \cdot \frac{A\Gamma}{2}\ \etaμO_1 = \frac{A\Gamma^2}{4}$ ή

$\frac{A\Gamma^2}{2} \cdot \etaμO_1 = \frac{A\Gamma^2}{4}$ ή $\etaμO_1 = \frac{1}{2}$ ή $\hat{O}_1 = 30°$

13. Το εμβαδό τετραγώνου πλευράς α είναι $E = α^2$. Εδώ είναι $α^2 = 256\ cm^2$ ή $α = 16$ cm. Αν ελαττώσουμε την πλευρά α κατά 10 cm, τότε γίνεται 6 cm η πλευρά και το εμβαδό τότε του τετραγώνου γίνεται $E' = 36\ cm^2$.

Άρα $\Delta E = E - E' = 256 - 36 = 220\ cm^2$.

14. Είναι: $(ΓΑΒ) = \dfrac{AB \cdot υ}{2}$, $(ΔΑΒ) = \dfrac{AB \cdot υ}{2}$.



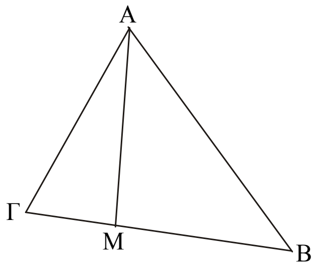
Άρα (ΓΑΒ) = (ΔΑΒ)

(ΚΑΓ) = (ΚΑΒ) + (ΓΑΒ)

(ΚΔΒ) = (ΚΑΒ) + (ΔΑΒ)

Άρα (ΚΑΓ) = (ΚΔΒ).

15. Θα δείξουμε ότι $(ΑΒΜ) = \dfrac{2}{3}\,(ΑΒΓ)$.



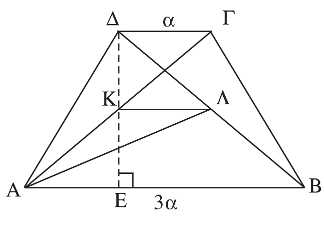
Πράγματι: $(ΑΒΜ) = \dfrac{1}{2}\,ΜΒ \cdot υ = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}\,ΒΓ \cdot υ =$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,ΒΓ \cdot υ\right) = \frac{2}{3}\,(ΑΒΓ)$$

16. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το τρίγωνο ΚΛΜ με γωνία Κ = 120° έχουν γωνίες παραπληρωματικές.

Επομένως $\dfrac{(ΚΛΜ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΚΛ \cdot ΛΜ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \dfrac{ΚΛ \cdot ΛΜ}{α \cdot α} = \dfrac{ΚΛ \cdot ΛΜ}{α^2}$

17. α) Είναι γνωστό ότι:



$$ΚΛ = \frac{ΑΒ - ΔΓ}{2} = \frac{3α - α}{2} = α$$

$$\text{Άρα } (ΑΚΛ) = \frac{ΚΛ \cdot ΚΕ}{2} = \frac{α \cdot α}{2} = \frac{α^2}{2}$$

ΑΕ = α, άρα ΔΓΕΑ παραλληλόγραμμο,

άρα $ΚΕ = \dfrac{2α}{2} = α$

β) Από το τραπέζιο ΚΛΒΑ προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ έχουν κοινή βάση ΚΛ και κοινό ύψος ΚΕ = α. Άρα (ΑΚΛ) = (ΒΚΛ). Όμοια, από το τραπέζιο ΚΛΓΔ έχουμε ότι (ΓΚΛ) = (ΔΚΛ), αφού έχουν κοινή βάση ΓΔ = α και κοινό ύψος ΚΔ = α.

18. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Τότε το εμβαδό του είναι α^2. Αν η πλευρά του τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, τότε:
$E' = (\alpha + 4)^2$ ή $E + 136 = (\alpha + 4)^2$ ή $\alpha^2 + 136 = \alpha^2 + 8\alpha + 16$ ή $8\alpha =$
$136 - 16$ ή $8\alpha = 120$ ή $\alpha = 15$ m

19. Επειδή η περίμετρος του ρόμβου είναι 48 cm τότε 48 = 4α, όπου α είναι η πλευρά του ρόμβου. Άρα α = 12 cm. Όμως ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο και αφού η πλευρά του είναι α και το ύψος του είναι 5 cm, τότε το εμβαδό του είναι 12 cm · 5 cm = 60 cm^2.

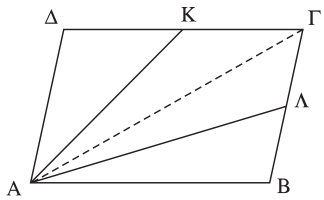
20. Έστω Ε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Τότε $E = \frac{1}{2}\ \alpha\cdot\beta\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\ 12\cdot 3\cdot\eta\mu 60° = \frac{1}{2}\ 36\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ cm^2$.

Επομένως το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι:

$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ ή $\alpha^2 = 36$ ή $\alpha = 6$ cm.

21. Είναι:



$(\text{ΓΑΔ}) = \dfrac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓΔ})$ και $(\text{ΑΚΓ}) = \dfrac{1}{2}\,(\text{ΓΑΔ}) =$

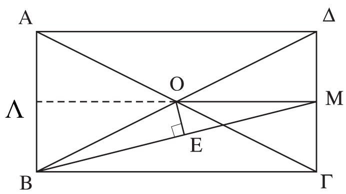
$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓΔ}) = \dfrac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ})$.

Όμοια $(\text{ΑΒΓ}) = \dfrac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓΔ})$ και $(\text{ΑΛΓ}) = \dfrac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓ}) =$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ})$$

Άρα $\quad (\text{ΑΚΓΛ}) = (\text{ΑΚΓ}) + (\text{ΑΛΓ}) = \dfrac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}) + \dfrac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}) = \dfrac{1}{2}\,(\text{ΑΒΓΔ})$

22. α) Έστω $\text{ΒΓ} = \beta$ και $\text{ΑΒ} = \alpha$.



Είναι $\text{ΟΜ} = \dfrac{\beta}{2}$

$\text{ΟΒ} = \dfrac{\text{ΒΔ}}{2} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΜ έχουμε:

$\text{ΒΜ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \text{ΓΜ}^2$ ή $\text{ΒΜ}^2 = \beta^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{4\beta^2+\alpha^2}{4}$

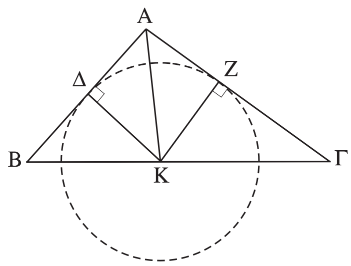
$\text{ΒΜ} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}$

β) $(\text{ΟΒΜ}) = \dfrac{\text{ΟΜ}\cdot\text{ΒΛ}}{2} = \dfrac{\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{2} = \dfrac{\alpha\beta}{8} \quad (1)$

$(\text{ΟΓΜ}) = \dfrac{\text{ΟΜ}\cdot\text{ΜΓ}}{2} = \dfrac{\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{2} = \dfrac{\alpha\beta}{8}$. Άρα $(\text{ΟΒΜ}) = (\text{ΟΜΓ})$.

γ) Είναι η σχέση (1).

23. Έστω Ε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

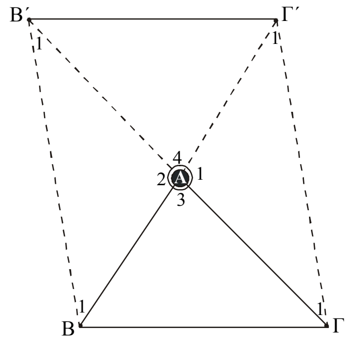


Τότε: (ΑΒΓ) = (ΑΚΒ) + (ΑΚΓ)

$Ε = \frac{γR}{2} + \frac{βR}{2}$ (ΑΒ = γ, ΑΓ = β)

$2Ε = (β + γ) R$

24. Είναι: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$, $\hat{Γ}_1 = \hat{Β}'_1$, $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}'_1$.



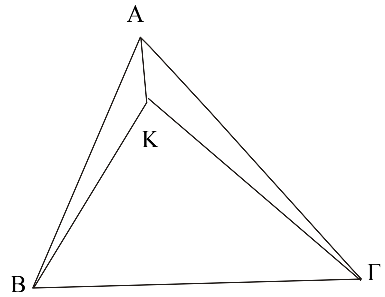
Άρα: $Α\hat{Γ}Γ' \approx Α\hat{Β}Β'$

Από την ομοιότητα των τριγώνων $Α\hat{Γ}Γ'$ και $Α\hat{Β}Β'$ έχουμε: $\frac{ΑΓ}{ΑΒ'} = \frac{ΑΓ'}{ΑΒ}$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ έχουν μια γωνία ίση, $\hat{Α}_3 = \hat{Α}_4$. Επομένως $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒ'Γ')} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΒ' \cdot ΑΓ'} \overset{(1)}{=} 1$

Άρα (ΑΒΓ) = (ΑΒ΄Γ΄).

25. $Β\hat{Κ}Γ = 360° - (Α\hat{Κ}Β + Α\hat{Κ}Γ) =$



$360° - 240° = 120°$

α) $(ΚΒΓ) = \frac{1}{2} ΚΒ \cdot ΚΓ \cdot ημΒ\hat{Κ}Γ =$

$\frac{1}{2} 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ cm^2

β) $(ΑΚΒ) = \frac{1}{2} ΑΚ \cdot ΚΒ \cdot ημΑ\hat{Κ}Β = \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm^2

$(ΑΚΓ) = \frac{1}{2} ΑΚ \cdot ΚΓ \cdot ημΑ\hat{Κ}Γ = \frac{1}{2} 2 \cdot 10 \cdot ημ120° = \frac{1}{2} 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm

$(ΑΒΓ) = (ΑΚΒ) + (ΑΚΓ) + (ΚΒΓ) = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 23\sqrt{3}$ cm^2

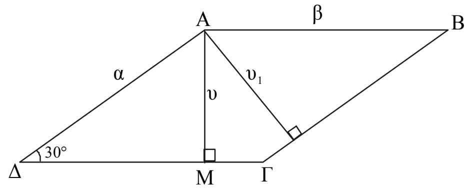
26. α) Έστω α = 5 cm η πλευρά του ρόμβου. Ισχύει: $\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 = 5^2$

(Πυθαγόρειο θεώρημα) ή $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 100$. Αφού $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 2\delta_1\delta_2 = 100$,

τότε έχουμε $\delta_1 + \delta_2 = 14$ cm, $\delta_1\delta_2 = 48$ cm^2. Όμως $E_{\text{ρόμβου}} = \frac{\delta_1\delta_2}{2} = 24$ cm^2

β) $E = \upsilon \cdot \alpha$ ή $24 = \upsilon \cdot 5$. Άρα $\upsilon = 4{,}8$ cm.

27. α) Αν $\hat{\Delta} = x$, τότε $\hat{A} = 5x$.



Άρα $\hat{\Delta} = 30°$, $\hat{A} = 150°$.

Άρα $AM = \upsilon = \frac{\alpha}{2}$ (1)

$E = \upsilon\beta \overset{(1)}{=} \frac{\alpha\beta}{2} = 40$ (2)

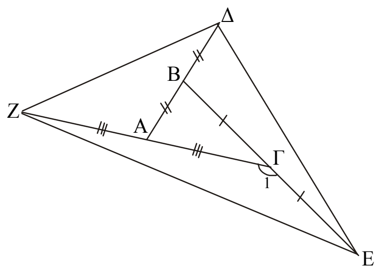
Όμως $2(\alpha + \beta) = 12\alpha$ (3)

Από (2), (3) έχουμε β = 20 cm, α = 4 cm (4)

β) Από (1), (4) έχουμε υ = 2 cm. Όμως $E = \upsilon_1 \cdot \alpha = 40$ ή $\upsilon_1 \cdot 4 = 40$.

Άρα $\upsilon_1 = 10$ cm.

28. α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΖΕ έχουν τις γωνίες τους Γ και Γ_1 παραπληρωματικές. Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma ZE)} = \frac{B\Gamma \cdot A\Gamma}{Z\Gamma \cdot \Gamma E} = \frac{1}{2}$ (1)



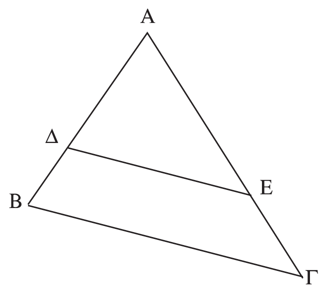
β) Όμοια

$(\Delta BE) = 2\,(AB\Gamma)$, $(ZA\Delta) = 2\,(AB\Gamma)$ (2)

$(\Delta EZ) = (AB\Gamma) + (\Delta BE) + (\Gamma ZE) + (ZA\Delta)$

Απ’ όπου και λόγω των (1), (2) έχουμε (ΔΕΖ) = 7 (ΑΒΓ).

29. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία Α, άρα:



$$\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \qquad (1)$$

Όμοια τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΕ, άρα:

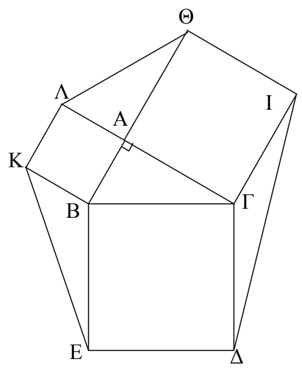
$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΕ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΕ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \qquad (2)$$

Όμως από το θεώρημα του Θαλή: $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ (3) (ΔΕ // ΒΓ)

Από (1), (2), (3) έχουμε $\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΕ)}$.

Άρα $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΒΓ)\,(ΑΔΕ)$.

30. α) Γωνία ΚΒΕ + γωνία ΑΒΓ = 180°.



Άρα $\frac{(ΚΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{γα}{γα} = 1$

(ΑΒ = ΚΒ = γ, ΒΓ = ΒΕ = α).

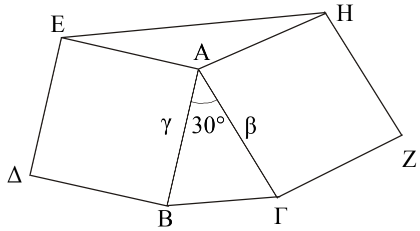
Άρα $(ΚΒΕ) = (ΑΒΓ) = \frac{βγ}{2}$ (ΑΓ = γ).

Όμοια βρίσκουμε $(ΔΓΙ) = \frac{βγ}{2}$, $(ΛΑΘ) = \frac{βγ}{2}$

β) $(ΔΕΚΛΘΙ) = (ΑΒΓ) + (ΚΒΑΛ) + (ΑΓΙΘ) + (ΒΓΔΕ) + (ΚΒΕ) + (ΔΓΙ) + (ΛΑΘ) = \frac{βγ}{2} + γ^2 + β^2 + α^2 + \frac{βγ}{2} + \frac{βγ}{2} + \frac{βγ}{2} = α^2 + β^2 + γ^2 + 2βγ = α^2 + (β + γ)^2$ ή $(ΔΕΚΛΘΙ) = 2α^2 + 2βγ = 2\,(α^2 + βγ)$.

31. α) $B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}H = 180°$.

Άρα $\dfrac{(EAH)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\gamma\beta}{\gamma\beta} = 1$.



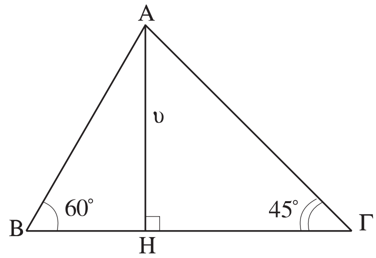
β) $(B\Gamma ZHE\Delta) = (AB\Gamma) + (EAH) +$

$(EAB\Delta) + (A\Gamma ZH) = \dfrac{\gamma\beta\eta\mu 30°}{2} +$

$\dfrac{\gamma\beta\eta\mu 150°}{2} + \gamma^2 + \beta^2 = \dfrac{\gamma\beta}{2} + \gamma^2 + \beta^2$

32. α) Αφού τρίγωνο ΑΗΓ ισοσκελές, τότε

$AH = H\Gamma = \upsilon$ (1) και $A\Gamma = \sqrt{2}\,\upsilon$.



Αφού στο τρίγωνο ΑΒΗ, $B\hat{A}H = 30°$,

τότε $AB = \dfrac{2\upsilon}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}$ και

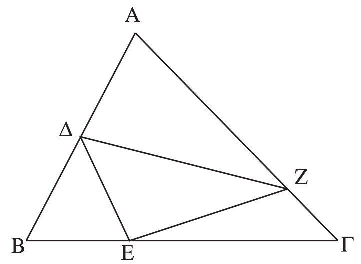
$BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\upsilon\sqrt{3}}{3}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $B\Gamma = BH + H\Gamma = \upsilon\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

β) $E = \upsilon^2\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$

γ) $E = \dfrac{\upsilon_1 \cdot AB}{2}, \ldots, \upsilon_1 = \upsilon\left(\dfrac{3+3\sqrt{3}}{6}\right)$ $E = \dfrac{\upsilon_2 \cdot A\Gamma}{2}, \ldots, \upsilon_2 = \upsilon\left(\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}\right)$

33. α) Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Β.



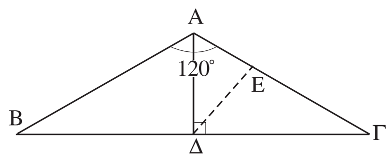
Άρα $\dfrac{(\Delta \mathrm{BE})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \dfrac{\mathrm{B}\Delta \cdot \mathrm{BE}}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma}}$, όμως $\mathrm{BE} = \dfrac{1}{3}$ ΒΓ και $\mathrm{B}\Delta = \dfrac{1}{2}$ ΑΒ.

Άρα $\dfrac{(\Delta \mathrm{BE})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \dfrac{\frac{\mathrm{AB}}{2} \cdot \frac{\mathrm{B\Gamma}}{3}}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{1}{6}$, άρα $(\Delta \mathrm{BE}) = \dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{6} = \dfrac{\mathrm{E}}{6}$.

Όμοια βρίσκουμε $(\mathrm{Z\Gamma E}) = \dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{6} = \dfrac{\mathrm{E}}{6}$ και $(\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}) = \dfrac{3\,(\mathrm{AB\Gamma})}{8} = \dfrac{3\mathrm{E}}{8}$.

β) $(\Delta\mathrm{EZ}) = (\mathrm{AB\Gamma}) - (\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}) - (\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}) - (\mathrm{ZE\Gamma}) = \mathrm{E} - \dfrac{\mathrm{E}}{6} - \dfrac{3\mathrm{E}}{8} - \dfrac{\mathrm{E}}{6} = \dfrac{7\mathrm{E}}{24}$

34. α) $(\mathrm{AB\Gamma}) = \mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{A\Gamma}{\cdot}\eta\mu 120° = 18\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

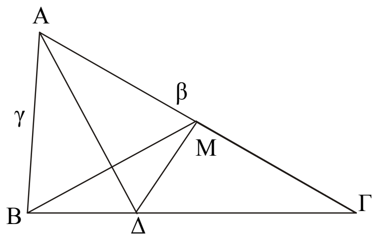


β) Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Γ.

Άρα $\dfrac{(\Delta\Gamma\mathrm{E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \dfrac{\Delta\Gamma \cdot \mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\,\frac{2\mathrm{A\Gamma}}{3}}{\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{2}{6}$

Απ' όπου $(\Delta\mathrm{E\Gamma}) = \dfrac{2\,(\mathrm{AB\Gamma})}{6} = \dfrac{2 \cdot 18\sqrt{3}}{6} = 6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

35. α) Τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΔΜΓ έχουν κοινό ύψος, έστω υ, από την κορυφή Μ. Έτσι:



$\dfrac{(\mathrm{BM}\Delta)}{(\Delta\mathrm{M\Gamma})} = \dfrac{\upsilon \cdot \mathrm{B}\Delta}{\upsilon \cdot \Delta\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Όμως $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\Gamma}$ (1)

(θεώρημα διχοτόμων στο ΑΒΓ, με ΑΔ διχοτόμο της γωνίας Α)

Άρα $\dfrac{(\mathrm{BM}\Delta)}{(\Delta\mathrm{M\Gamma})} = \dfrac{1}{2}$

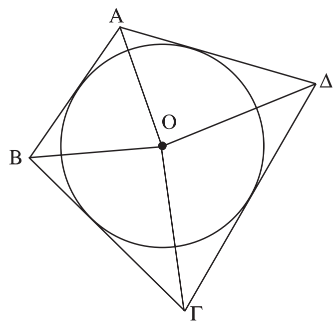
β) $\dfrac{(\text{ΜΔΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{\text{ΜΓ} \cdot \text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΓ}}$ (2)

Όμως από την (1) έχουμε:

$\dfrac{\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}}{\text{ΔΓ}} = \dfrac{1+2}{2}$, …, $\text{ΔΓ} = \dfrac{2\text{ΒΓ}}{3}$ (3)

Έτσι, από τις (2), (3) έχουμε: $\dfrac{(\text{ΜΔΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{\dfrac{\text{ΑΓ}}{2}\dfrac{2\text{ΒΓ}}{3}}{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΓ}} = \ldots = \dfrac{1}{3}$

36. $(\text{ΟΑΒ}) = \dfrac{\text{ΑΒ} \cdot \rho}{2}$ (ρ ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου)



$(\text{ΟΓΔ}) = \dfrac{\text{ΓΔ} \cdot \rho}{2}$, $(\text{ΟΑΔ}) = \dfrac{\text{ΑΔ} \cdot \rho}{2}$,

$(\text{ΟΒΓ}) = \dfrac{\text{ΒΓ} \cdot \rho}{2}$

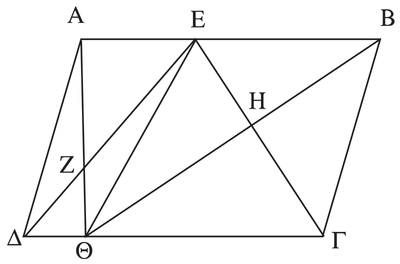
$(\text{ΟΑΒ}) + (\text{ΟΓΔ}) = \dfrac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}}{2}\rho$ $\qquad (\text{ΟΑΔ}) + (\text{ΟΒΓ}) = \dfrac{\text{ΑΔ} + \text{ΒΓ}}{2}\rho$ (1)

Όμως ΑΒ + ΔΓ = ΑΔ + ΒΓ (2)

Άρα, από (1) και (2) έχουμε (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ)

Σημείωση: *Η απόδειξη της (2) είναι απλή λόγω της ισότητας των εφαπτόμενων προς τον κύκλο από σημείο εκτός αυτού.*

37. α) (ΕΖΘ) = (ΑΘΕ) - (ΑΖΕ) (1) και
(ΑΖΔ) = (ΑΔΕ) - (ΑΖΕ) (2)
Όμως (ΑΘΕ) = (ΑΔΕ), διότι έχουν κοινή βάση την ΑΕ και ίσα ύψη από τις κορυφές Δ και Θ την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ. Άρα, από (1), (2) έχουμε (ΕΖΘ) = (ΑΖΔ)



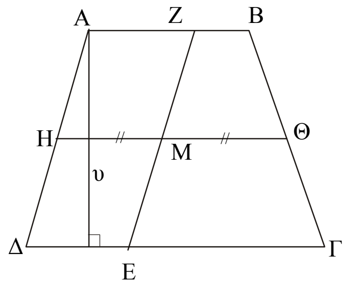
β) (ΕΖΘΗ) = (ΕΖΘ) + (ΕΘΗ) (3)

Όμως στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι (ΕΖΘ) = (ΑΖΔ) (4)

και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι (ΕΘΗ) = (ΗΒΓ) (5)

Άρα η (3) λόγω των (4), (5) γίνεται: (ΕΗΘΖ) = (ΑΖΔ) + (ΗΒΓ)

38. α) Το ΑΖΕΔ είναι τραπέζιο (γενικά). Άρα:



$$\text{ΗΜ} = \frac{\text{ΑΖ} + \text{ΔΕ}}{2}.$$

Άρα (ΑΖΕΔ) = $\dfrac{\text{ΑΖ} + \text{ΔΕ}}{2}$ υ = ΗΜ·υ (1)

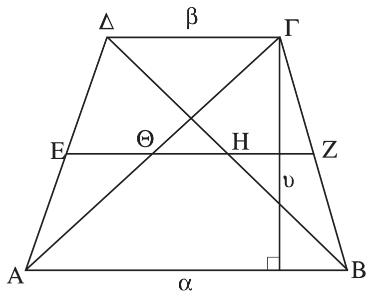
β) Όμοια με το ερώτημα (α) αποδεικνύεται

ότι (ΖΒΓΕ) = ΜΘ·υ (2)

Όμως ΜΘ = ΗΜ (3)

Άρα από τις (1), (2), (3) έχουμε: (ΑΖΕΔ) = (ΖΒΓΕ)

39. α) (ΑΗΓ) = (ΑΘΗ) + (ΘΗΓ).



Όμως τα τρίγωνα ΑΘΗ και ΘΗΓ έχουν κοινή βάση τους ΘΗ = $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ και ίσα ύψη $\dfrac{\upsilon}{2}$, άρα (ΑΗΓ) = $\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cdot \dfrac{\upsilon}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$ + $\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cdot \dfrac{\upsilon}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{(\alpha - \beta)}{4}\,\upsilon$

β) (ΑΒΖΕ) = $\dfrac{\text{ΕΖ} + \alpha}{2} \cdot \dfrac{\upsilon}{2} = \dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \alpha}{2} \cdot \dfrac{\upsilon}{2} = \dfrac{\dfrac{3\alpha+\beta}{2}}{2} \cdot \dfrac{\upsilon}{2} = \dfrac{3\alpha+\beta}{4} \cdot \dfrac{\upsilon}{2}$ ή

(ΑΒΖΕ) = $\dfrac{3\alpha+\beta}{8}$ υ. Όμοια (ΕΖΓΔ) = $\dfrac{3\beta+\alpha}{8}$ υ.

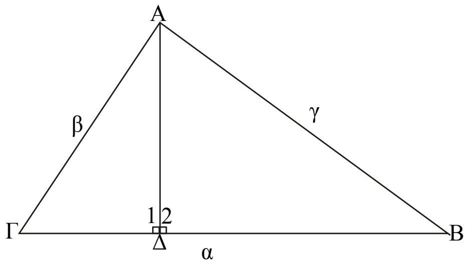
Άρα (ΑΒΖΕ) - (ΕΖΓΔ) = $\dfrac{\alpha - \beta}{4}$ υ = (ΑΗΓ)

40. α) $17^2 = 8^2 + 15^2$, άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Άρα ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α.

β) Τα τρίγωνα (ΑΒΔ), (ΑΓΔ) είναι όμοια.

Άρα: $\dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^2 = \left(\dfrac{15}{8}\right)^2$

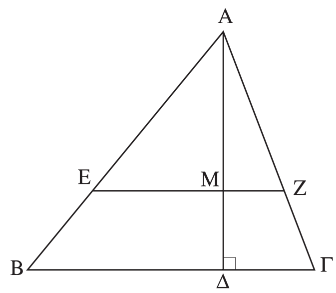


41. Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια. Άρα

$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{AM}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Αφού $(AB\Gamma) = 90\ cm^2$, τότε

$$(AEZ) = \frac{4 \cdot 90}{9} = 40\ cm^2$$

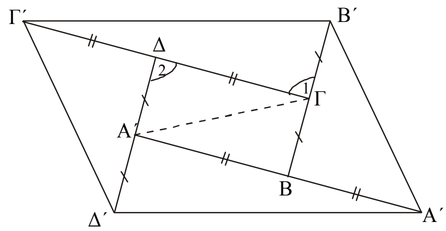


42. α) Τα τρίγωνα Γ΄ΔΔ΄ και ΒΒ΄Α΄ είναι ίσα διότι έχουν:

i) ΒΒ΄ = ΔΔ΄ ii) Γ΄Δ = ΒΑ΄

iii) $\hat{\Delta} = \hat{B}$

Άρα Γ΄Δ΄ = Β΄Α΄.



Όμοια Γ΄Β΄ = Δ΄Α΄, άρα το Γ΄Β΄Α΄Δ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

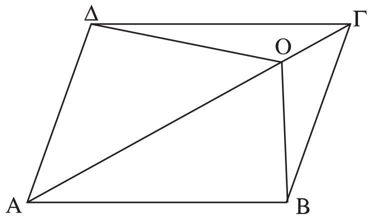
β) $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$, άρα έχουμε $\dfrac{(\Gamma'\Gamma B')}{(A\Delta\Gamma)} = \dfrac{\Gamma B' \cdot \Gamma'\Gamma}{A\Delta \cdot \Delta\Gamma} = \dfrac{2\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$

Άρα: $(\Gamma'\Gamma B') = 2\,(A\Delta\Gamma) = 2\,\dfrac{E}{2} = E$

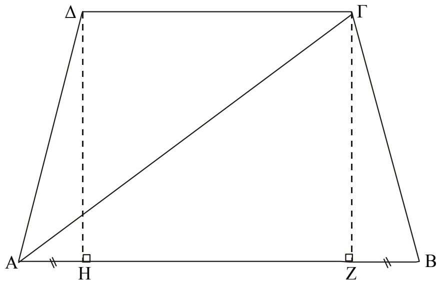
Όμοια: $(\Gamma'\Delta\Delta') = E$. Έτσι έχουμε:

$(A'B'\Gamma'\Delta') = (AB\Gamma\Delta) + 2\,(\Gamma'\Delta\Delta') + 2\,(\Gamma'\Gamma B') = E + 2E + 2E = 5E$

43. Τα τρίγωνα ΑΔΟ, ΑΟΒ έχουν κοινή βάση ΟΑ και ίσα ύψη υ από τις κορυφές Δ και Β (η ισότητα των υψών είναι προφανής λόγω της ισότητας των αντιστοίχων ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται από τα ύψη και τις πλευρές ΑΔ, ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ), άρα είναι ισοδύναμα.



44. Είναι τρίγωνα ΑΗΔ = ΖΓΒ.
Άρα ΑΗ = ΖΒ και ΔΓ = ΗΖ (αφού ΔΗΖΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Άρα ΑΖ = ΗΖ + ΑΗ = ΔΓ + ΑΗ (1)
ΗΒ = ΗΖ + ΖΒ = ΔΓ + ΖΒ = ΔΓ + ΑΗ = ΑΖ (2)



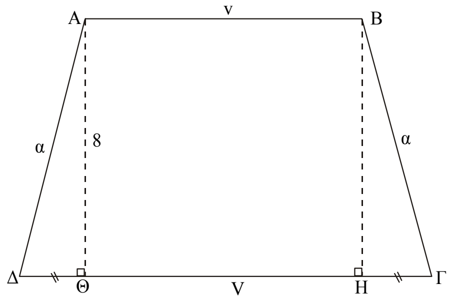
$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{\Delta\Gamma + \mathrm{AB}}{2}\,\upsilon = \frac{\Delta\Gamma + \mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2}\,\upsilon = \frac{\Delta\Gamma + \mathrm{AH}}{2}\,\upsilon + \frac{\mathrm{HB}}{2}\,\upsilon \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{\mathrm{AZ}}{2}\,\upsilon + \frac{\mathrm{HB}}{2}\,\upsilon \overset{(2)}{=} \frac{\mathrm{AZ}}{2}\,\upsilon + \frac{\mathrm{AZ}}{2}\,\upsilon = 2\,(\mathrm{A\Gamma Z})$$

45. $2\alpha + \text{v} + \text{V} = 60$ (1)

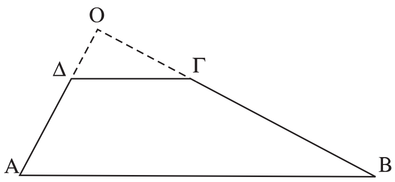
$\dfrac{\text{v} + \text{V}}{2}\,8 = 160$ (2)

Από την (1) λόγω της (2) έχουμε
$2\alpha = 20$, άρα $\alpha = 10$ m.
Στο $\mathrm{B}\overset{\Delta}{\mathrm{H}}\Gamma$ έχουμε
$\alpha^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{H\Gamma}^2, \ldots, \mathrm{H\Gamma} = 6$ m



Όμως ΔΘ = ΗΓ, άρα $2\text{v} + 2\mathrm{H\Gamma} = 60 - 2\alpha = 40, \ldots, \text{v} = 14$ m
Άρα $\text{V} = 14 + 2\cdot 6 = 26$ m.

46. Αφού $\overset{\Delta}{\text{Ο}\Delta\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\text{ΟΑΒ}}$



α) $\dfrac{\text{Ο}\Delta}{\text{ΟΑ}} = \dfrac{\text{Ο}\Gamma}{\text{ΟΒ}} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\text{ΑΒ}}$ ή

$\dfrac{\text{Ο}\Delta}{\text{ΟΑ - Ο}\Delta} = \dfrac{\text{Ο}\Gamma}{\text{ΟΒ - Ο}\Gamma} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\text{ΑΒ - }\Delta\Gamma}$ ή

$\dfrac{\text{Ο}\Delta}{\Delta\text{Α}} = \dfrac{\text{Ο}\Gamma}{\Gamma\text{Β}} = \dfrac{20}{50}$, απ' όπου ΟΔ = 12 cm, ΟΓ = 16 cm.

Αφού $12^2 + 16^2 = 20^2$, τότε τρίγωνο ΟΔΓ ορθογώνιο στο $\hat{\text{Ο}}$.

β) (ΑΒΓΔ) = (ΟΑΒ) - (ΟΔΓ) = $\dfrac{42 \cdot 56}{2} - \dfrac{12 \cdot 16}{2} = 1080 \text{ cm}^2$.

47. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει: $\mu_\alpha = \upsilon_\alpha$, όμως $\upsilon_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

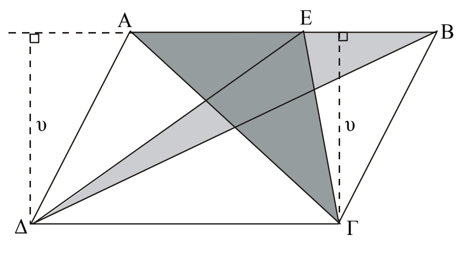
Όμοια $\mu_\beta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $\mu_\gamma = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3\left(\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\,\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}\sqrt{3}}{4}$ (1)

Όμως $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \text{Ε}$ (2)

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται: $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3\text{Ε}\sqrt{3}$.

48. $(\text{Ε}\Delta\text{Β}) = \dfrac{\text{ΕΒ} \cdot \upsilon}{2}$ $(\text{ΑΕ}\Gamma) = \dfrac{\text{ΕΑ} \cdot \upsilon}{2}$



$(\text{Ε}\Delta\text{Β}) + (\text{ΑΕ}\Gamma) = (\text{ΕΒ} + \text{ΕΑ})\,\dfrac{\upsilon}{2} =$

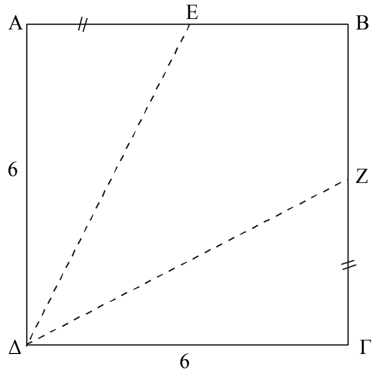
$= \dfrac{\text{ΑΒ} \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{(\text{ΑΒ}\Gamma\Delta)}{2}$

49. $(ΑΕΔ) = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{3}$ ή

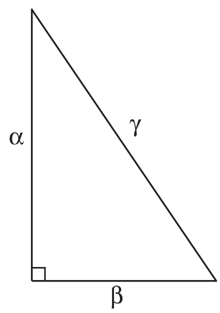
$\dfrac{ΑΕ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{6^2}{3}$ ή

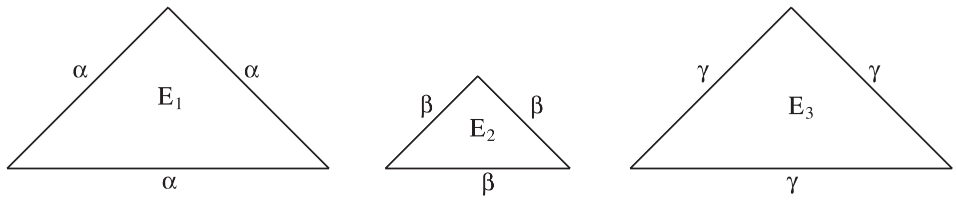
$\dfrac{ΑΕ \cdot 6}{2} = 12$ ή $ΑΕ = 4$

Όμοια βρίσκουμε $ΖΓ = 4$.



50.

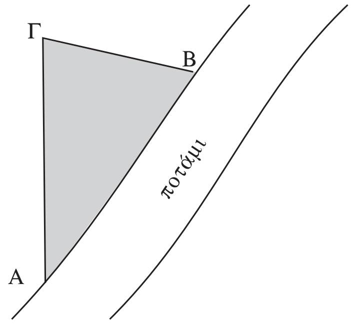




$Ε_1 = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{2}$, $Ε_2 = \dfrac{β^2\sqrt{3}}{2}$, $Ε_3 = \dfrac{γ^2\sqrt{3}}{2}$

Όμως: $α^2 + β^2 = γ^2$, άρα $Ε_1 + Ε_2 = Ε_3$.

51. α) $(ΑΓΒ) = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΓΒ \cdot ημΓ$. Παρατηρούμε ότι αν ημΓ γίνει μέγιστο θα έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό. Άρα αν $Γ = 90°$, τότε $ημΓ = 1$ (μέγιστο) και $(ΑΓΒ) = \frac{ΑΓ \cdot ΓΒ}{2} = 600\ m^2$. Συνεπώς οι πρόσκοποι πρέπει να σχηματίσουν τρίγωνο με γωνία $Γ = 90°$.



β) $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΓΒ \cdot ημΓ = \frac{1}{2}\ 35 \cdot 35 \cdot 1 = 612{,}5\ m^2$

$ΑΓ + ΓΒ = 70$ m για να είναι μέγιστο το $ΑΓ \cdot ΓΒ$ πρέπει $ΑΓ = ΓΒ = 35$ m.

Σημείωση: *Είναι γνωστό ότι το γινόμενο δύο αριθμών με σταθερό άθροισμα γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί γίνουν ίσοι.*

52. α) $(ΑΒΓΔ) = (α + β)^2$

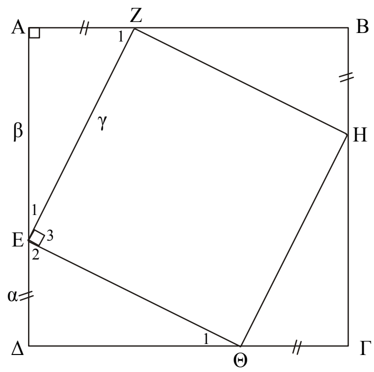
β) Τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΕΔΘ, ΘΓΗ, ΖΒΗ είναι προφανώς ίσα και ορθογώνια λόγω της κατασκευής τους (βλ. σχήμα).

Άρα $ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ = γ$.

Όμως: $\hat{Ε}_1 + \hat{Ζ}_1 = 90$ $\quad \hat{Ε}_2 + \hat{Θ}_1 = 90$

$\hat{Ζ}_1 = \hat{Ε}_2$ $\quad \hat{Ε}_1 = \hat{Θ}_1$

Άρα $\hat{Ε}_1 + \hat{Ε}_2 = 90$, άρα $\hat{Ε}_3 = 90°$.



Άρα το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

γ) Προφανώς $ΔΘ = β = ΖΒ = ΗΓ = β$ (βλ. (β) ερώτημα).

Άρα $(ΑΖΕ) = (ΕΘΔ) = (ΘΓΗ) = (ΗΒΖ) = \frac{αβ}{2}$

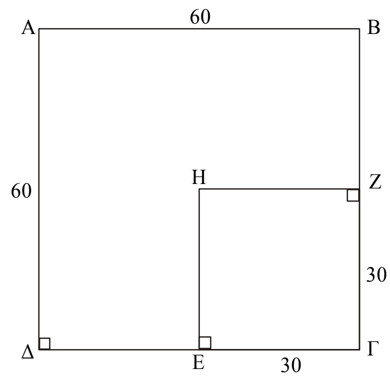
$(ΕΖΗΘ) = γ^2 = α^2 + β^2$.

δ) $(ΑΒΓΔ) = γ^2 + 4\ \frac{αβ}{2}$ αλλά $(ΑΒΓΔ) = (α + β)^2$

Άρα $(α + β)^2 = γ^2 + 2αβ$ ή $α^2 + β^2 + 2αβ = γ^2 + 2αβ$ ή $α^2 + β^2 = γ^2$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ.

53. α) $(ΗΖΓΕ) = 900\ m^2$

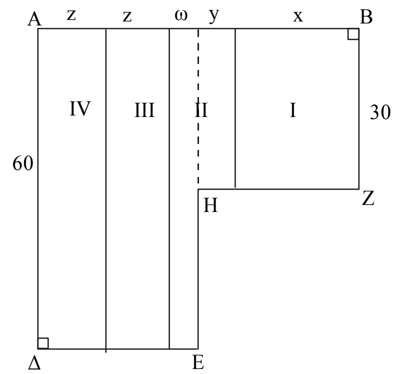


β) $(ΑΒΓΔ) = 3600\ m^2$

$$\frac{(ΑΒΖΗΕΔ)}{4} = \frac{3600 - 900}{4}$$

$$= \frac{2700}{4} = 675\ m^2$$

γ) Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, τα τέσσερα οικόπεδα (Ι), (ΙΙ), (ΙΙΙ), (ΙV) έχουν αντίστοιχα προσόψεις x, y + ω, z, z στον εθνικό δρόμο και πρέπει να είναι ισεμβαδικά.



Δηλαδή $E_I = E_{II} = E_{III} = E_{IV}$, απ' όπου έχουμε:

$x \cdot 30 = y \cdot 30 + ω \cdot 60 = z \cdot 60 = 675$

Απ' όπου: $z = \dfrac{675}{60} = 11{,}25$ (1)

$x = \dfrac{675}{30} = 22,5$ (2)

$y + 2ω = \dfrac{675}{30} = 22{,}5$ (3)

Αλλά $2z + ω + y + x = 60$, η οποία λόγω των (1), (2) γίνεται:

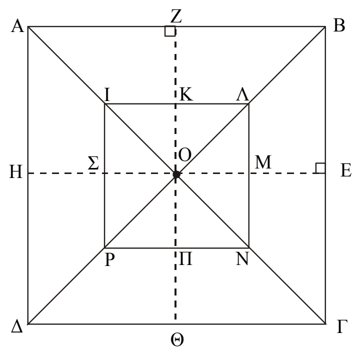
$2 \cdot 11{,}25 + ω + y + 22{,}5 = 60$ ή $ω + y = 15$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) έχουμε: $y = 7{,}5$ και $ω = 7{,}5$

Άρα η περίμετρος των E_I, E_{II}, E_{III}, E_{IV} είναι αντίστοιχα 105 m, 150 m, 135 m, 135 m.

54. α) $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2 = 720.000$ m^2

Άρα $\Delta B \approx 848{,}5$ m $\approx A\Gamma$



β) Ε = 90.000 m^2

γ) Το ΑΖΚΙ είναι ορθογώνιο τραπέζιο, αφού ΑΖ // ΙΛ και $\hat{Z} = 90°$. Επίσης και τα ΖΚΛΒ, ΛΒΕΜ, ΜΕΓΝ, ΠΝΓΘ, ΡΠΘΔ, ΔΡΣΗ, ΗΣΙΑ.

δ) i) $(AZKI) = \dfrac{AZ + IK}{2}\, KZ$

Όμως ΚΖ = ΟΖ - ΟΚ = 300 - 150 = 150 m.

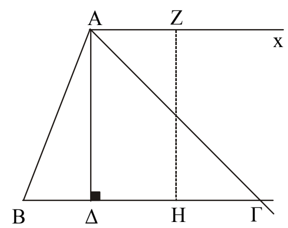
Άρα $(AZKI) = \dfrac{300 + 150}{2}\, 150 = 33750$ m^2

ii) $AI = \dfrac{A\Gamma}{4} \approx 212{,}1$.

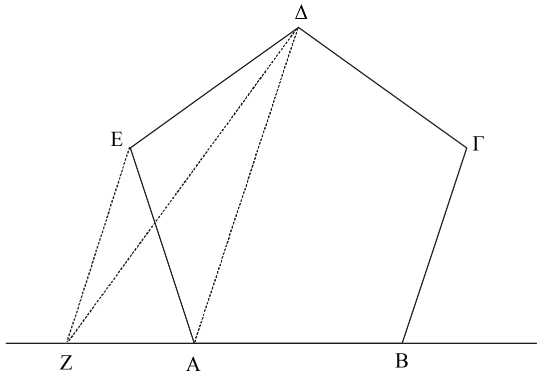
Άρα η περίμετρος Π $\approx$ ΑΖ + ΖΚ + ΙΚ + ΑΙ = 300 + 150 + 150 + 212,1 = 812,1 m.

55. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και από το Α ευθεία παράλληλη προς την ΒΓ, την Αx. Παίρνουμε τμήμα ΑΖ πάνω στην Αx ώστε $AZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

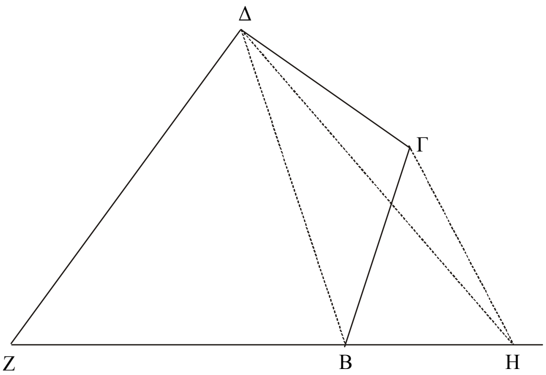
Το ζητούμενο ορθογώνιο έχει πλευρές ΑΔ, ΑΖ.



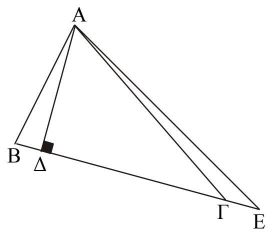
56. ***Α΄ φάση:*** Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΔΑ, την ΕΖ. Το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο τετράπλευρο, το ΖΒΓΔΖ.



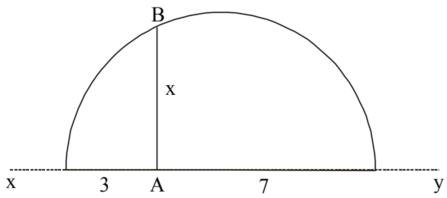
Β΄ φάση: Φέρνουμε τη διαγώνιο ΔΒ και από το Γ την ΓΗ // ΔΒ. Το ΖΔΗ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΖΔΓΒ.



57. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Πάνω στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε ΓΕ = ΒΔ. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι το ισοδύναμο ορθογώνιο.



58. Εάν x είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε $x^2 = 3 \cdot 7$. Κατασκευάζουμε το x ως μέση ανάλογο των 3 και 7. Σε ευθεία xy παίρνουμε διαδοχικά



τα τμήματα 3, 7. Με διάμετρο το 10 γράφουμε ημικύκλιο και στο σημείο Α υψώνουμε κάθετο. Το μήκος του ΑΒ είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου.

Κεφάλαιο 11:	ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Δύο κανονικά οκτάγωνα είναι όμοια. **Σ** **Λ**

2. * Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. **Σ** **Λ**

3. * Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό. **Σ** **Λ**

4. * Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες είναι κανονικό. **Σ** **Λ**

5. * Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές. **Σ** **Λ**

6. * Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι ίσες μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

7. * Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα, έχουν ίσα εμβαδά. **Σ** **Λ**

8. * Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας του. **Σ** **Λ**

9. * Ο λόγος των μηκών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους. **Σ** **Λ**

10. * Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους. **Σ** **Λ**

11. * Αν $\hat{\varphi}_\nu$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου, τότε $\hat{\varphi}_\nu = 360^\circ - \frac{180^\circ}{\nu}$. **Σ** **Λ**

12. * Η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$. **Σ** **Λ**

13. * Ακτίνα ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του. **Σ** **Λ**

14. * Ο περιγεγραμμένος και εγγεγραμμένος κύκλος κάθε κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι κύκλοι. **Σ** **Λ**

15. * Η πλευρά ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. **Σ** **Λ**

16. * Το απόστημα ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με την πλευρά του εξαγώνου. **Σ** **Λ**

17. * Το απόστημα ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου. **Σ** **Λ**

18. * Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν τα αποστήματα δύο διαδοχικών πλευρών του. **Σ** **Λ**

19. * Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές. **Σ** **Λ**

20. * Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. **Σ** **Λ**

21. * Σε δύο όμοια κανονικά πολύγωνα, ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου των ακτίνων του. **Σ** **Λ**

22. * Ένα περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με όλες τις πλευρές ίσες είναι κανονικό. **Σ** **Λ**

23. * Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου έχουν ίσα εμβαδά. **Σ** **Λ**

24. * Ο τύπος $4\alpha_\nu^2 = 4R^2 - \lambda_\nu^2$ συνδέει την πλευρά λ_ν, το απόστημα α_ν και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού ν-γώνου. **Σ** **Λ**

25. * Ο λόγος του μήκους κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του ισούται με π. **Σ** **Λ**

26. * Το μήκος κύκλου ακτίνας 1 είναι π. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, η πλευρά του είναι

Α. $R^2\sqrt{2}$ **Β.** $R\sqrt{2}$ **Γ.** $2R$ **Δ.** $2R^2$ **Ε.** $\sqrt{R}$

2. * Εάν η πλευρά κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $R\sqrt{3}$, το απόστημά του είναι

Α. R **Β.** $\frac{R}{3}$ **Γ.** $\frac{R}{2}$ **Δ.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Ε.** $3R$

3. * Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ η πλευρά του είναι

Α. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ **Β.** $2R$ **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** R **Ε.** $\frac{R}{2}$

4. * Η σχέση, που συνδέει τα στοιχεία α_ν και λ_ν (αποστήματος και πλευράς) κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{\alpha_\nu^2}{2}+\lambda_\nu^2=R^2$ **Β.** $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{2}=\frac{R^2}{2}$

Γ. $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{4}=R^2$ **Δ.** $\alpha_\nu^2+\lambda_\nu^2=R^2$

Ε. $\alpha_\nu^2+\lambda_\nu^2=\frac{R^2}{4}$

5. * Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι ορθή, είναι

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο

Γ. κανονικό πεντάγωνο **Δ.** κανονικό εξάγωνο

Ε. κανονικό δεκάγωνο

6. * Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι αμβλεία, είναι

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο

Γ. πεντάγωνο **Δ.** εξάγωνο **Ε.** οκτάγωνο

7. * Εάν η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι 60^o, τότε η πλευρά του (συναρτήσει του R) είναι

Α. $\frac{R}{2}$ **Β.** $R\sqrt{3}$ **Γ.** $2R$ **Δ.** $R\sqrt{2}$ **Ε.** R

8. * Αν $\hat{\varphi}_\nu$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου τότε $\hat{\varphi}_\nu$ ισούται με

Α. $180°+\frac{360°}{\nu}$ **Β.** $180°-\frac{360°}{\nu}$ **Γ.** $360°-\frac{180°}{\nu}$

Δ. $360°+\frac{180°}{\nu}$ **Ε.** $\frac{360°}{\nu}$

9. * Αν P_ν η περίμετρος ενός κανονικού ν-γώνου, τότε το εμβαδό του E_ν είναι

Α. $\frac{1}{2}\lambda_\nu \cdot \alpha_\nu$ **Β.** $\frac{1}{2}P_\nu \cdot \alpha_\nu$ **Γ.** $\frac{1}{2}P_\nu \cdot \lambda_\nu$

Δ. $\frac{1}{2}P_\nu \cdot \lambda_\nu^2$ **Ε.** $\frac{1}{2}\nu P_\nu \cdot \lambda_\nu$

10. * Η πλευρά λ_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $R\sqrt{2}$ **Γ.** R **Δ.** $\frac{R}{2}$ **Ε.** $\frac{R}{3}$

11. * Η πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ **Β.** R **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** $R^2\sqrt{2}$ **Ε.** $\frac{1}{3}R\sqrt{2}$

12. * Η πλευρά λ_3 ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **Β.** R **Γ.** $R\sqrt{3}$ **Δ.** $\frac{1}{2}R$ **Ε.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

13. * Το κανονικό πολύγωνο του οποίου η πλευρά λ_ν ισούται με την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου είναι

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** πεντάγωνο
Δ. εξάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

14. * Το κανονικό πολύγωνο του οποίου το απόστημα α_ν ισούται με το μισό της πλευράς λ_ν είναι:

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** πεντάγωνο
Δ. εξάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

15. * Το μήκος S τόξου μ μοιρών που ανήκει σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{2\pi R\mu}{180}$ **Β.** $\frac{\pi R^2\mu}{180}$ **Γ.** $\frac{\pi R\mu}{360}$ **Δ.** $\frac{\pi R\mu}{180}$ **Ε.** $\frac{\pi R^2\mu}{360}$

16. * Το εμβαδό Ε κυκλικού δίσκου (0, R) είναι

Α. $2\pi R$ **Β.** πR^2 **Γ.** $\pi^2 R$ **Δ.** $2\pi^2 R$ **Ε.** 2π

17. * Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 90° **Ε.** 120°

18. * Η κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 90° **Ε.** 120°

19. * Η γωνία κανονικού πενταγώνου είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 108° **Ε.** 120°

20. * Η γωνία κανονικού δεκαγώνου είναι

Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 120° **Δ.** 144° **Ε.** 150°

21. * Το κανονικό πολύγωνο με γωνία 108° είναι

Α. τετράγωνο **Β.** πεντάγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. οκτάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

22. * Το κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R με κεντρική γωνία 24° είναι

Α. εξάγωνο **Β.** οκτάγωνο **Γ.** δεκάγωνο

Δ. δωδεκάγωνο **Ε.** 15γωνο

23. * Το απόστημα $α_3$ ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ **Β.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ **Γ.** $\frac{1}{2}R$ **Δ.** $R\sqrt{3}$ **Ε.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

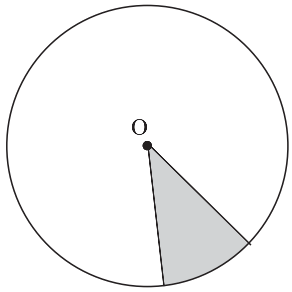
24. * Το απόστημα $α_4$ τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

Α. $R\sqrt{2}$ **Β.** $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ **Γ.** $\frac{1}{3}R\sqrt{2}$ **Δ.** $\frac{1}{4}R\sqrt{2}$ **Ε.** $R\sqrt{3}$

25. * Το εμβαδόν $E_μ$ ενός κυκλικού τομέα μ μοιρών είναι

Α. $\frac{πRμ}{360}$ **Β.** $\frac{πR^2μ}{360}$ **Γ.** $\frac{πR^2μ}{180}$ **Δ.** $\frac{πRμ}{180}$ **Ε.** $\frac{πRμ^2}{360}$

26. * Το γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι



Α. ημικύκλιο **Β.** μηνίσκος

Γ. τεταρτοκύκλιο **Δ.** κυκλικός τομέας

Ε. κυκλικό τμήμα

27. * Το μήκος κύκλου ακτίνας R είναι

Α. πR **Β.** πR^2 **Γ.** $2\pi R$ **Δ.** $\frac{\pi R^2}{2}$ **Ε.** $2\pi R^2$

28. * Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν

Α. έχουν το ίδιο αριθμό πλευρών

Β. είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο

Γ. είναι κανονικά και έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών

Δ. είναι περιγεγραμμένα σε ομόκεντρους κύκλους

Ε. έχουν τον ίδιο αριθμό γωνιών

29. * Ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο

Α. είναι κανονικό.

Β. είναι όχι απαραίτητα κανονικό.

Γ. έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Δ. έχει όλες τις κεντρικές γωνίες του ίσες.

Ε. έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

30. * Αν ένα κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R) και το απόστημά του α_ν ισούται με το $\frac{R}{2}$, τότε το πολύγωνο είναι

Α. τρίγωνο **Β.** τετράγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. οκτάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

31. * Ένα πολύγωνο το οποίο είναι εγγεγραμμένο και ταυτόχρονα περιγεγραμμένο σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι

Α. ισοσκελές τρίγωνο. **Β.** ισοσκελές τραπέζιο.

Γ. τυχόν τετράπλευρο. **Δ.** κανονικό.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

32. * Σε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο (2μ) πλήθος πλευρών η κεντρική του γωνία ω είναι

Α. $\frac{360°}{2}$ **Β.** $\frac{360°}{\mu+2}$ **Γ.** $\frac{360°}{2\mu+2}$

Δ. $\frac{180°}{\mu}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

33. * Κάθε κανονικό πολύγωνο που μπορεί να χωριστεί σε διαδοχικά ισόπλευρα και ίσα τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του πολυγώνου είναι

Α. τετράγωνο **Β.** πεντάγωνο **Γ.** εξάγωνο

Δ. δεκάγωνο **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ακτίνας R ισούται με $\frac{R}{2}$, η πλευρά $λ_ν$ ισούται με .... και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

2. * Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, η πλευρά του $λ_ν$ ισούται με …..............και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

3. * Εάν το απόστημα $α_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, η πλευρά του $λ_ν$ ισούται με….............. και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

4. * Εάν η πλευρά $λ_ν$ κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισούται με R το απόστημά του $α_ν$ ισούται με…................ και το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι….

5. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κανονικό πολύγωνο	**Κεντρική γωνία ($ω_ν$) σε μοίρες**	**Γωνία πολυγώνου ($φ_ν$) σε μοίρες**
τρίγωνο		
τετράγωνο		
οκτάγωνο		
δεκάγωνο		
εικοσάγωνο		

6. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κεντρική γωνία ($ω_ν$) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Πλήθος πλευρών (ν) κανονικού πολυγώνου**
6	
10	
15	
72	

7. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**$λ_ν$: πλευρά κανονικού ν-γώνου**	**$α_ν$: απόστημα κανονικού ν-γώνου**	**$Ε_ν$: εμβαδόν κανονικού ν-γώνου**
3			
4			
6			

8. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Γωνία ($φ_ν$) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Είδος κανονικού πολυγώνου**
60	
108	
135	
150	

9. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**$α_ν$: απόστημα κανονικού πολυγώνου**	**$λ_ν$: πλευρά κανονικού πολυγώνου**	**$Ε_ν$: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου**
$ν = 3$	5cm		
$ν = 4$			$144cm^2$
$ν = 6$		10cm	

10. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Ακτίνα R κύκλου	**Μήκος L κύκλου**	**Εμβαδόν Ε κύκλου**
	$30π$	
	$20πα$	
$2α\sqrt{3}$		
		$15πα^2$
		$7π$
$\frac{α}{\sqrt{3}}$		

11. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Ακτίνα R κύκλου	**Γωνία μ μοιρών κυκλ. τομέα**	**Μήκος τόξου S**	**Εμβαδόν Ε κυκλ. τομέα**
8			$\frac{16π}{3}$
9		$\frac{9π}{5}$	
$5α$	60		
	150		$\frac{πα^2}{12}$
$2α\sqrt{5}$	300		

12. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Τόξο μ μοιρών	**Μήκος τόξου**
10	
	$\frac{\pi R}{4}$
	$\frac{3\pi R}{4}$
180	

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Αντιστοιχίστε κάθε ένα κανονικό πολύγωνο της στήλης (Α) με το εμβαδό του στη στήλη (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R	**Εμβαδά καν. πολυγώνων συναρτήσει του R**
	$4R^2$
τρίγωνο	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
τετράγωνο	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$
εξάγωνο	$2R^2$
	$3R^2\sqrt{3}$

2. * Αντιστοιχίστε κάθε πλευρά κανονικού πολυγώνου της στήλης (Α) με το αντίστοιχο απόστημά του, στη στήλη (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Πλευρά λ_ν κανονικού πολυγώνου συναρτήσει του R	**Απόστημα α_ν καν. πολυγώνου συναρτήσει του R**
	R
R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
	$\frac{R}{3}$

3. * Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Κεντρική γωνία ω_ν κανονικού πολυγώνου	**Πλευρά λ_ν κανονικού πολυγώνου (συναρτήσει του R)**
	$R\sqrt{2}$
	$2R$
60^o	R
90^o	$R\sqrt{3}$
120^o	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

4. * Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Ακτίνα κύκλου	**Εμβαδόν κύκλου**
2α	$\frac{\pi\alpha^2}{4}$
	$4\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{3}$	$\frac{3\pi\alpha^2}{2}$
$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$3\pi\alpha^2$
	$\frac{\pi\alpha^2}{2}$

5. * Στη στήλη (Α) αναγράφονται το μέτρο μ μοιρών τόξου και η ακτίνα του κύκλου του, R. Στη στήλη (Β) αναγράφεται το μήκος του S. Αντιστοιχίστε κάθε τόξο της στήλης (Α) με το μήκος του στη στήλη (Β).

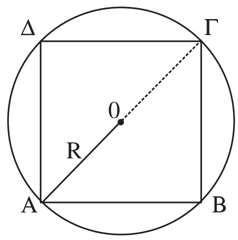
Στήλη Α	**Στήλη Β**
	$S = \pi$
$\mu = 60^o \quad R = 1$	$S = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$
	$S = 2\sqrt{3}\pi$
$\mu = 30^o \quad R = \sqrt{2}$	$S = \dfrac{\pi}{3}$
$\mu = 90^o \quad R = 2$	$S = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}$
$\mu = 120^o \quad R = \sqrt{3}$	$S = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Σε κύκλο ακτίνας R = 3 cm είναι περιγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο.
Να υπολογίσετε:
α) Την πλευρά του.
β) Το εμβαδόν του.

2. ** Υπάρχει κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R του οποίου η κεντρική γωνία είναι 16°; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. ** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R) και η ημιπερίμετρός του είναι 80 cm. Να υπολογιστούν:
α) Η ακτίνα R του κύκλου.
β) Ο λόγος $\dfrac{\text{εμβαδό τετραγώνου}}{\text{εμβαδό κύκλου}}$.



4. ** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (0, R).
Γνωρίζοντας (βλέπε το σχήμα της άσκησης 3), ότι ΑΓ - ΑΒ = 12 cm, να υπολογιστούν:
α) Η ακτίνα του κύκλου.
β) Το εμβαδόν του κύκλου.

5. ** Αν είναι $\lambda_4 + \lambda_3 = 96$ cm όπου λ_4 και λ_3 πλευρές των εγγεγραμμένων σε κύκλο (0, R) τετραγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, να υπολογιστούν:
α) Η ακτίνα R του κύκλου.
β) Τα αποστήματα α_4 και α_3 των ανωτέρω κανονικών πολυγώνων.

6. ** Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός κανονικού εξαγώνου είναι κορυφές επίσης κανονικού εξαγώνου.

7. ** Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών οκταγώνων είναι $\frac{3}{4}$.

Να υπολογιστούν:

α) Ο λόγος των περιμέτρων τους.

β) Ο λόγος των εμβαδών τους.

8. ** Κανονικού πολυγώνου, η ακτίνα R είναι 8 cm και το απόστημά του α είναι $4\sqrt{3}$ cm. Να υπολογιστούν:

α) Η πλευρά του λ.

β) Η κεντρική του γωνία ω σε μοίρες.

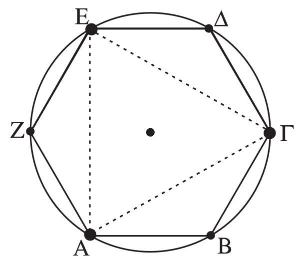
γ) Το πλήθος ν των πλευρών του.

9. ** Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ.

Να υπολογιστούν:

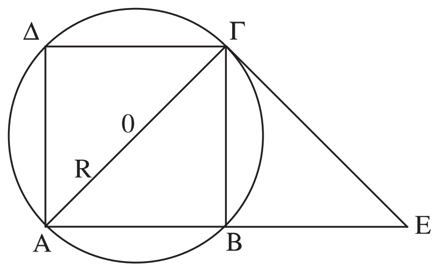
α) Η πλευρά ΑΓ, αν γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 6 cm.

β) Ο λόγος $\frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{(ΑΓΕ)}$ των εμβαδών τους.



10. ** Δίνεται κύκλος (0, R) και το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ και πάνω στην προέκταση παίρνουμε τμήμα

ΒΕ = ΒΑ. Να δείξετε ότι:

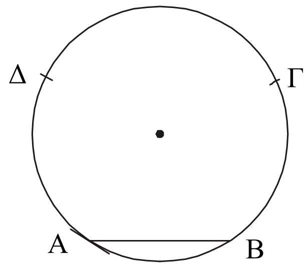


α) ΑΓ = ΓΕ

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ είναι εφαπτόμενο του κύκλου (0, R) στο σημείο Γ.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΕ (συναρτήσει του R).

11. ** Σε κύκλο ακτίνας R παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 60^o$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90^o$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^o$.

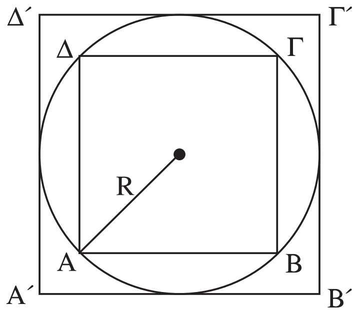


α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

12. ** Σε κύκλο ακτίνας R το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο και το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ περιγεγραμμένο τετράγωνο.

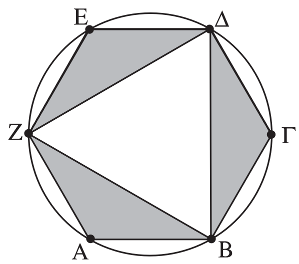


α) Να εκφραστούν οι πλευρές λ_4 και λ'_4 των δύο τετραγώνων συναρτήσει της ακτίνας R.

β) Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών τους $\frac{E}{E'}$.

13. ** Δύο ίσα κανονικά εξάγωνα έχουν μία πλευρά κοινή μήκους λ (τα εξάγωνα δεν ταυτίζονται). Να υπολογίσετε την απόσταση των κέντρων τους συναρτήσει του λ.

14. ** Σε κύκλο ακτίνας R = 3 cm εγγράφονται ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να υπολογιστούν:



α) Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

β) Το εμβαδόν των τριών γραμμοσκιασμένων μερών.

15. ** Σε κύκλο ακτίνας R εγγράφουμε κανονικό πολύγωνο, με κεντρική γωνία ίση με τα $\frac{4}{3}$ μιας ορθής.

α) Ποιο είναι το πλήθος των πλευρών του κανονικού αυτού πολυγώνου;

β) Να βρείτε το εμβαδόν του πολυγώνου αυτού (συναρτήσει του R).

16. ** Σε κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του εξαγώνου (συναρτήσει του R).

β) Το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται έξω από το εξάγωνο.

17. ** Κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α. Να υπολογίσετε:

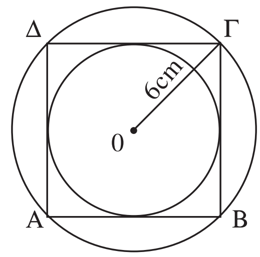
α) Το εμβαδόν του κύκλου (συναρτήσει του α).

β) Το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου, που βρίσκεται εκτός του κύκλου.

18. ** Σ’ ένα κύκλο με ακτίνα R = 6 cm εγγράφουμε τετράγωνο και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδό του τετραγώνου.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.



19. ** Κύκλος ακτίνας R διαιρείται σε δύο κυκλικά τμήματα από την πλευρά ΑΒ ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σ’ αυτόν. Να υπολογιστούν:

α) Το μήκος του μικρότερου τόξου ΑΒ.

β) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ.

20. ** Δύο ίσοι τεμνόμενοι κύκλοι (Ο, R) και (Ο΄, R) έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$ και κοινή χορδή ΑΒ. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ.

β) Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

21. ** Σε κύκλο ακτίνας R η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί στην πλευρά λ_4 εγγεγραμμένου τετραγώνου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο κυκλικά τμήματα. Να βρεθούν:

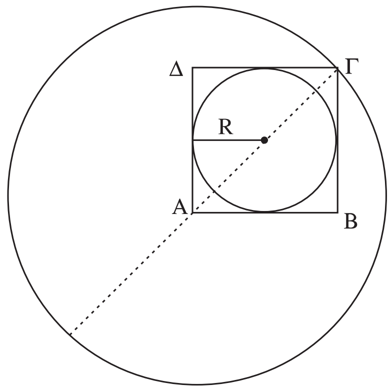
α) Το εμβαδόν του μικρότερου κυκλικού τμήματος του κύκλου.

β) Το εμβαδόν του μεγαλύτερου κυκλικού τμήματος.

22. ** Κύκλος με ακτίνα R είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με κέντρο την κορυφή Α του τετραγώνου ΑΒΓΔ και ακτίνα την διαγώνιό του ΑΓ γράφουμε κύκλο. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν είναι γνωστή η ακτίνα R.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.



23. ** Σε τετράγωνο πλευράς 2α εγγράφουμε και περιγράφουμε δύο κύκλους. Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του εσωτερικού κύκλου.

β) Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων.

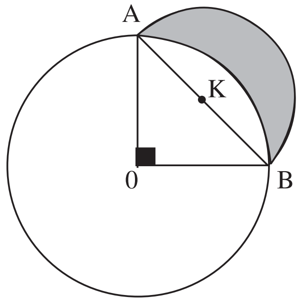
24. ** Να δειχθεί ότι το εμβαδόν κύκλου, που έχει διάμετρο την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων κύκλων, που έχουν διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

25. ** Σε κύκλο (0, R) θεωρούμε δύο κάθετες ακτίνες του ΟΑ και ΟΒ. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε εκτός του κύκλου ημικύκλιο.

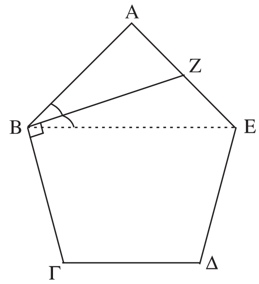
Να υπολογιστούν:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

β) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου ΟΑΒ.



26. ** Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΕ ενός κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι κάθετη στη πλευρά ΒΓ.



27. ** Να δείξετε ότι κάθε διαγώνιος κανονικού πενταγώνου είναι παράλληλη προς μία πλευρά του.

28. ** Δίνεται κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 3cm.

Να υπολογίσετε:

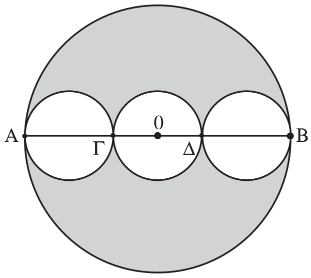
α) την πλευρά του β) το απόστημά του γ) το εμβαδόν του.

29. ** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς λ_3 = 9 cm εγγεγραμμένο σε κύκλο, ακτίνας R. Να υπολογιστούν:

α) Το μήκος του κύκλου.

β) Το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο.

30. ** Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ = 6α. Διαιρούμε την διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Με διαμέτρους τις ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ γράφουμε τρεις ίσους κύκλους. Να υπολογισθούν:



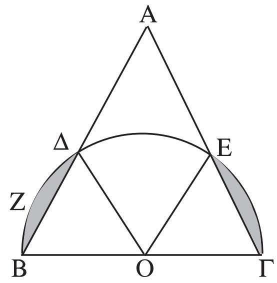
α) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την ΑΒ.

β) Το εμβαδόν καθενός των τριών ίσων κύκλων.

γ) Το λόγο του αθροίσματος των εμβαδών των τριών ίσων κύκλων προς το εμβαδό του κύκλου (Ο,ΟΑ).

δ) Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που βρίσκεται έξω από τους τρεις κύκλους.

31. ** Με διάμετρο την πλευρά ΒΓ = α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε.



α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΕΓ είναι ισόπλευρα.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΟΔΖΒ.

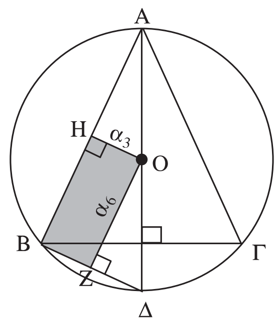
γ) Να υπολογισθούν τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων.

32. ** Δείξτε ότι ο λόγος των εμβαδών του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου στον κύκλο (Ο, R) είναι $\frac{1}{4}$.

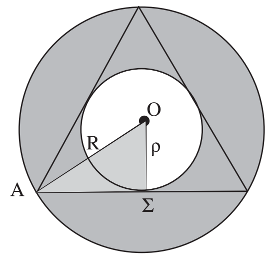
33. ** Να αποδειχθεί:

α) ότι τα συγκεκριμένα αποστήματα $α_3$ και $α_6$ κανονικού τριγώνου και εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο ακτίνας R είναι μεταξύ τους κάθετα (βλ. διπλανό σχήμα) και

β) ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΟΒΔ είναι ισεμβαδικά.



34. ** Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν Ε κυκλικής στεφάνης που σχηματίζεται μεταξύ των δύο κύκλων ακτίνων R και ρ (με R > ρ), ισούται με $π\,\dfrac{4\,(ΟΑΣ)^2}{ρ^2}$.



35. ** Κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές ΑΒ,ΓΔ τέμνονται στο Ο. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου.

36. ** Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι $12\sqrt{3}\text{cm}^2$. Αν στον ίδιο κύκλο εγγράψουμε τετράγωνο, να βρεθούν:

α) Η πλευρά του $λ_4$

β) Το απόστημα του $α_4$

γ) Το εμβαδόν του $Ε_4$

37. ** Μέσα σ' ένα χωράφι σχήματος τετραγώνου κατασκευάσαμε το μεγαλύτερο κυκλικό αλώνι που ήταν δυνατό ακτίνας 40 m.

α) Ποιο ήταν το μήκος της πλευράς του τετραγωνικού χωραφιού;

β) Ποια είναι η αξία του χωραφιού αν στην περιοχή αυτή η γη κοστίζει 10.000 δρχ./m^2;

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του χωραφιού που είναι έξω από το κυκλικό αλώνι;

38. ** Η διάμετρος τροχού ποδηλάτου είναι 0.50 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε μία διαδρομή 1 Km;

39. ** Στο εσωτερικό κυκλικού πάρκου ακτίνας 6 m θέλουμε να κάνουμε μια διακοσμητική πλακόστρωση σχήματος τετραγώνου με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.

α) Αν τα διακοσμητικά πλακάκια έχουν εμβαδό 0.09 m^2, πόσα θα χρειαστούν για τη διακόσμηση αυτή;

β) Στο μέρος του πάρκου που δεν θα πλακοστρωθεί θέλουμε να φυτέψουμε γκαζόν του οποίου το κόστος είναι 3.000 δρχ. ανά m^2. Πόσο θα κοστίσει το γκαζόν;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. Σ	10. Λ	19. Σ
2. Σ	11. Λ	20. Λ
3. Λ	12. Σ	21. Λ
4. Λ	13. Λ	22. Σ
5. Λ	14. Σ	23. Λ
6. Λ	15. Λ	24. Σ
7. Σ	16. Λ	25. Σ
8. Λ	17. Σ	26. Λ
9. Σ	18. Σ	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	10. Γ	18. Ε	26. Δ
2. Γ	11. Γ	19. Δ	27. Γ
3. Δ	12. Γ	20. Δ	28. Γ
4. Γ	13. Δ	21. Β	29. Β
5. Β	14. Β	22. Ε	30. Α
6. Α	15. Δ	23. Γ	31. Δ
7. Ε	16. Β	24. Β	32. Δ
8. Β	17. Γ	25. Β	33. Γ
9. Β			

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. $\lambda_\nu = R\sqrt{3}$ $\quad \nu = 3$

2. $\lambda_\nu = R$ $\quad \nu = 6$

3. $\lambda_\nu = R\sqrt{2}$ $\quad \nu = 4$

4. $\alpha_\nu = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ $\quad \nu = 6$

5.

Κανονικό πολύγωνο	**Κεντρική γωνία (ω_ν) σε μοίρες**	**Γωνία πολυγώνου (φ_ν) σε μοίρες**
τρίγωνο	120	60
τετράγωνο	90	90
οκτάγωνο	45	135
δεκάγωνο	36	144
εικοσάγωνο	18	162

6.

Κεντρική γωνία (ω_ν) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	**Πλήθος πλευρών (ν) κανονικού πολυγώνου**
6	60
10	36
15	24
72	5

7.

ν: πλευρές κανονικού πολυγώνου	λ_ν: πλευρά κανονικού πολυγώνου	α_ν: απόστημα κανονικού πολυγώνου	E_ν: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$
4	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
6	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

8.

Γωνία (φ_ν) κανονικού πολυγώνου σε μοίρες	Είδος κανονικού πολυγώνου
60	ισόπλευρο τρίγωνο
108	κανονικό πεντάγωνο
135	κανονικό οκτάγωνο
150	κανονικό δωδεκάγωνο

9.

ν : πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	α_ν: απόστημα κανονικού πολυγώνου	λ_ν: πλευρά κανονικού πολυγώνου	E_ν: εμβαδόν κανονικού πολυγώνου
3	5cm	$10\sqrt{3}$cm	$75\sqrt{3}$cm^2
4	6cm	12cm	144cm^2
6	$5\sqrt{3}$cm	10cm	$150\sqrt{3}$cm^2

10.

Ακτίνα R κύκλου	**Μήκος L κύκλου**	**Εμβαδόν Ε κύκλου**
15	30π	225π
10α	$20\pi\alpha$	$100\pi\alpha^2$
$2\alpha\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}\pi\alpha$	$12\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{15}$	$2\sqrt{15}\pi\alpha$	$15\pi\alpha^2$
$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}\pi$	7π
$\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\alpha$	$\frac{1}{3}\pi\alpha^2$

11.

Ακτίνα R κύκλου	**Γωνία μ μοιρών κυκλικού τομέα**	**Μήκος τόξου S**	**Εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα**
8	30	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{16\pi}{3}$
9	36	$\frac{9\pi}{5}$	$8{,}1\pi$
5α	60	$\frac{5}{3}\pi\alpha$	$\frac{25}{6}\pi\alpha^2$
$\frac{\alpha\sqrt{5}}{5}$	150	$\frac{\sqrt{5}}{6}\pi\alpha$	$\frac{\pi\alpha^2}{12}$
$2\alpha\sqrt{5}$	300	$\frac{10}{3}\sqrt{5}\pi\alpha$	$\frac{50}{3}\pi\alpha^2$

12.

Τόξο μ μοιρών	Μήκος τόξου
10	$\frac{\pi R}{18}$
45	$\frac{\pi R}{4}$
135	$\frac{3\pi R}{4}$
180	$\pi \cdot R$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

(Α)	(Β)
τρίγωνο	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
τετράγωνο	$2R^2$
εξάγωνο	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

2.

(Α)	(Β)
R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$

3.

(Α)	(Β)
60^o	R
90^o	$R\sqrt{2}$
120^o	$R\sqrt{3}$

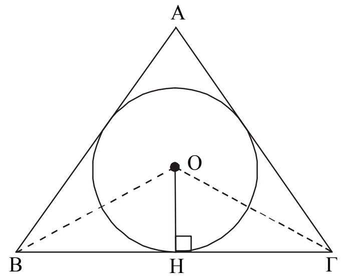
4.

(Α)	(Β)
2α	$4\pi\alpha^2$
$\alpha\sqrt{3}$	$3\pi\alpha^2$
$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi\alpha^2}{2}$

5.

(A)	**(B)**
$\mu = 60^o$ R=1	$S = \frac{\pi}{3}$
$\mu = 30^o$ $R = \sqrt{2}$	$S = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
$\mu = 90^o$ $R = 2$	$S = \pi$
$\mu = 120^o$ $R = \sqrt{3}$	$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης



1. α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΟ, έχουμε:

$BH^2 = BO^2 - OH^2 \quad (1)$

Αλλά ΟΗ = R, ΒΟ = 2R, αφού η γωνία ΟΒΗ = 30°.

Η (1) γίνεται:

$BH^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Άρα $BH = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm

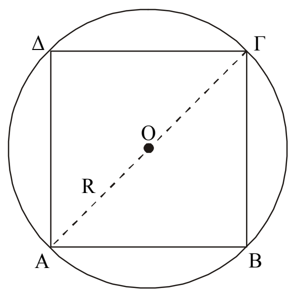
Η πλευρά α του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\alpha = 6\sqrt{3}\text{cm}$.

β) Το $E_{AB\Gamma} = 3E_{BO\Gamma} = 3\,\frac{1}{2}\,B\Gamma\cdot OH = \frac{3}{2}\,6\sqrt{3}\cdot 3 = 27\sqrt{3}\text{cm}^2$.

2. Η κεντρική γωνία ω του κανονικού ν-γώνου δίδεται από τον τύπο:

$\omega = \dfrac{360°}{\nu}$, $\nu \in N - \{1, 2\}$. Με ω = 16° έχουμε: $16° = \dfrac{360°}{\nu}$ ή $\nu = \dfrac{360°}{16°} = 22{,}5$.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο κανονικό πολύγωνο.



3. α) Ισχύει ΑΒ + ΒΓ = 80 cm (1)

Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $(2R)^2 = x^2 + x^2$ ή

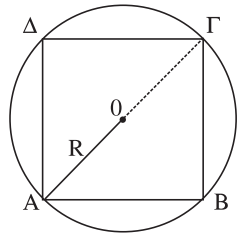
$4R^2 = 2x^2$ ή $x^2 = 2R^2$. Άρα $x = R\sqrt{2}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $2R\sqrt{2} = 80$ ή $R = \dfrac{40}{\sqrt{2}}$ ή $R = 20\sqrt{2}$ cm

β) Η πλευρά x του τετραγώνου είναι: $x = 20\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 40$ cm

Άρα $\lambda = \dfrac{E_{\text{τετραγώνου}}}{E_{\text{κύκλου}}} = \dfrac{40^2\ \text{cm}^2}{\pi\cdot(20\sqrt{2})^2\ \text{cm}^2}\ \dfrac{1600\,\text{cm}^2}{\pi\cdot 800\,\text{cm}^2}$, άρα $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$

4. α) Ισχύει ΑΓ - ΑΒ = 12 cm (1)



Αν x η πλευρά του τετραγώνου, τότε:

$2R = x\sqrt{2}$ ή $x = R\sqrt{2}$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$2R - R\sqrt{2} = 12$ ή $R(2 - \sqrt{2}) = 12$ ή

$$R = \frac{12}{2-\sqrt{2}} = \frac{12(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{12(2+\sqrt{2})}{2^2-2} \text{ ή } R = 6(2+\sqrt{2}) \text{ cm}$$

β) $E = \pi R^2 = \pi[6(2+\sqrt{2})]^2$ ή $E = 72\pi(3 + 2\sqrt{2})$ cm^2

5. α) Ισχύει $\lambda_4 + \lambda_3 = 96$ cm (1)

με $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, η σχέση (1) γίνεται:

$R\sqrt{2} + R\sqrt{3} = 96$ ή $R(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 96$ ή

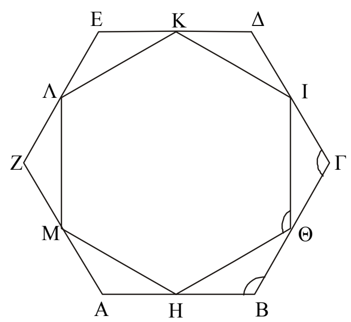
$$R = \frac{96}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{96(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$R = 96(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ cm

β) $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{96(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{2}$ ή $\alpha_4 = 48(\sqrt{6}-2)$ cm

$\alpha_3 = \dfrac{R}{2} = \dfrac{96(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$ ή $\alpha_3 = 48(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ cm

6. Το εξάγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι το ΗΘΙΚΛΜ. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΗΒΘ, ΘΓΙ, παρατηρούμε ότι έχουν ΗΒ = ΒΘ = ΘΓ = ΓΙ και γωνίες $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 120°$.



Άρα αυτά είναι ίσα και άρα ΗΘ = ΘΙ. Επίσης, η γωνία $Η\hat{Θ}Ι = 120°$.

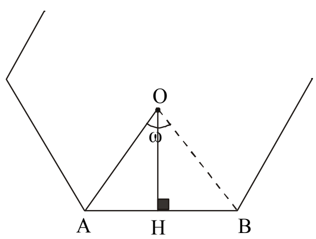
Γενικεύοντας ισχύει ΗΘ = ΘΙ = … = ΜΗ και $\hat{Θ} = \hat{Ι} = \hat{Κ} = … = \hat{Η} = 120°$.
Άρα το εξάγωνο ΗΘΙΚΛΜ είναι κανονικό.

7. Τα δύο κανονικά οκτάγωνα είναι όμοια πολύγωνα και ο λόγος ομοιότητας λ ισούται με το λόγο των αποστημάτων τους, δηλαδή $λ = \frac{α_8}{α'_8} = \frac{3}{4}$.

α) Ο λόγος των περιμέτρων του ισούται με το λόγο ομοιότητας, δηλαδή $\frac{Π}{Π'} = \frac{3}{4}$.

β) Ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{Ε}{Ε'} = \frac{9}{16}$.

8. α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΗΑ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:
$ΑΗ^2 = ΑΟ^2 - ΟΗ^2$ ή
$ΑΗ^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 16 \cdot 3 = 16$.
Άρα ΑΗ = 4 cm και $ΑΒ = λ_ν = 8$ cm

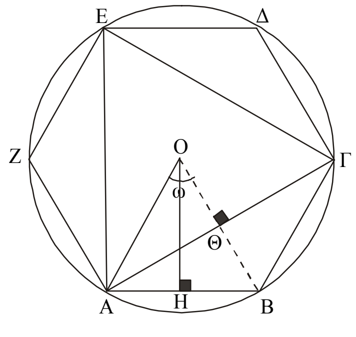


β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ, η ΟΑ = ΑΒ = 8 cm, δηλαδή $R = λ_ν$. Άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο, άρα γωνία $\hat{Ο} = 60°$.

γ) Το πλήθος των πλευρών ν του κανονικού πολυγώνου είναι:
$ν = \frac{360°}{ω}$ ή $ν = \frac{360°}{60°}$ ή ν = 6, πρόκειται δηλαδή για κανονικό εξάγωνο.

9. α) Η πλευρά AB = 6 cm είναι η πλευρά του κανονικού εξαγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R).

Άρα AB = λ_6 = R = 6 cm. Επομένως η πλευρά ΑΓ = $\lambda_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm.



β) $AB = \lambda_6 = 6$ cm

$$OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

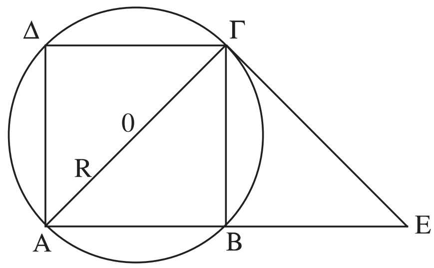
$$O\Theta = \alpha_3 = \frac{R}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm.}$$

Επομένως: $\lambda = \dfrac{(AB\Gamma\Delta EZ)}{(A\Gamma E)} = \dfrac{6\,(OAB)}{3\,(OA\Gamma)} = \dfrac{6\,\frac{1}{2}\,AB\cdot OH}{3\,\frac{1}{2}\,A\Gamma\cdot O\Theta} = \dfrac{2AB\cdot OH}{A\Gamma\cdot O\Theta}$,

$$\lambda = \frac{2\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\cdot 3} = 2$$

10. α) Στο τρίγωνο ΑΓΕ η ΓΒ είναι διάμεσος (αφού AB = BE) και ύψος (αφού η γωνία B = 90° ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο).

Άρα το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές και άρα ΑΓ = ΓΕ.

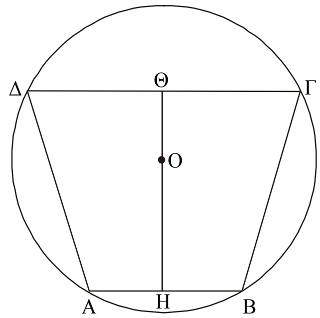


β) Στο τρίγωνο ΑΓΕ οι γωνίες $\hat{A} = \hat{E} = 45°$. Άρα η γωνία $A\hat{\Gamma}E = 90°$. Άρα η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ.

γ) $(A\Gamma E) = \dfrac{A\Gamma\cdot \Gamma E}{2} = \dfrac{2R\cdot 2R}{2} = 2R^2$

11. α) $\overset{\frown}{\Delta A} = 360° - (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}) =$

$360° - 60° - 90° - 120° = 90°$



Άρα $\overset{\frown}{\Delta A} = \overset{\frown}{B\Gamma} = 90°$.

Άρα οι χορδές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες και

επιπλέον ΑΒ // ΓΔ $(\hat{B} = 105°, \hat{\Gamma} = 75°)$.

Άρα ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο.

β) $\overset{\frown}{AB} = 60°$, άρα η χορδή $AB = \lambda_6 = R$

$\overset{\frown}{B\Gamma} = 90°$, άρα η χορδή $B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120°$, άρα η χορδή $\Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

$\overset{\frown}{\Delta A} = 90°$, άρα η χορδή $A\Delta = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

γ) $E = \frac{1}{2}(AB + \Gamma\Delta)\,H\Theta$ (1)

Αλλά $OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $O\Theta = \alpha_3 = \frac{R}{2}$

Άρα $H\Theta = OH + O\Theta = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$ (2)

Η (1) λόγω της (2) και του (β) ερωτήματος γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}(R + R\sqrt{3})\,\frac{R(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{R^2(\sqrt{3}+1)^2}{4}$$

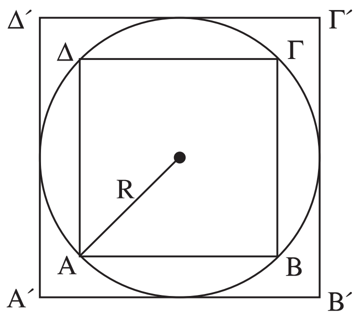
12. α) $AB = \lambda_4$, $A'B' = \lambda_4'$, $A\Gamma = \delta = 2R$

(δ διαγώνιος του τετραγώνου ΑΒΓΔ)

Άρα $\delta = 2R = AB\sqrt{2}$ ή $AB = \dfrac{2R}{\sqrt{2}}$ ή

$AB = \lambda_4 = \dfrac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$ ή $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και

$A'B' = \lambda_4' = 2R$.



β) $\lambda = \dfrac{E}{E'} = \dfrac{\lambda_4^2}{\lambda_4'^2} = \dfrac{(R\sqrt{2})^2}{(2R)^2} = \dfrac{2R^2}{4R^2} = \dfrac{1}{2}$

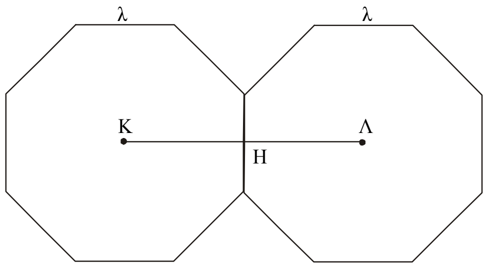
13. Η απόσταση

$K\Lambda = KH + H\Lambda =$

$\alpha_6 + \alpha_6 = 2\alpha_6 = \dfrac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Αλλά $\lambda_6 = R = \lambda$.

Άρα $K\Lambda = \lambda\sqrt{3}$.



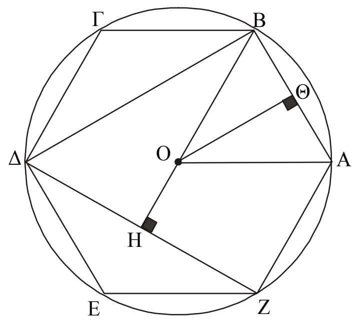
14. α) Έχουμε με R = 3 cm:

$AB = \lambda_6 = 3$ cm, $O\Theta = \alpha_6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

$OH = \alpha_3 = \dfrac{3}{2}$ cm, $\Delta Z = \lambda_3 = 3\sqrt{3}$ cm

Άρα $E_{AB\Gamma\Delta EZ} = 6\ \dfrac{1}{2}\ AB\cdot O\Theta =$

$6\ \dfrac{1}{2}\ 3\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$



β) $E = E_{AB\Gamma\Delta EZ} - E_{ZB\Delta} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} - 3\ \dfrac{1}{2}\ \Delta Z\cdot OH =$

$\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - 3\ \dfrac{1}{2}\ 3\sqrt{3}\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. Άρα $E = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

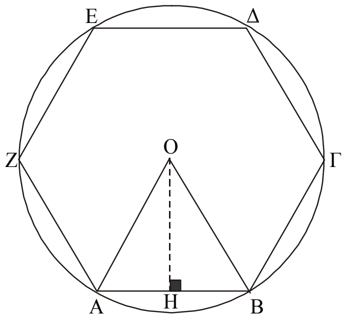
15. α) Η κεντρική γωνία ω του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι:

$\hat{\omega} = \frac{4}{3}$ L ή $\hat{\omega} = 120°$. Αλλά ισχύει $\hat{\omega} = \frac{360°}{\nu}$ με ν τον αριθμό των πλευρών του κανονικού πολυγώνου. Άρα $\nu = \frac{360°}{120°}$, ν = 3

β) Η πλευρά λ_3 του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και το απόστημά του $\alpha_3 = \frac{R}{2}$. Άρα το εμβαδόν του υπολογίζεται:

$E = 3\,\frac{1}{2}\,R\sqrt{3}\,\frac{R}{2}$ ή $E = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2

16. α) $AB = \lambda_6 = R$ $\qquad OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$



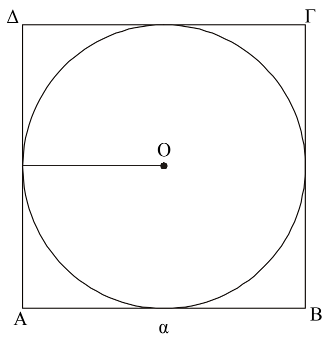
$E_{ΑΒΓΔΕΖ} = 6\,\frac{1}{2}\,AB{\cdot}OH =$

$6\,\frac{1}{2}\,R\,\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β) $E = \pi R^2 - E_{ΑΒΓΔΕΖ} = \pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2}{2}\,(2\pi - 3\sqrt{3})$

17. α) Η ακτίνα του κύκλου είναι $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι:



$E = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4} \qquad (1)$

β) Το εμβαδό του τετραγώνου είναι:

$E_{ΑΒΓΔ} = \alpha^2 \qquad (2)$

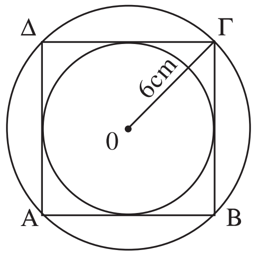
Με αφαίρεση της (1) από τη (2) έχουμε το ζητούμενο εμβαδό:

$E = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2 - \pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4}\,(4 - \pi)$

18. α) Αν λ_4 είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε

$\lambda_4 = R\sqrt{2}$ ή $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$ cm.

Επομένως $E_{ΑΒΓΔ} = (6\sqrt{2})^2$ cm^2 = 72 cm^2.

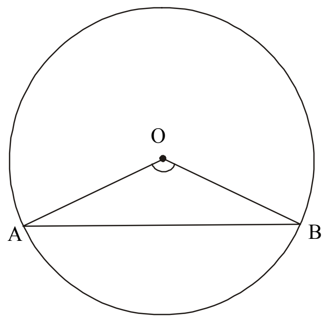


β) Η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου είναι R = 6 cm και η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου είναι $\rho = 3\sqrt{2}$ cm. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

$$\lambda = \frac{\pi \cdot 6^2}{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2} = \frac{36}{18} = 2$$

19. α) Η ΑΒ είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο. Άρα $\hat{O}$ = 120°. Επομένως:

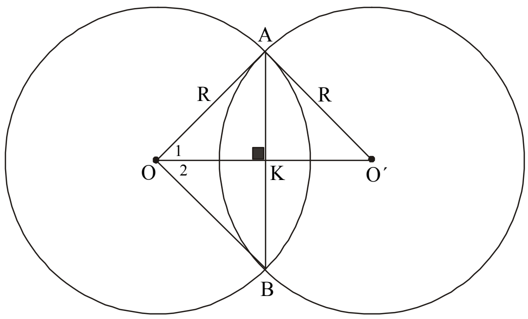
$$S_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120°}{180°} = \frac{2}{3}\pi R$$



β) Για το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΑΟΒ έχουμε:

$$E_{κ.τομ.} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{3}$$

20. α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ με ΟΑ = R και ΟΚ = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:



$$AK^2 = OA^2 - OK^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4} = \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$

Άρα $AK = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ και επομένως το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ είναι ισοσκελές.

Άρα $\hat{O}_1 = 45°$, άρα $\hat{O} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90°$. Επομένως:

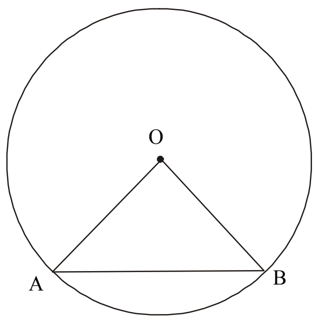
$$E_{\overset{\frown}{AOB}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1)$$

β) $E = 2\,[E_{\overset{\frown}{AOB}} - E_{AOB}]$ (2)

Αλλά $E_{AOB} = \frac{R^2}{2}$ (3)

Από (1) και (3) η σχέση (2) γίνεται: $E = 2\,[\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}] = \frac{R^2}{2}(\pi - 2)$

21. α) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του μικρότερου κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΑΟΒ το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ.



$$E_{\overset{\frown}{AOB}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1)$$

$$E_{AOB} = \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2} \quad (2)$$

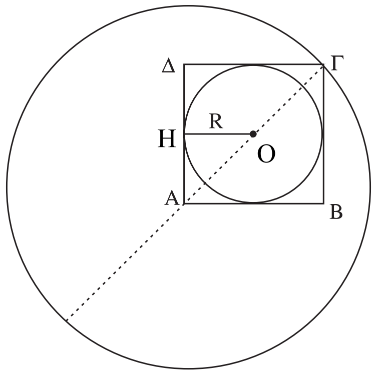
Το ζητούμενο εμβαδόν σύμφωνα με τις (1), (2) είναι:

$$E = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) \quad (3)$$

β) Για τον υπολογισμό του μεγαλύτερου κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδό του κύκλου το εμβαδό της σχέσης (3) και έχουμε:

$E = \pi R^2 - \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$ $\qquad$ $E = \frac{R^2}{4}(3\pi + 2)$

22. α) Είναι ΑΟ = ΟΓ, ΟΗ ⊥ ΑΔ, τότε ΟΗ // ΔΓ.



Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΟΗ = // $\frac{ΔΓ}{2}$ ή

ΔΓ = 2ΟΗ = 2R.

$E_{ΑΒΓΔ} = ΔΓ^2 = (2R)^2 = 4R^2$

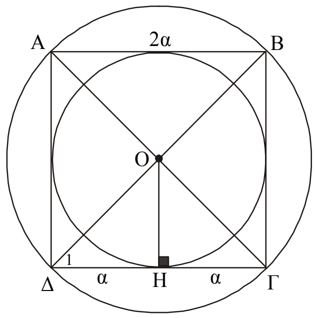
β) Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2R η ΑΓ διαγώνιός του. Τότε ισχύει:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = (2R)^2 + (2R)^2$ ή $ΑΓ^2 = 8R^2$

Ο λόγος εμβαδών των δύο κύκλων (Α, ΑΓ), (Ο, R) είναι:

$$\frac{E_{(Α, ΑΓ)}}{E_{(Ο, R)}} = \frac{πΑΓ^2}{πR^2} = \frac{π8R^2}{πR^2} = 8$$

23. Το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ορθογώνιο στο Ο και ισοσκελές (ΔΟ = ΟΓ). Επίσης ΟΗ ⊥ ΔΓ. Άρα ΔΗ = ΗΓ = α και ΟΗ = α.



Στο τρίγωνο ΟΗΔ, $\hat{Δ}_1 = 45°$, $\hat{H} = 90°$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

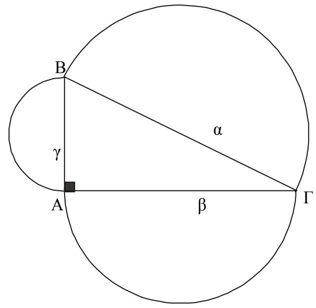
$ΔΟ^2 = ΔΗ^2 + ΗΟ^2$,

$ΔΟ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΔΟ^2 = 2α^2$ (1)

α) $E_{(Ο, ΟΗ)} = π \cdot ΟΗ^2 = πα^2$

β) $E_{(Ο, ΟΔ)} = π \cdot ΟΔ^2 \overset{(1)}{=} π \cdot 2α^2$, άρα: $\frac{E_{(Ο, ΟΔ)}}{E_{(Ο, ΟΗ)}} = \frac{2πα^2}{πα^2} = 2$

24. Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ ή } \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\pi\beta^2}{4} + \frac{\pi\gamma^2}{4} \text{ ή}$$

$$\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \text{ ή}$$

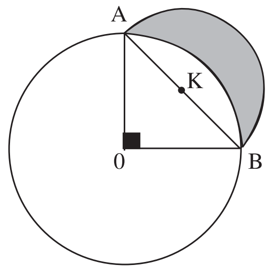
$$E_\alpha = E_B + E_\gamma$$

Με E_α συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο α

Με E_β συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο β

Με E_γ συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο γ.

25. α) Είναι ΟΑ = ΟΒ = R, $E_{OAB} = \frac{1}{2}RR = \frac{R^2}{2}$



β) $E_{ΜΗΝΙΣΚΟΥ} =$

$E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} - [E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ}]$

(Ι)

Στο ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ

(ΟΑ = ΟΒ = R, $\hat{O} = 90°$) έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ ή } (2KB)^2 = R^2 + R^2 \text{ ή } 4KB^2 = 2R^2 \text{ ή } KB^2 = \frac{R^2}{2} \quad (1)$$

$$E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} = \frac{\pi KB^2}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\pi\frac{R^2}{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (2)$$

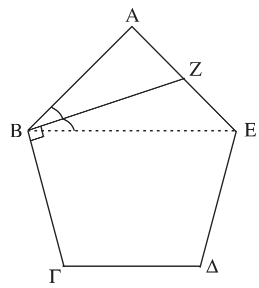
$$E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ} = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \quad (3)$$

Από την ισότητα (Ι):

$$E_{ΜΗΝΙΣΚΟΥ} = E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} - [E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ}] \overset{(2),(3)}{=}$$

$$\frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{R^2}{2}$$

26. Αν $\hat{\omega}$ είναι η κεντρική γωνία του κανονικού πενταγώνου τότε:



$\hat{\omega} = \dfrac{360°}{5}$ ή $\hat{\omega} = 72°$

Αν $\hat{\varphi}$ η εσωτερική γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι:

$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180°$ ή $\hat{\varphi} = 180° - 72°$ ή $\hat{\varphi} = 108°$

Στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι ΑΒ = ΑΕ (ισοσκελές), άρα:

$A\hat{B}E = A\hat{E}B$, τότε $2\,A\hat{B}E + \hat{A} = 180°$ ή $2\,A\hat{B}E = 180° - 108°$ ή

$2\,A\hat{B}E = 72°$ ή $A\hat{B}E = 36°$

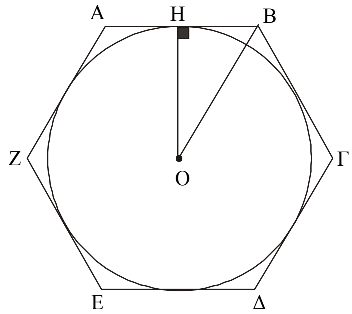
Η $E\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma - A\hat{B}E$ ή $E\hat{B}\Gamma = 108° - 36°$ ή $E\hat{B}\Gamma = 72°$.

Όμως $Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = \dfrac{A\hat{B}E}{2} + E\hat{B}\Gamma = \dfrac{36°}{2} + 72° = 18° + 72° = 90°$

Άρα ΖΒ ⊥ ΒΓ.

27. Από την προηγούμενη λύση της (26), έχουμε: $E\hat{B}\Gamma = 72°$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 108°$, άρα $E\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 72° + 108° = 180°$. Τότε ΒΕ // ΓΔ, αφού οι εντός και επί τα αυτά των ΒΕ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι παραπληρωματικές.

28. Από το σχήμα: ΟΗ = 3 cm, ΟΒ = x, ΗΒ = $\dfrac{x}{2}$.



Στο $\overset{\Delta}{\text{ΟΗΒ}}$: $ΟΒ^2 = ΟΗ^2 + ΗΒ^2$ ή

$x^2 = 3^2 + \dfrac{x^4}{4}$ ή $\dfrac{3x^2}{4} = 9$ ή $x^2 = 12$ ή

$x = 2\sqrt{3}$ cm. Όμως:

$α'_6 = ΟΗ = 3$ cm, ΑΒ = 2ΗΒ ή $ΑΒ = x = 2\sqrt{3}$.

Άρα α) $λ'_6 = 2\sqrt{3}$ cm

β) $α'_6 = 3$ cm

γ) $Ε_{ΑΒΓΔΕΖΗ} = 6Ε_{ΑΟΒ} = 6\,\dfrac{λ'_6\,α'_6}{2} = 6\,\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2} = 18\sqrt{3}$ cm^2

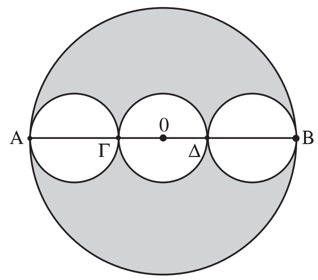
29. Είναι $λ_3 = 9$ cm. Γνωρίζουμε ότι $λ_3 = R\sqrt{3}$, τότε $R\sqrt{3} = 9$ ή $R = 3\sqrt{3}$ cm

α) Το μήκος του κύκλου $L = 2πR = 2π\cdot 3\sqrt{3} = 6π\sqrt{3}$ cm

β) $Ε_{\text{τριών κυκλικών τμημάτων εκτός τριγώνου}} = πR^2 - Ε_{\text{ισοπλευρ.}} = π\,(3\sqrt{3})^2 - \dfrac{λ_3^2\sqrt{3}}{4} =$

$27π - \dfrac{9^2\sqrt{3}}{4} = (27π - \dfrac{81\sqrt{3}}{4})$ cm^2 = $9\,(3π - \dfrac{9\sqrt{3}}{4})$ cm^2.

30. α) $π\left(\dfrac{ΑΒ}{2}\right)^2 = π\left(\dfrac{6α}{2}\right)^2 = π\,(3α)^2 = 9πα^2$, ΑΒ = 6α



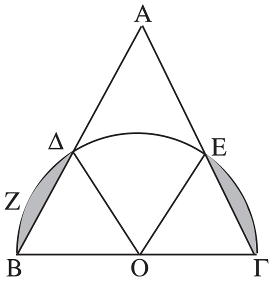
β) Είναι $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ = \dfrac{ΑΒ}{3} = \dfrac{6α}{3} = 2α$.

Τότε $π\left(\dfrac{ΑΓ}{2}\right)^2 = π\left(\dfrac{2α}{2}\right)^2 = πα^2$

γ) Από το (α) και το (β) έχουμε: $\dfrac{3πα^2}{9πα^2} = \dfrac{1}{3}$

δ) $Ε_{\text{γραμμοσκιασμένο}} = Ε_{(Ο,\,ΟΑ)} - 3Ε_{\text{μικρού κύκλου}} = 9πα^2 - 3πα^2 = 6πα^2$

31. α) Το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές (ΟΒ = ΟΔ) με $\hat{B} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο. Το ίδιο και για το τρίγωνο ΟΕΓ.



β) Είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα ΟΔΖΒ}} = \dfrac{\pi\,(OB)^2 \cdot 60}{360} =$

$$= \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{6} = \frac{\pi\alpha^2}{24}$$

γ) Τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων είναι:

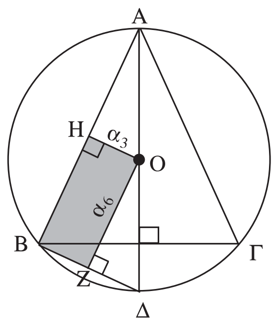
$$E = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - E_{\Delta BO}\right) = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}\right) =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{12} - \frac{\sqrt{3}\,\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

32. Είναι: $\dfrac{E_{\text{εγ/νου}}}{E_{\text{περ/νου}}} = \left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_3'}\right)^2 = \left(\dfrac{R/2}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

33. α) Η $A\hat{B}\Delta = 90°$ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο

$\alpha_3 \perp AB$, $\alpha_6 \perp B\Delta$, τότε $\alpha_3 \perp \alpha_6$



β) $E_{AOB} = \dfrac{\alpha_3 \cdot AB}{2} = \dfrac{\frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

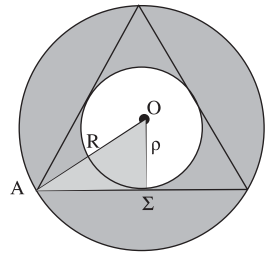
$E_{OB\Delta} = \dfrac{\alpha_6 \cdot B\Delta}{2} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$,

τότε: $E_{AOB} = E_{OB\Delta}$

34. $E_{\text{στεφαν.}} = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi \cdot A\Sigma^2$

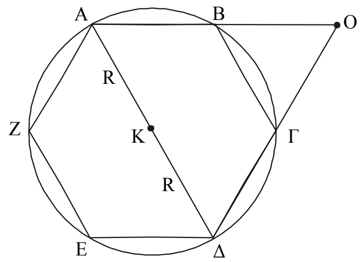
Όμως $E_{OA\Sigma} = \dfrac{A\Sigma \cdot \rho}{2}$ ή $\dfrac{2E_{OA\Sigma}}{\rho} = A\Sigma$, τότε:

$$E_{\text{στεφαν.}} = \pi A\Sigma^2 = \pi\left(\frac{2E_{OA\Sigma}}{\rho}\right)^2 = \pi\,\frac{4E_{OA\Sigma}^2}{\rho^2}$$



35. Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με πλευρά ΑΔ = 2R. Άρα:

$$E_{OA\Delta} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$



36. $E_{\text{ισοπλ.}} = 12\sqrt{3}$ cm², όμως $E_{\text{ισοπλ.}} = 3\,\dfrac{\lambda_3\alpha_3}{2} = \dfrac{3R\sqrt{3}\cdot\dfrac{R}{2}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Τότε: $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ ή $R^2 = 16$ ή $R = 4$ cm

α) $\lambda_4 = \sqrt{2}\,R$ ή $\lambda_4 = \sqrt{2}\cdot 4$ ή $\lambda_4 = 4\sqrt{2}$ cm

β) $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ ή $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}4$ ή $\alpha_4 = 2\sqrt{2}$ cm

γ) $E_4 = \lambda_4^2$ ή $E_4 = (4\sqrt{2})^2$ ή $E_4 = 32$ cm²

37. α) Πλευρά τετραγώνου = 2·40 = 80 m

β) Αξία χωραφιού = $80^2 \cdot 10.000$ = 64.000.000 δρχ.

γ) $E_{\text{ζητούμενο}} = 80^2 - \pi\cdot 40^2 = 6400 - 1600\,\pi = 1600\,(4 - \pi)$ m²

38. Είναι διάμετρος $\delta = 0{,}5$ m, $L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = 2\pi \dfrac{\delta}{2} = \pi \cdot 0{,}5$ m

Αν ν ο αριθμός στροφών, τότε $\nu \cdot L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = 1.000$ m ή $\nu = \dfrac{1000}{L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}}}$ ή

$\nu = \dfrac{1000}{0{,}5\pi} = \dfrac{2000}{\pi}$ στροφές.

39. α) Στο κυκλικό πάρκο R = 6 m θα εγγραφεί τετράγωνο πλευράς $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ ή $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, $E_4 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ m^2. Δηλαδή θα χρειαστούν 72:0,09 πλακάκια = 800 πλακάκια.

β) Αν Ε το μέρος που δεν έχει πλακάκια, θα είναι:

$E = \pi R^2 - \lambda_4^2$ ή $E = \pi 6^2 - (6\sqrt{2})^2$ ή $E \approx 3{,}14 \cdot 36 - 72$ ή $E \approx 41{,}04$ m^2

Το κόστος είναι $41{,}04 \cdot 3.000 = 123.120$ δρχ.