Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ - Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ
Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(εκπαιδευτικό υλικό Τεχνολογικής κατεύθυνσης 1999-2000)

ΜΕΡΟΣ Α΄: ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 2ο: Μιγαδικοι Αριθμοι

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1.	* Η ισότητα στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών ορίζεται από την ισοδυναμία: $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.	Σ	Λ
2.	* Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.	Σ	Λ
3.	* Αν $z = \kappa + \lambda i$, $\kappa, \lambda \in R$, τότε $Re(z) = \kappa$.	Σ	Λ
4.	* Αν $z = x + (y - 1)i$, $x, y \in R$ και $Im(z) = 0$, τότε $y = 1$.	Σ	Λ
5.	* Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$.	Σ	Λ
6.	* Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha\beta \neq 0$, τότε ο $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$.	Σ	Λ
7.	* Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ορίζεται $z^{\circ} = 1$.	Σ	Λ
8.	* Αν $z \in C$, τότε $\overline{\overline{z}} = z$.	Σ	Λ
9.	* Ο αριθμός z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \overline{z}$.	Σ	Λ
10.	* Ο αριθμός z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\overline{z}$.	Σ	Λ
11.	* Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_1 + z_2 = 2\alpha$, τότε $z_2 = \overline{z}_1$.	Σ	Λ
12.	* Αν $i^2 = -1$, τότε $i^{2003} = i$.	Σ	Λ
13.	* Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός.	Σ	Λ
14.	* Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y.	Σ	Λ
15.	* Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.	Σ	Λ
16.	* Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο με $Re(z) = 2$ βρίσκονται στην ευθεία $x = 2$.	Σ	Λ
17.	* Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο με $Im(z + i) = 8$ βρίσκονται στην ευθεία $y = 8$.	Σ	Λ

18. * Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x΄x είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \overline{z}_2$. **Σ** **Λ**

19. * Το μέτρο του $z = -2 + 3i$ είναι 13. **Σ** **Λ**

20. * Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. **Σ** **Λ**

21. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z, z_1, z_2 \in C$, παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία Α (z_1) και Β (z_2). **Σ** **Λ**

22. * Αν Κ (z_0) η εικόνα του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, $z \in C$, παριστάνει κύκλο με κέντρο το Κ (z_0) και ακτίνα ρ. **Σ** **Λ**

23. * Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των μιγαδικών $z_\lambda = 2\lambda + (\lambda^2 + 1)\, i$ βρίσκονται πάνω στον άξονα x΄x για κάθε $\lambda \in R$. **Σ** **Λ**

24. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση. **Σ** **Λ**

25. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό ορίζεται όρισμα. **Σ** **Λ**

26. * Αν $\text{Arg} z = \theta$ τότε και $\text{Arg}\, \overline{z} = \theta$. **Σ** **Λ**

27. * Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$ είναι $z = \rho\,(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, όπου $\rho = |z|$ και θ ένα όρισμά του. **Σ** **Λ**

28. * Αν $z = 3\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{4})$ τότε ένα όρισμα του z είναι το $\frac{21\pi}{4}$. **Σ** **Λ**

29. * Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \rho_1\,(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2\,(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ ισχύει $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,(\text{συν}\,\frac{\theta_1}{\theta_2} + i\text{ημ}\,\frac{\theta_1}{\theta_2})$. **Σ** **Λ**

30. * Αν ένας μιγαδικός αριθμός πολλαπλασιαστεί επί i^5 τότε η διανυσματική του ακτίνα στρέφεται κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$. **Σ** **Λ**

31. * Δύο ορίσματα ενός μιγαδικού αριθμού διαφέρουν κατά γωνία $2\kappa\pi$ με $\kappa \in Z$. **Σ** **Λ**

32. * Αν τα ορίσματα δύο μιγαδικών διαφέρουν κατά $\kappa\pi$, $\kappa \in Z$, τότε οι εικόνες τους και η αρχή των αξόνων βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **Σ** **Λ**

33. * Ισχύει: $(\text{συν}\,\frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{12})^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. **Σ** **Λ**

34. * Η εξίσωση $z^3 - i = 0$ έχει μοναδική ρίζα τον $z_0 = i$. **Σ** **Λ**

35. * Η εξίσωση $z^5 = 1$ έχει πέντε ρίζες, των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 1. **Σ** **Λ**

36. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$. **Σ** **Λ**

37. * Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$. **Σ** **Λ**

38. * Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C. **Σ** **Λ**

39. * Υπάρχει εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές 3ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς 2, $1 + i$, $2 + i$. **Σ** **Λ**

40. * Οι εξισώσεις $x^\nu = 1$ και $x^\mu = 1$, $\nu, \mu \in N^*$ έχουν τουλάχιστον μια κοινή ρίζα. **Σ** **Λ**

41. * Αν η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε αυτή έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ισότητα $x + (y - 1)\,i = 3 + 4i$, $x, y \in R$, ισχύει αν και μόνο αν

   Α. $x = 3$ ή $y = 5$ **Β.** $x = 3$ και $y = 5$

   Γ. $x = 3$ ή $y = 4$ **Δ.** $x = 3$ και $y = 4$ **Ε.** $x + y = 7$

2. * Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha\beta \neq 0$ και $\bar{z}$ ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;

   Α. $z + \bar{z}$ πραγματικός αριθμός **Β.** $z - \bar{z}$ φανταστικός αριθμός

   Γ. $z \cdot \bar{z}$ φανταστικός αριθμός **Δ.** $-\ \overline{z \cdot \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός

   Ε. $\overline{z + \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός

3. * Ο αριθμός i^{2000} ισούται με:

   Α. i **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** i **Ε.** 0

4. * Αν $\nu \in N$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι σωστή η

   Α. $i^{4\nu} = 1$ **Β.** $i^{4\nu+1} = -i$ **Γ.** $i^{4\nu+2} = -1$ **Δ.** $i^{\nu+4} = i^{\nu}$ **Ε.** $i^{4\nu+3} = -i$

5. * Ο $\dfrac{1}{2 - 4i}$ ισούται με

   Α. $\dfrac{2 + 4i}{20}$ **Β.** $\dfrac{-2 + 4i}{20}$ **Γ.** $\dfrac{2 - 4i}{20}$

   Δ. $\dfrac{-2 - 4i}{20}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

6. * Το $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{1821}$ ισούται με

   Α. $1 + i$ **Β.** $1 - i$ **Γ.** i **Δ.** 2 **Ε.** - 2

7. * Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = (x + 1) + (y - 1)\,i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με

Α. $1 - i$ **Β.** $1 + i$ **Γ.** $- 1 - i$ **Δ.** $- 1 + i$ **Ε.** $2 + 2i$

8. * Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

Α. $y = x$ **Β.** $y = - x$ **Γ.** $y = 0$

Δ. $x = 0$ **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.

9. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $2 + 3i$ και $3 + 2i$ στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία

Α. $x = 2$ **Β.** $y = 3$ **Γ.** $y = x$ **Δ.** $y = - x$ **Ε.** $x = 0$

10. * Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο

Α. $2 + i$ **Β.** $- 2 + 2i$ **Γ.** $2 + 2i$ **Δ.** $- 2 - 2i$ **Ε.** $- 2 - i$

11. * Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά

Α. ως προς τον άξονα y΄y **Β.** ως προς τον άξονα x΄x

Γ. ως προς την ευθεία $y = x$ **Δ.** ως προς την ευθεία $y = - x$

Ε. ως προς την αρχή των αξόνων

12. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας $2x + 3y - 1 = 0$, τότε ο z **δεν** μπορεί να είναι ο

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $1 - \frac{1}{3}\,i$ **Γ.** $5 - 3i$ **Δ.** $\frac{1}{3}\,i$ **Ε.** $1 + 2i$

13. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = - 1 - 2i$, $z_2 = 5 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$ και $z_4 = - 1 + 2i$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές

Α. τετραγώνου **Β.** ορθογωνίου **Γ.** τραπεζίου

Δ. ρόμβου **Ε.** τυχαίου τετραπλεύρου

14. * Αν $z = 1 + yi$, $y \in R$ και $|z| = 2$, τότε μια τιμή του y είναι

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 5 **Ε.** $\sqrt{2}$

15. * Αν για το μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ είναι $z = \bar{z}$ τότε από τα παρακάτω ισχύει το

Α. $\mathrm{Im}(z) < 0$ **Β.** $\mathrm{Im}(z) = 0$ **Γ.** $\mathrm{Im}(z) > 0$

Δ. $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

16. * Αν οι εικόνες δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι στο ίδιο τεταρτημόριο, ποια από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει;

Α. $z_1 = -z_2$ **Β.** $z_1 = \bar{z}_2$ **Γ.** $z_1 = -\bar{z}_2$

Δ. $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = 0$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

17. * Το μέτρο του μιγαδικού $z = \dfrac{\sqrt{2} - i}{1 + \sqrt{2}i}$ είναι

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** - 2 **Δ.** $2\sqrt{2}$ **Ε.** - 1

18. * Αν $z = x + yi$, $x, y \in R$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι πάντα σωστή η

Α. $|z| = |\bar{z}|$ **Β.** $|z| = |-z|$ **Γ.** $|z|^2 = z^2$

Δ. $|z| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$ **Ε.** $|z^2| = |\bar{z}|^2$

19. * Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3i$ τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 14

20. * Αν $|\bar{z}_1| = 2$ και $|-z_2| = 5$ η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 10

21. * Ποια είναι η καλύτερη προσεγγιστική τιμή για το μέτρο του μιγαδικού $z = -5 - 7i$;

Α. $5\cdot 25$ **Β.** $9\cdot 22$ **Γ.** $8\cdot 60$ **Δ.** $8\cdot 80$ **Ε.** $8\cdot 10$

22. * Αν το σημείο Ρ (x, y) είναι η εικόνα των μιγαδικών $z = x + yi$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $|z - 3| = 5$, το Ρ (x, y) βρίσκεται πάνω σε

Α. ευθεία **Β.** έλλειψη **Γ.** κύκλο

Δ. παραβολή **Ε.** υπερβολή

23. * Η εξίσωση $|z - (1 + 2i)| = 4$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

Α. κέντρο (- 1, 2) και ακτίνα 4 **Β.** κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 2

Γ. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 4 **Δ.** κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2

Ε. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

24. * Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 10. Από τους παρακάτω αριθμούς έχει εικόνα πάνω στον κύκλο ο

Α. $z = \sqrt{2} + 3i$ **Β.** $z = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$ **Γ.** $z = 2 - i\sqrt{8}$

Δ. $z = 8 + 6i$ **Ε.** $z = \sqrt{2} + i\sqrt{8}$

25. * Το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι

Α. ο άξονας y΄y

Β. η ευθεία y = x

Γ. ο άξονας x΄x

Δ. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)

Ε. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

26. * Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z βρίσκεται επάνω στον κύκλο $|z| = 1$, τότε η εικόνα του $w = \frac{3}{z}$ βρίσκεται

Α. στον ίδιο κύκλο

Β. στον ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 3

Γ. στον ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $\frac{1}{3}$

Δ. στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

27. * Αν η εξίσωση $|z - 2| = |z - κi|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 4

28. * Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2, 1) και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει

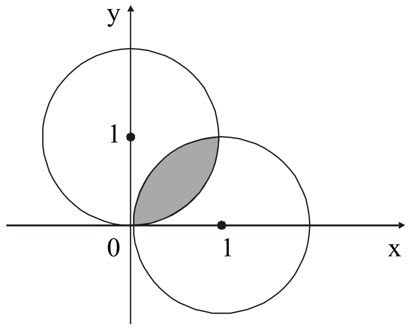
Α. $|z - (2 - i)| = 3$ **Β.** $|z - (1 + 2i)| = 3$

Γ. $|z - (2 + i)| = 9$ **Δ.** $|z - (2 + i)| = 3$ **Ε.** $|z + (2 + i)| = 3$

29. * Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ με άγνωστο τον $z \in C$ είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 4 **Ε.** 0

30. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



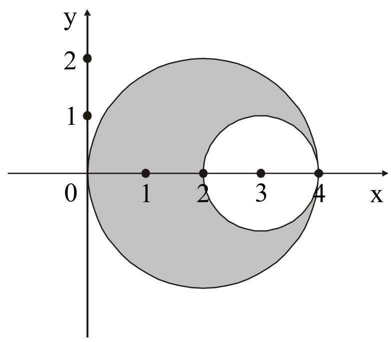
Α. $|z+1| < 1$ και $|z+i| < 1$

Β. $|z-1| < 1$ και $|z+i| < 1$

Γ. $|z-1| > 1$ και $|z-i| > 1$

Δ. $|z-1| < 1$ και $|z-i| < 1$ **Ε.** $|z+1| < 1$ και $|z-i| < 1$

31. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



Α. $|z-2| < 2$ και $|z-3| < 1$

Β. $|z-2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Γ. $|z+2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Δ. $|z+2| < 2$ και $|z+3| > 1$ **Ε.** $|z-2| > 2$ και $|z-3| < 1$

32. * Για το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;

Α. Το Arg (z) βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$

Β. Το Arg (z) είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα x΄x και παίρνει τιμές στο $[0, 2\pi)$

Γ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$ ο z έχει πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό

Δ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{2}$ ο z είναι πραγματικός αριθμός

Ε. Αν Arg (z) = $\frac{3\pi}{4}$ τότε Re (z) = - Im (z)

33. * Αν z = α +βi, αβ ≠ 0 και Arg (z) = θ, θ ∈ $(0, \frac{\pi}{2})$ τότε πάντοτε ισχύει

Α. $\frac{\alpha}{\beta}$ = εφθ **Β.** αβ = σφθ **Γ.** $\frac{\beta}{\alpha}$ = εφθ

Δ. αβ = εφθ **Ε.** α + β = σφθ

34. * Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$, η εικόνα του z είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 2x **Δ.** y = - 2x **Ε.** y = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ x

35. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στην ευθεία y = - x τότε από τα παρακάτω μπορεί να είναι πρωτεύον όρισμα του z το

Α. $\frac{\pi}{4}$ **Β.** - $\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{3\pi}{4}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{5\pi}{4}$

36. * Αν Α, Β είναι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z και iz αντιστοίχως τότε η γωνία ΑΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων) ισούται με

Α. $\frac{3\pi}{2}$ **Β.** $\frac{2\pi}{3}$ **Γ.** π **Δ.** $\frac{5\pi}{6}$ **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

37. * Από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς γραμμένος σε τριγωνομετρική μορφή είναι ο

Α. - 2 (συνθ + iημθ) **Β.** 3 (- συνθ + iημθ)

Γ. 3 (συνθ + iημθ) **Δ.** 4 (ημθ + iσυνθ)

Ε. - 3 (ημθ + iσυνθ)

38. * Αν $z_1 = z_2$ όπου $z_1 = ρ\,(συνθ + iημθ)$ και $z_2 = ρ\,(συν\,\frac{π}{3} + iημ\,\frac{π}{3})$, $ρ > 0$, τότε η γωνία θ **δεν** μπορεί να είναι

Α. $\frac{7π}{3}$ **Β.** $\frac{13π}{3}$ **Γ.** $\frac{19π}{3}$ **Δ.** $\frac{22π}{3}$ **Ε.** $\frac{25π}{3}$

39. * Αν $z = ρ\,(συν\frac{π}{9} + iημ\frac{π}{9})$, $ρ > 0$, τότε το $\mathrm{Arg}\,(\bar{z})$ ισούται με

Α. $-\frac{π}{9}$ **Β.** $\frac{10π}{9}$ **Γ.** $\frac{7π}{9}$ **Δ.** $\frac{11π}{9}$ **Ε.** $\frac{17π}{9}$

40. * Αν $z = συν\,\frac{π}{4} + iημ\,\frac{π}{4}$, τότε ο z^{2000} ισούται με

Α. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 0 **Ε.** - i

41. * Ο $z = (συν\frac{π}{90} + iημ\frac{π}{90})^{45}$ ισούται με

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** - i **Δ.** i **Ε.** - 1

42. * Αν $z = συνθ + iημθ$ τότε ο $\frac{1}{z}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{συνθ} + i\,\frac{1}{ημθ}$ **Β.** $συν\,\frac{1}{θ} + iημ\,\frac{1}{θ}$ **Γ.** $-\,συνθ - iημθ$

Δ. $συν\,(-θ) + iημ\,(-θ)$ **Ε.** $-\,συνθ + iημθ$

43. * Αν η εξίσωση $x^3 + κx + λ = 0$, $κ, λ \in R$, έχει ως λύση την $x = 2 + 5i$, τότε αποκλείεται να έχει λύση την

Α. $x = 5$ **Β.** $x = 2 - 5i$ **Γ.** $x = 0$ **Δ.** $x = 1 + i$ **Ε.** $x = -3$

44. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + α = 0$, $α \in R$, έχει ρίζα τον $1 + i$. Ο α ισούται με

Α. 1 **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** 2 **Δ.** 0 **Ε.** - 2

45. * Αν P (x) πολυώνυμο τουλάχιστον 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και η εξίσωση P (x) = 0 έχει ρίζα τον αριθμό 2 - i, θα έχει οπωσδήποτε και τον

Α. $2 + i^{20}$ **Β.** $\frac{1}{2+i^{20}}$ **Γ.** $2 + i^{33}$ **Δ.** $\frac{1}{2+i}$ **Ε.** $2 - i^4$

46. * Οι αριθμοί 2 + i, 3 - 5i, - 1 + 3i, 2 + 7i είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1} x^{ν-1} + α_{ν-2} x^{ν-2} + \ldots + α_1 x + α_0$, $α_ν \neq 0$, $ν \in N$, με πραγματικούς συντελεστές. Για το ν ισχύει

Α. $ν = 4$ **Β.** $ν = 6$ **Γ.** $4 < ν < 8$

Δ. $ν \geq 8$ **Ε.** $6 \leq ν < 8$

47. * Η εξίσωση $z^6 + z^3 + 3z^2 + 3z + 36 = 0$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $-\sqrt{3}\,i$. Τότε έχει οπωσδήποτε και τον

Α. - 1 **Β.** $1 + \sqrt{3}\,i$ **Γ.** $-\sqrt{3}$ **Δ.** 1 **Ε.** $\sqrt{3}\,i$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τους αριθμούς που δίνονται στην αριστερή στήλη:

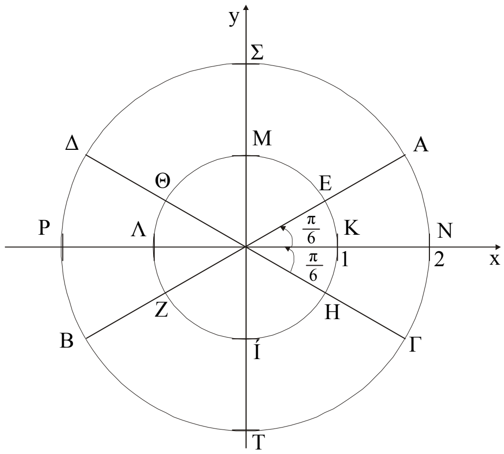
z	Re (z)	Im (z)	- z	$\overline{z}$	$\frac{1}{z}$	$\lvert z \rvert$
- 2 + 3i						
- 2i						
- 5						
$\frac{1}{3i}$						

2. * Οι αριθμοί z_1, z_2 είναι μιγαδικοί. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

μιγαδικός αριθμός z	$z_1 = \sqrt{3} + i$	$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$	$z_1 \cdot z_2 = \dots$	$\frac{z_2}{z_1} = \dots$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \dots$
$\lvert z \rvert$					
Agr (z)					
τριγωνο-μετρική μορφή z					

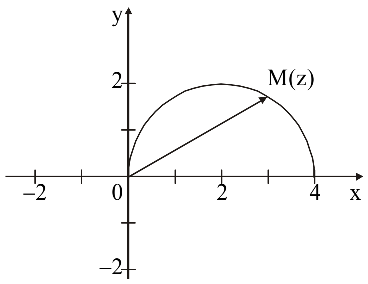
Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $z_1 = 2\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$ **2.** $z_2 = \text{συν}\,\frac{5\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}$ **3.** $z_3 = \text{συν}\,\frac{19\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{19\pi}{6}$ **4.** $z_4 = 2\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} - i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$	

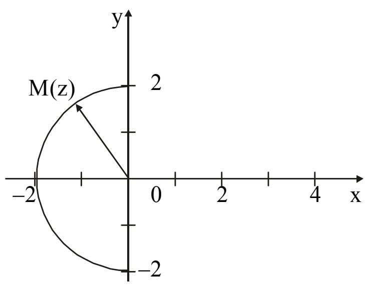
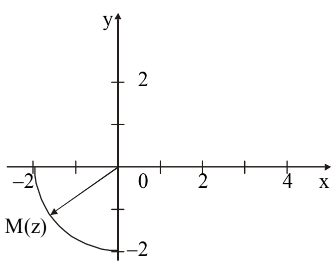
1	2	3	4

2. * Στα σχήματα της στήλης Α φαίνονται τόξα κύκλων στα οποία βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

<table>
<tr><th colspan="2">Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>Α.</td><td>
</td><td rowspan="3">1. $|z| = 2$, $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ και $\mathrm{Re}(z) \leq 0$

2. $|z - 2| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

3. $|z| = 2$ και $\mathrm{Re}(z) \leq 0$

4. $|z + 2| = 2$ και $\mathrm{Re}(z) < 0$</td></tr>
<tr><td>Β.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Γ.</td><td>
</td></tr>
</table>

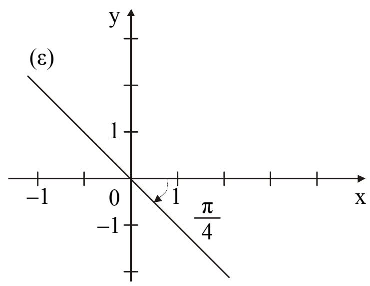
Α	**Β**	**Γ**

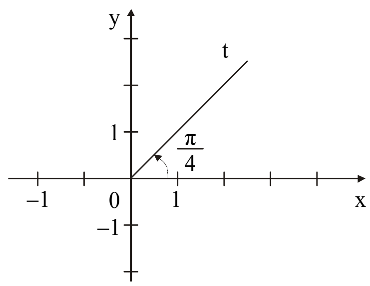
3. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο της στήλης Α να αντιστοιχεί στη σχέση που βρίσκεται στη στήλη Β.

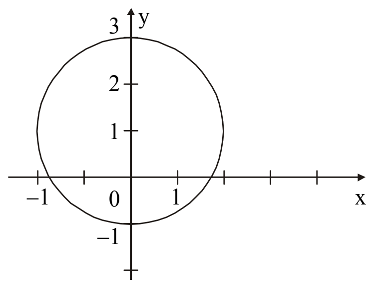
Στήλη Α	**Στήλη Β**
γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο	***σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z***
Α. κύκλος κέντρου K (2, 1) και ακτίνας 3 **Β.** μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0), (0, - 1) **Γ.** κύκλος κέντρου O (0, 0) και ακτίνας 3	**1.** $\|z+2+i\| = 3$ **2.** $\|z\| = 3$ **3.** $\|z-2-i\| = 3$ **4.** $\|z+2\| = \|z-i\|$ **5.** $\|z-2\| = \|z+i\|$

Α	**Β**	**Γ**

4. * Στη στήλη Α φαίνονται οι γραμμές στο μιγαδικό επίπεδο στις οποίες ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, $x, y \in R$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα έτσι ώστε σε κάθε γραμμή της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

<table>
<tr><th colspan="2">Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>Α.</td><td>
</td><td>1) $|z - 3| = |z + 3i|$

2) $|z - i| = 2$</td></tr>
<tr><td>Β.</td><td>
</td><td>3) $Arg\,(z) = \frac{\pi}{4}$

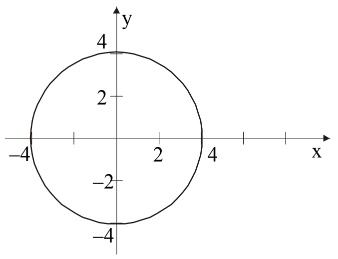
4) $Arg\,(z - 2i) = -\frac{\pi}{4}$</td></tr>
<tr><td>Γ.</td><td>
</td><td>5) $z = x\,(1 - i)$, $x \in R$</td></tr>
</table>

Α	Β	Γ

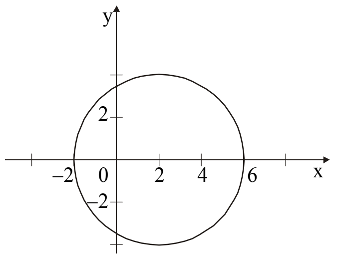
5. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα έτσι ώστε σε κάθε γραμμή της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

Στήλη Α

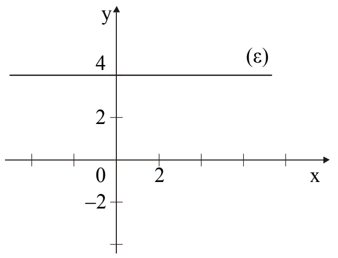
Α.



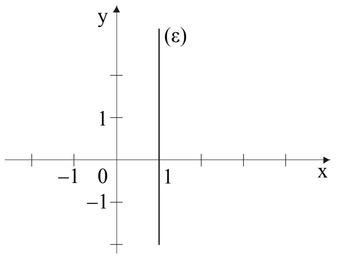
Β.



Γ.



Δ.



Στήλη Β

1) $z - \overline{z} = 8i$

2) $|z| = 4$

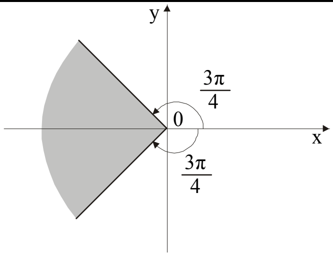
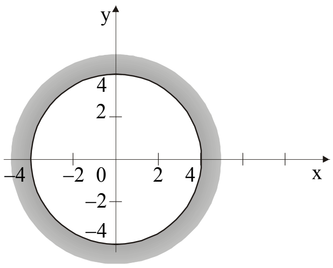
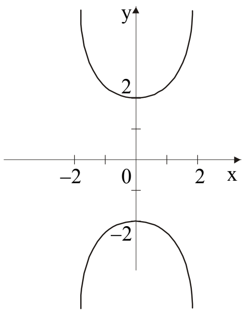
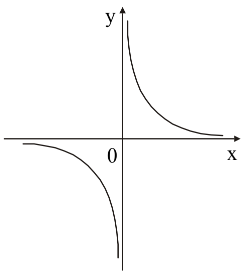
3) $|z - 2| = 4$

4) $z + \overline{z} = 2$

5) $z = -\overline{z}$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

6. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα έτσι ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α.	 	1) $\mathrm{Re}\,(z) < 0,\ \mathrm{Im}\,(z) \le 0$ 2) $\lvert z \rvert \ge 4$ 3) $\lvert \mathrm{Arg}\,(z) - \pi \rvert < \frac{\pi}{4}$ 4) $\mathrm{Re}\,(z^2) = -4$ 5) $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2$ 6) $\lvert z^2 - 1 \rvert = 2$
Β.	 	
Γ.	 	
Δ.	 	

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = - 2i + 2 - yi$ β) $y + 2i = 3 - (2 + i)\, x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$ δ) $(x^2 + 1)\, i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2 i$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

β) Να βρείτε τον z.

3. ** Αν $\theta \in [0, \pi]$ και $z = συν^2\theta + ημθσυνθi$, να βρείτε το θ ώστε $z = 0$.

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)\, x - 3yi - (3i - 2)\, x + (4 - 2yi)$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $α + βi$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $Re\,(z) = 0$ ii) $Im\,(z) = 0$

iii) $Re\,(z) = Im\,(z)$ iv) $z = 0$

5. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\, x + (y - 1)\, i - 5$, $x, y \in R$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή $α + βi$.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x, αν $Im\,(z) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Re\,(z) = Im\,(z)$.

6. ** Να γράψετε στη μορφή $α + βi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i\,(- 5i)$ β) $(2 + i)\,(- i + 3)$ γ) $\frac{3}{4i}$

δ) $\frac{1}{1 - i}$ ε) $\frac{1 - i}{- i + 1}$ ζ) $\frac{(2 + 3i)\,(- i + 1)}{1 - 2i}$

7. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 - i$ και $w = - 3 + 2i$. Να γράψετε στη μορφή α + βi τους παρακάτω μιγαδικούς:

α) $\frac{1}{z}$ β) $\frac{w}{z}$ γ) $\frac{z+1}{i}$

δ) $\frac{1}{z^2}$ ε) $\frac{2i}{w+3}$ ζ) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

8. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z = (1 + i + i^2 + i^3)^{100}$ β) $w = (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)^2$

9. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3 + \sqrt{2}\, i$ και $w = \frac{1}{1-i}$. Να βρείτε:

α) $\text{Re}\,(z)$ β) $\text{Re}\,(w)$ γ) $\text{Im}\,(zw)$

δ) $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right)$ ε) $\text{Im}\left(\frac{z}{w}\right)$

10. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z_1 = \frac{5-2i}{1-2i}$ β) $z_2 = \frac{i-1}{i} - \frac{2}{(1-i)^2}$

11. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει:

$(\alpha + \beta i)^2 = \frac{12+5i}{i}$.

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)\, i$ να είναι συζυγείς.

13. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 5 + 8i$.

α) Να βρείτε τους $\overline{z}$, $-z$ και $\frac{1}{z}$.

β) Να βρείτε το άθροισμα $w = z + \overline{z} - z + \frac{1}{z}$.

14. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in R$, να βρείτε τον z ώστε: $(2 - 3i)\, z + 5 + 9i = 0$.

15. ** Να βρείτε τον $z \in C$ αν $(2 + 3i)\, z - 2 = (1 + 2i) + 2z + i$.

16. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in R$ και ο αριθμός $w = (2i - z)\,(z + 6i)$ είναι πραγματικός, να δείξετε ότι $x = 0$ ή $y = -2$.

17. ** Να βρείτε όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\overline{z} = iz^2$.

18. ** Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = -5 - 12i$.

19. ** Να βρείτε όλους τους ακεραίους $\nu \in N$ για τους οποίους ισχύει $(1 + i)^\nu = (1 - i)^\nu$.

20. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Να δείξετε ότι ισχύει: $Re\,(z_1 \cdot z_2) = Re\,(z_1) \cdot Re\,(z_2)$, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους z_1, z_2 είναι πραγματικός.

21. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \dfrac{z + 8i}{z + 6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Im\,(w) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Re\,(w) = 0$.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. ** Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

23. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

24. ** Βρείτε τον $z = x + yi$, $x, y \in R$, αν $z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0$.

25. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = (3 - 2x) + \dfrac{x}{x-1}i$, $x \in R$, $x \neq 1$.

α) Για ποιες τιμές του x, ο z είναι πραγματικός αριθμός;

β) Για ποιες τιμές του x, ο z είναι φανταστικός αριθμός;

γ) Υπάρχει τιμή του x ώστε $z = 0$;

26. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \dfrac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$

27. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \left(\dfrac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^\nu$

28. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.

29. ** Αν $|z+9| = 3\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.

30. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|\mathrm{Re}(z)| = 3$ και $|\mathrm{Im}(z)| = 4$ ($|\ |$ απόλυτη τιμή). Πού βρίσκονται οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

31. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τα Re (w) και Im (w) του $w = \dfrac{2z - 4}{z - i}$.

β) Αν $w \in R$, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;

γ) Αν w φανταστικός αριθμός, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;

32. ** Αν $z = x + yi$, $y \neq 0$, να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{z}{1 + z^2}$, $1 + z^2 \neq 0$ είναι πραγματικός αν $|z| = 1$.

33. ** Το άθροισμα τριών μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 είναι μηδέν. Να βρείτε το κέντρο βάρους του τριγώνου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών στο επίπεδο.

34. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $2\,|z - 1| = |z - 4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O (0, 0) και ακτίνας 2.

35. ** Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής την οποία ικανοποιούν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, $x, y \in R$, αν ο αριθμός $w = \dfrac{z + 2i}{z + 1}$ είναι πραγματικός.

36. ** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:

$-2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2 \qquad (1)$

$|\mathrm{Im}(z)| \leq 2 \qquad (2)$

$|z| \geq 2 \qquad (3)$

Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.

37. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς:

α) $z_1 = (-1 + i)^3$ β) $z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i}{2} \right)^{12}$

38. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς:

α) $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ β) $z_2 = 2 - 2i$ γ) $z_1 \cdot z_2$ δ) $\dfrac{z_2}{z_1}$

και να υπολογίσετε το $\left(\dfrac{z_2}{z_1} \right)^6$.

39. ** Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - 5i$ και $z_2 = 5 + 2i$.

α) Να παραστήσετε τις εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Να βρείτε τα μέτρα τους.

γ) Να δείξετε ότι $z_2 = z_1 \left(\text{συν}\,\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

δ) Να δείξετε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 τέμνονται κάθετα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις εικόνες των z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων.

40. ** Αν $z_1 = \dfrac{1 + 5i}{3 + 2i}$ και $z_2 = -\sqrt{2}\left(\text{συν}\,\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$, να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί:

α) $z_1 z_2$ β) $\dfrac{z_1}{z_2}$

41. ** α) Αν $\text{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{6}$ και $z = x + yi$ να δείξετε ότι $x = \sqrt{3}\,y$.

β) Να βρείτε τον w αν $|w - 1| = 1$ και $\text{Arg}(w - i) = 0$.

42. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + i$.

α) Να βρείτε το Re (z), Im (z), $|z|$, Arg (z).

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

γ) Αν ν θετικός ακέραιος να βρείτε τον $w = z^{\nu}$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν ώστε ο w να είναι πραγματικός.

ε) Υπάρχει τιμή του ν ώστε ο w να είναι φανταστικός;

43. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1 - i}{1 + i}$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή α + βi.

β) Να βρείτε το Re (z), Im (z), $|z|$, Argz.

γ) Να τον γράψετε στην τριγωνομετρική του μορφή.

δ) Να βρείτε τον $w = z^{19}$.

44. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τον $w = (1 + i)z - 2i$ συναρτήσει των $x, y \in R$.

β) Αν $|w| = 2$, να δείξετε ότι τα σημεία Μ (x, y) ανήκουν σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με την ευθεία $y = x$.

45. ** Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει:

α) $|z - i| = 1$ και $\text{Arg}z = \frac{\pi}{4}$

β) $3 \leq |z + i| \leq 4$

γ) $|z - 1| = |z - 3| = |z - i|$

46. ** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ (x, y) των μιγαδικών $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει:

α) $Arg\,(z) = \frac{\pi}{4}$ β) $Arg\,(z - 1) = \frac{\pi}{3}$ γ) $Arg\,(z - 2i) = \frac{7\pi}{4}$

47. ** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ (x, y) των μιγαδικών $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

α) $Arg\,(z - 2) = \frac{\pi}{4}$ β) $Arg\,(z + 3) = \frac{3\pi}{4}$

48. ** Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $Arg\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{\pi}{4}$.

49. ** Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$Arg\,(z - 1) = \frac{\pi}{4}$ και $|z| = 13$.

50. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον $z = (1 + i)^{2\nu} + (1 - i)^{2\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι $z = 0$, αν ο ν είναι περιττός.

51. ** Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύουν: $Arg\,(z + 1) = \frac{\pi}{6}$ και $Arg\,(z - 1) = \frac{2\pi}{3}$.

Να δείξετε ότι $z = \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{3}\,i)$.

52. ** Να γράψετε στη μορφή $x + yi$ τους μιγαδικούς:

α) $(\sqrt{3} + i)^4 \cdot (1 + \sqrt{3}\,i)^4$ β) $\frac{(2 + 2\sqrt{3}\,i)^3}{(i - 1)^2}$

53. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

α) Να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε το πρωτεύον όρισμά τους.

γ) Να τους γράψετε σε μια σειρά ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο όρισμα.

δ) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

ε) Να βρείτε το μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_5$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3.

54. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i$

$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}\,i$ $\quad z_5 = 3 - 3\sqrt{3}\,i$

α) Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $z = \kappa\,(1 - \sqrt{3}\,i)$, $\kappa \in R$.

β) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3.

55. ** Η εξίσωση $z + \alpha + i\,(z - 4) = 0$, $\alpha \in R$, έχει μια πραγματική λύση.

α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να λύσετε την εξίσωση για την τιμή του α που βρήκατε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

56. ** Να λύσετε στο σύνολο C τις εξισώσεις:

α) $z^4 = 81i$ $\quad$ β) $z^3 + i = 0$ $\quad$ γ) $z^4 = 8 - 8\sqrt{3}\,i$ $\quad$ δ) $z^2 = \sqrt{3} + i$

57. ** Η εξίσωση $z^3 + \alpha z^2 + z + 5 = 0$ με $\alpha \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2 - i$. Να βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

58. ** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.

δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.

59. ** Να δείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της.

60. ** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 - \frac{1}{z} = \bar{z}$ έχει μια μόνο λύση, την $z = 1$.

61. ** α) Να γράψετε τον μιγαδικό $w = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i}$ στη μορφή $α + βi$.

β) Να βρείτε το μέτρο του και το πρωτεύον όρισμά του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i}$. *(Δίνεται συν* $\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$*).*

62. ** Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$, $z \in C$.

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος ΑΒ με άκρα Α (1, 0) και Β (0, 3).

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).

δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

63. ** Δίνεται $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$ και να γράψετε τις ρίζες της σε τριγωνομετρική μορφή.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τις εικόνες των ριζών της $P(z) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**	**15.**	**Λ**	**29.**	**Λ**
2.	**Σ**	**16.**	**Σ**	**30.**	**Σ**
3.	**Σ**	**17.**	**Λ**	**31.**	**Σ**
4.	**Σ**	**18.**	**Σ**	**32.**	**Σ**
5.	**Σ**	**19.**	**Λ**	**33.**	**Σ**
6.	**Λ**	**20.**	**Λ**	**34.**	**Λ**
7.	**Λ**	**21.**	**Σ**	**35.**	**Σ**
8.	**Σ**	**22.**	**Σ**	**36.**	**Σ**
9.	**Σ**	**23.**	**Λ**	**37.**	**Σ**
10.	**Σ**	**24.**	**Λ**	**38.**	**Σ**
11.	**Σ**	**25.**	**Λ**	**39.**	**Λ**
12.	**Λ**	**26.**	**Λ**	**40.**	**Σ**
13.	**Σ**	**27.**	**Σ**	**41.**	**Σ**
14.	**Σ**	**28.**	**Λ**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β	17.	Β	33.	Γ
2.	Γ	18.	Γ	34.	Α
3.	Β	19.	Β	35.	Γ
4.	Β	20.	Β	36.	Ε
5.	Α	21.	Γ	37.	Γ
6.	Γ	22.	Γ	38.	Δ
7.	Δ	23.	Ε	39.	Ε
8.	Δ	24.	Δ	40.	Β
9.	Γ	25.	Δ	41.	Δ
10.	Β	26.	Β	42.	Δ
11.	Β	27.	Γ	43.	Δ
12.	Ε	28.	Δ	44.	Γ
13.	Β	29.	Γ	45.	Γ
14.	Γ	30.	Δ	46.	Δ
15.	Β	31.	Β	47.	Ε
16.	Ε	32.	Δ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Α
2	Θ
3	Ζ
4	Γ

2.

Α	2
Β	3
Γ	1

3.

Α	3
Β	5
Γ	2

4.

Α	5
Β	3
Γ	2

5.

Α	2
Β	3
Γ	1
Δ	4

6.

Α	3
Β	2
Γ	4
Δ	5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x = 4,\ y = -\frac{2}{3}$ **β)** $x = -2,\ y = 7$

γ) $x = 3,\ y = 2$ **δ)** $x = -1$

2. **α)** $x = 2,\ y = \pm 3$ ή $x = -1,\ y = \pm 3$ **β)** $z = 2 - 9i$

3. $\theta = \frac{\pi}{2}$

4. **α)** $z = (4 - x) + (6 + x - 5y)\, i$

β) i) $x = 4$

ii) $x = 5\lambda - 6,\ y = \lambda \in R$

iii) $x = \frac{5\mu - 2}{2},\ y = \mu \in R$

iv) $x = 4,\ y = 2$

5. **α)** $z = (2x - 5) + (x + y - 1)\, i$ **β)** $z = 2x - 5$ **γ)** $y - x + 4 = 0$

6. **α)** 15 **β)** $7 + i$ **γ)** $-\frac{3}{4}\, i$

δ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$ **ε)** 1 **ζ)** $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}\, i$

7. **α)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ i **β)** $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ i **γ)** - 1 - 2i

δ) $\frac{1}{2}$ i **ε)** 1 **ζ)** $-\frac{5}{13} - \frac{1}{13}$ i

8. **α)** 0 **β)** - 24i

9. **α)** 3 **β)** $\frac{1}{2}$ **γ)** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

δ) $3 + \sqrt{2}$ **ε)** $-3 + \sqrt{2}$

10. **α)** $\frac{9}{5} + \frac{8}{5}$ i **β)** 1

11. α = 3, β = - 2 ή α = - 3, β = 2

12. x = 1, y = 5

13. **α)** 5 - 8i, - 5 - 8i, $\frac{5}{89} - \frac{8}{89}$ i **β)** $\frac{450}{89} - \frac{720}{89}$ i

14. $z = \frac{17}{13} - \frac{33}{13}$ i

15. $z = 1 - i$

17. $i, \ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

18. **α)** $2 - 3i, \ -2 + 3i$

19. $\nu = 4\lambda, \ \lambda \in N$

20. $\beta = 0$ ή $\delta = 0$

21. **α)** $w = \frac{x^2 + y^2 + 6x + 8y}{(x+6)^2 + y^2} + \frac{8x + 6y + 48}{(x+6)^2 + y^2} i$

β) $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + 1 = 0$

γ) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

δ) $K(-3, -4), \ R = 5$

ε) Ναι

22. **α)** $2 + i$ **β)** $\alpha = -4, \ \beta = 5$

23. $-1, \ 1 + 2i, \ 1 - 2i$

24. $3 - i, - 3 - i$

25. **α)** $x = 0$ **β)** $x = \frac{3}{2}$ **γ)** αδύνατο

26. **α)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $\sqrt{26}$

27. **α)** $\frac{1}{2}$ **β)** 3^{ν}

28. Αν $z = x + yi$, $x, y \in R$ έχουμε $\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2 + i \Leftrightarrow \dots z = \frac{3}{4} + i$

29. $|z+9| = 3|z+1| \Leftrightarrow |z+9|^2 = 3^2 \, |z+1|^2 \Leftrightarrow (z+9)\left(\overline{z+9}\right) = 9\,(z+1)\left(\overline{z+1}\right) \Leftrightarrow ...$

30. $3 + 4i, - 3 + 4i, 3 - 4i, - 3 - 4i$

κύκλος K (0, 0), R = 5

31. **α)** $\text{Re}\,(w) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y}{x^2 + (y-1)^2}$, $\text{Im}\,(w) = \frac{2x + 4y - 4}{x^2 + (y-1)^2}$

β) ευθεία $x + 2y - 2 = 0$

γ) κύκλος $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

33. Αν $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$ είναι

$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Επειδή $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$

... $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ έχουμε G (0, 0), αρχή των αξόνων

34. $|z| = 2$, άρα K (0, 0), R = 2

35. $w = \overline{w} \ldots \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0$

36. $E = 16 - 4\pi$ τ.μ.

37. **α)** $z_1 = 2^{\frac{3}{2}}$ (συν $\frac{\pi}{4}$ + iημ $\frac{\pi}{4}$) **β)** z_2 = συνπ + iημπ

38. **α)** $z_1 = 2$ (συν $\frac{5\pi}{3}$ + iημ $\frac{5\pi}{3}$) **β)** $z_2 = 2\sqrt{2}$ (συν $\frac{7\pi}{4}$ + iημ $\frac{7\pi}{4}$)

γ) $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}$ (συν $\frac{17\pi}{12}$ + iημ $\frac{17\pi}{12}$)

δ) $\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}$ (συν $\frac{\pi}{12}$ + iημ $\frac{\pi}{12}$), $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6 = 8i$

39. **β)** $|z_1| = |z_2| = \sqrt{29}$ **δ)** άμεση συνέπεια του (γ)

ε) $E = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{2} = \frac{29}{2}$ τ.μ.

40. **α)** $2\,(\text{συν}\,\frac{19\pi}{12} + i\text{ημ}\,\frac{19\pi}{12})$ **β)** $\text{συν}\,\frac{11\pi}{12} + i\text{ημ}\,\frac{11\pi}{12}$

41. **β)** $w = 1 + i$

42. **β)** $2\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6})$ **γ)** $2^{\nu}\,(\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{6})$

δ) $\nu = 6$ **ε)** $\nu = 3, 9, \ldots$

43. **α)** $- i$ **γ)** $\text{συν}\,\frac{3\pi}{2} + i\text{ημ}\,\frac{3\pi}{2}$ **δ)** i

44. **α)** $x - y + (x + y - 2)\,i$ **β)** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **γ)** $(0, 0)$, $(2, 2)$

45. **α)** η εικόνα του $z = 1 + i$ **γ)** η εικόνα του $z = 2 + 2i$

46. **α)** $y = x,\ x > 0$ **β)** $y = \sqrt{3}\,(x - 1),\ x > 1$

γ) $y = - x + 2,\ x > 0$

47. **α)** $y = x - 2, x > 2$ **β)** $y = - x - 3, x < -3$

48. $z = x + yi, (x + 1)^2 + y^2 = 2, x < 0$

49. $z = \dfrac{1+\sqrt{337}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{337}}{2}\, i$

51. $z = x + yi, \quad z + 1 = x + 1 + yi$

$$συν\,\frac{\pi}{6} = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad ημ\,\frac{\pi}{6} = \frac{y}{(x+1)^2+y^2} = \frac{1}{2}, \text{ κ.λπ.}$$

52. **α)** 4^4 **β)** $- 32i$

55. **α)** Αν $x \in R$ λύση της εξίσωσης έχουμε $x + α + i\,(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ και $x = - α \Leftrightarrow α = - 4$

β) $z - 4 + i\,(z - 4) = 0 \Leftrightarrow (z - 4)\,(1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 4$

57. $α = - 3$, λύσεις $- 1, 2 - i, 2 + i$

58. **α)** $P\,(z) = (z - 2i)\,(z + 2i)\,(z - 3)$

δ) 6 τ.μ.

59. Είναι $(1 + i)^4 - 3\cdot(1 + i)^3 + 3\cdot(1 + i)^2 - 2 = ... = 0$. Επειδή η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές θα έχει ρίζα και τον $1 - i$. Θα έχουμε $[z - (1 + i)]\ [z - (1 - i)]\cdot P(z) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 2)\ P(z) = 0$

$P(z) = (z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2) : (z^2 - 2z + 2)$ ... Ρίζες $1 + i$, $1 - i$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

61. α) $\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$ **β)** $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ) $z_\kappa = \sqrt[16]{\frac{1}{2}}\ (\text{συν}\ \frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12}}{8} + i\text{ημ}\ \frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12}}{8})$

62. δ) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3y-4)^2 + y^2} = ... = \sqrt{10y^2 - 24y + 16}$

Το ελάχιστο του $f(y) = 10y^2 - 24y + 16$ είναι στο $y = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$

το $f(\frac{6}{5}) = ... = \frac{8}{5}$, $|z|_{min} = \sqrt{\frac{8}{5}}$

Για $y = \frac{6}{5}$ έχουμε $x - 3\cdot\frac{6}{5} + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

Άρα $z = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$

63. α) $-2, 2i, -2i$ **β)** $x^2 + y^2 = 4$