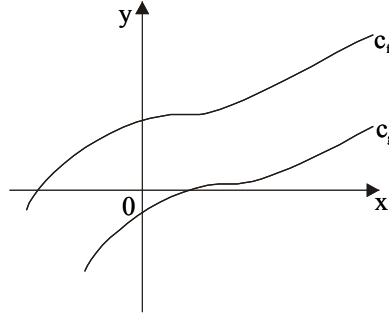


Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»
--

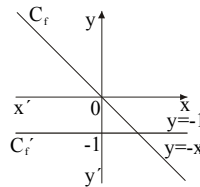
- | | | |
|--|---|---|
| 1. * Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. | Σ | Λ |
| 2. * α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |
| β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . | Σ | Λ |
| γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . | Σ | Λ |
| δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 . | Σ | Λ |
| 3. * Στον τύπο $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ το Δx είναι πάντοτε θετικό. | Σ | Λ |
| 4. * Οι πολωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . | Σ | Λ |
| 5. * Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της συμπίπτουν με τη γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |
| 6. * Αν υπάρχει η $(f + g)'(x_0)$ τότε υπάρχουν και οι $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$. | Σ | Λ |

7. ** Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f . Ισχύει $f'(x) = g'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους.



Σ Λ

8. * Αν ισχύει $f(x) = -x$, οι γραφικές παραστάσεις f και f' είναι αντίστοιχα C_f και C_f' .



Σ Λ

9. * Αν $f'(x) = 3x^2$ τότε πάντα ισχύει $f(x) = x^3$.

Σ Λ

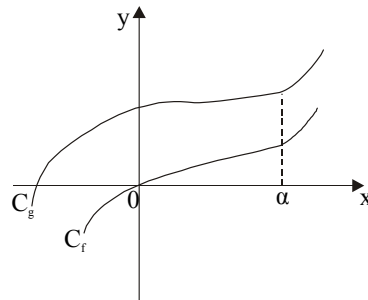
10. * Είναι $(\eta\mu(3x+2))' = (3x+2)'$ συν $(3x+2)$.

Σ Λ

11. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ ή $-\infty$ τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$.

Σ Λ

12. * Αν η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση, τότε οι εφαπτομένες στα σημεία με τετμημένη $x_0 = a$ είναι παράλληλες και ισχύει $f'(a) = 2$, τότε θα είναι και $g'(a) = 2$.

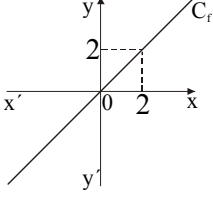
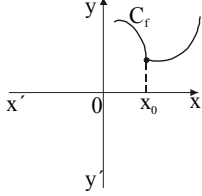


Σ Λ

13. * Το $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = f'(x_0)$, όπου $f(x) = e^x$.

Σ Λ

14. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
15. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ Λ
16. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη την $x = x_0$. Σ Λ
17. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η C_f δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο x_0 . Σ Λ
18. * Η κλίση της $f(x) = x^4$ είναι διαφορετική σε κάθε σημείο της. Σ Λ
19. * Σε κάθε σημείο της $f(x) = x^3$ αντιστοιχεί ένα δεύτερο σημείο με την ίδια κλίση. Σ Λ
20. * Αν συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε η f' είναι άρτια. Σ Λ
21. * Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική n βαθμού, τότε η συνάρτηση f' είναι πολυωνυμική $n - 1$ βαθμού. Σ Λ
22. * Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ για $x = x_1$ είναι παράλληλες. Σ Λ
23. * Αν $y = ax + \beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x . Σ Λ

24. * Η παράγωγος της f στο $x = 2$ είναι ίση με 1.  Σ Λ
25. * Η συνάρτηση f του σχήματος έχει εφαπτομένη στο x_0 .  Σ Λ
26. * Η κλίση της εφαπτομένης της $f(x) = 3x - 2$ στο $x_0 = -1$ είναι ίση με 3. Σ Λ
27. * Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού $s(t)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. Σ Λ
28. * Ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f είναι η δεύτερη παράγωγος της f . Σ Λ
29. * Αν η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 . Σ Λ
30. * Ισχύει $(\log x)' = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$. Σ Λ
31. * Η κλίση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο x_0 είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Σ Λ
32. * Μια συνάρτηση f και η παράγωγός της f' , έχουν πάντοτε το ίδιο πεδίο ορισμού. Σ Λ
33. * Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. Σ Λ
34. * Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε μπορεί να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Σ Λ
35. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Σ Λ

36. * Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σ' ένα σημείο της, δεν μπορεί να έχει μ' αυτήν δεύτερο κοινό σημείο.

Σ Λ

37. * Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο \mathbb{R} ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}$.

Σ Λ

38. * Αν οι συναρτήσεις $f + g$ και f είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Σ Λ

39. * Αν $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$.

Σ Λ

40. * Ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του είναι 4.

Σ Λ

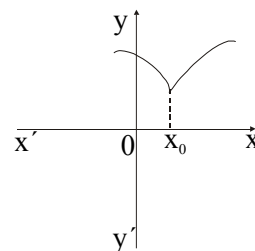
41. * Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ισχύει: $[f(-x)]' = f'(-x)$.

Σ Λ

42. * Για κάθε $x_0 \in D_f$ ισχύει $[f(x_0)]' = 0$.

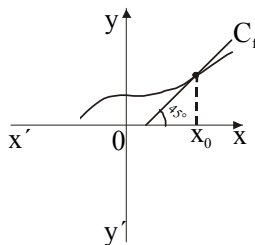
Σ Λ

43. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι συνεχής στο x_0 αλλά όχι παραγωγίσιμη.



Σ Λ

44. * Αν η ευθεία είναι εφαπτόμενη της C_f , τότε ισχύει $f'(x_0) = 1$.



Σ Λ

45. * Av $x_0 \in D_f$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, τότε
 $f'(x_0) = -\alpha$.

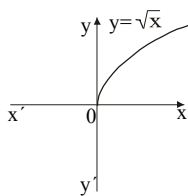
Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

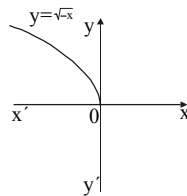
1. * Η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 2$ που ισούται με
- A. 2 B. - 2 Γ. $-\frac{1}{4}$ Δ. 4 E. 0
2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 5$ στο σημείο $A(1, 4)$ είναι
- A. 5 B. - 5 Γ. - 3 Δ. 3 E. 2
3. * Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, τότε ισχύει ότι
- A. η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$ B. $f'(0) = 2$ Γ. $f'(2) = 0$
Δ. η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ E. κανένα από τα παραπάνω
4. * Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 είναι
- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$
Γ. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0}$ Δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{x_0}$
E. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{f(h)}$
5. * Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$. Η $f'(x_0)$, $x_0 > 0$, δίνεται από το όριο
- A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h}$ B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x_0}{h}}{h}$
Γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - h}{h}$ Δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln h}{h}$
E. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x}$

6. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, τότε **δεν** ισχύει ότι
- A. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$
 - B. Η f είναι συνεχής στο x_0
 - Γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$
 - Δ. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ την $x = x_0$
 - E. Υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός

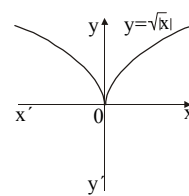
7. * Σε ποιο από τα παρακάτω σχήματα ο άξονας $y'y'$ **δεν** είναι κατακόρυφη εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$;



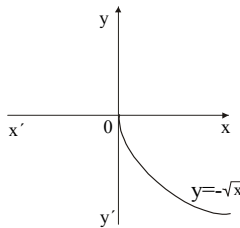
A. (α)



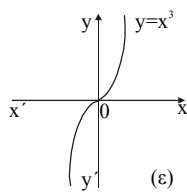
B. (β)



Γ. (γ)



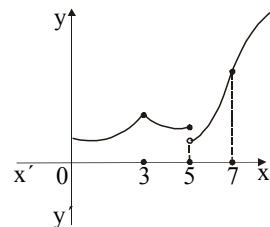
Δ. (δ)



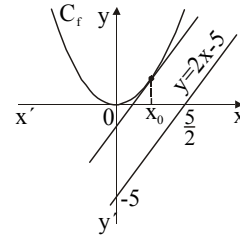
E. (ε)

8. * Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$ είναι
- A. ο άξονας xx'
 - B. ο άξονας yy'
 - Γ. η ευθεία $y = x$
 - Δ. η ευθεία $y = -x$
 - E. η ευθεία $y = 3x$

9. * Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ για κάποιο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι
- Α. η ευθεία με εξίσωση $y = f(x_0)$
 Β. η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$
 Γ. δεν ορίζεται εφαπτομένη στο Α
 Δ. η ευθεία με εξίσωση $y = x$
 Ε. ο άξονας yy'
10. * Μια συνεχής συνάρτηση στο x_0 , δέχεται σαν εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία με εξίσωση $x = x_0$, όταν
- Α. το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι πραγματικός αριθμός
 Β. ένα από τα όρια $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ή και τα δύο είναι $+\infty$ ή $-\infty$
 Γ. είναι παραγωγίσιμη στο x_0
 Δ. ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$
 Ε. ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
11. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f ισούται με
- Α. $f(x_0)$
 Β. x_0
 Γ. $f'(x_0)$
 Δ. $f''(x_0)$
 Ε. οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό
12. * Η 5η παράγωγος της $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ είναι
- Α. -1 Β. 4 Γ. x Δ. 0 Ε. 24
13. * Δίνεται η συνάρτηση του σχήματος. Από τα σημεία 3, 5 και 7 η f έχει παράγωγο
- Α. στο 3 Β. στο 5 Γ. στο 7
 Δ. σε όλα Ε. σε κανένα από αυτά

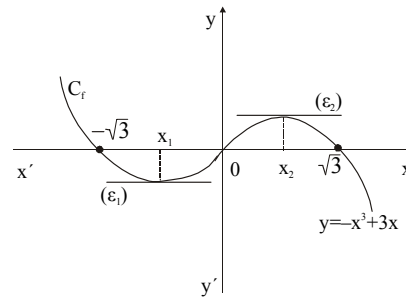


14. * Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και της ευθείας $y = 2x - 5$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο x_0 στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία, είναι



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ Γ. 1 Δ. $\frac{3}{2}$ E. 2

15. * Στο διπλανό σχήμα οι εφαπτομένες (ϵ_1) , (ϵ_2) της C_f είναι παράλληλες στον άξονα x' , τότε τα x_1, x_2 είναι

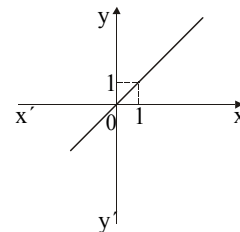


- A. $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{4}$ και $\frac{3}{4}$
 Γ. $-\frac{3}{2}$ και $\frac{3}{2}$ Δ. - 1 και 1
 E. - 2 και 2

16. * Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2$ στο σημείο με τετμημένη x_0 , δέχονται παράλληλες εφαπτομένες. Τότε το x_0 είναι

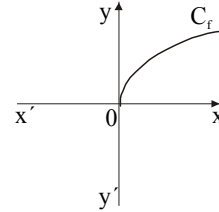
- A. - 1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Γ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ. 1 E. $\frac{1}{2}$

17. * Η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Από τις παρακάτω συναρτήσεις η f είναι



- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$
 Γ. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ Δ. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1$
 E. $f(x) = 2x$

18. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Από τις παρακάτω προτάσεις

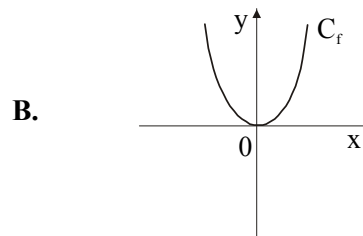
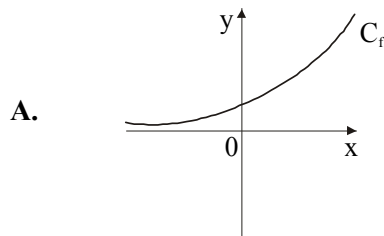


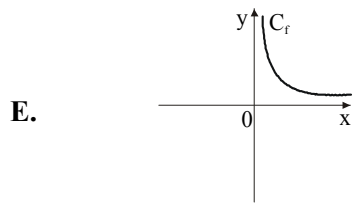
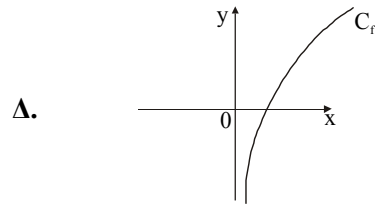
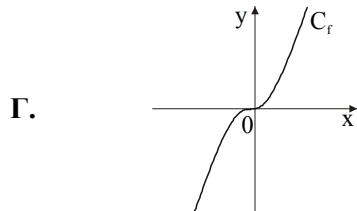
λάθος είναι η

- A. Η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη την $x = 0$
 B. Η f είναι συνεχής στο 0
 Γ. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0
 Δ. Υπάρχει η $f'(0)$
 Ε. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
19. * Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $(0, +\infty)$ ισχύει $g(x) = f(x + \frac{1}{x})$. Η τιμή της $g'(1)$ είναι
- A. $f'(2)$
 B. $2f'(2)$
 Γ. 0
 Δ. $f'(0)$
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

20. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2000}$. Η παράγωγος της f με τάξη 2001, δηλαδή η $f_{(x)}^{(2001)}$, είναι ίση με
- A. 2001
 B. 2000
 Γ. 0
 Δ. 1. 2. 3. ... 2001
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

21. * Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και υπάρχουν σε αυτό x_1, x_2 πραγματικοί αριθμοί ώστε $f'(x_1) = f'(x_2)$. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι





22. * Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x_0) = 2$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα $x'x$ είναι περίπου

A. -64° **B.** $27,3^\circ$ **Γ.** $63,4^\circ$ **Δ.** 89° **Ε.** $106,4^\circ$

23. * Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους \mathbb{R} . Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A(1, 2)$, από τις παρακάτω συνθήκες:

I. $f'(1) = g'(1)$

II. $f(1) = g(1)$

III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$

IV. $f''(1) = g''(1)$

απαραίτητες είναι:

A. μόνο η I

B. μόνο η II

Γ. οι I και II

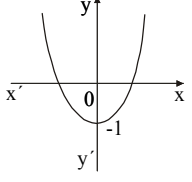
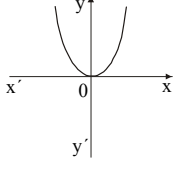
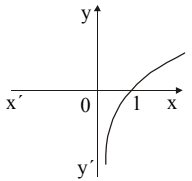
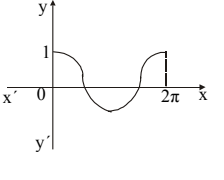
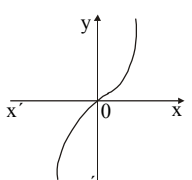
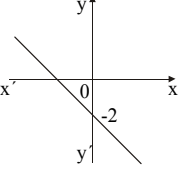
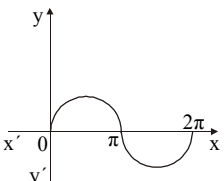
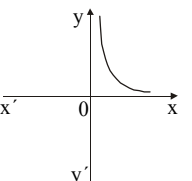
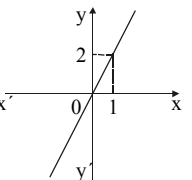
Δ. οι II και IV

Ε. όλες

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Σε κάθε γραφική παράσταση C_f της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε τη γραφική παράσταση $C_{f'}$ από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

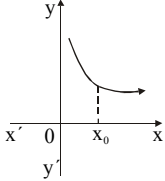
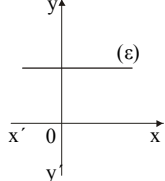
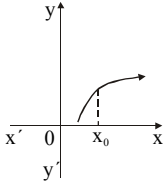
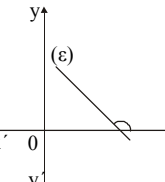
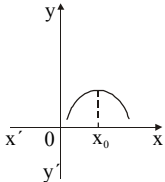
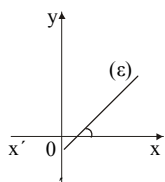
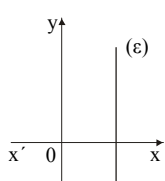
	Στήλη Α: C_f	Στήλη Β: $C_{f'}$
1.		α. 
2.		β. 
3.		γ. 
4.		δ. 
		ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

2. * Σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της (ε) στο x_0 που βρίσκεται στη στήλη Β, καθώς και τη σχέση από τη στήλη Γ η οποία προκύπτει από τη μορφή της εφαπτομένης, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β	Στήλη Γ
1. 	α. 	ρ. $f'(x_0) < 0$
2. 	β. 	q. $f'(x_0) = 0$
3. 	γ. 	r. $f'(x_0) > 0$
	δ. 	s. δεν ορίζεται $f'(x_0)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

3. * Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται συναρτήσεις και ένα σημείο της γραφικής τους παράστασης και στη στήλη Β η κλίση τους στο σημείο αυτό. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = x - 1 $ στο σημείο (2, 0)	α. $\frac{1}{10 \ln 10}$
2. $g(x) = 3x + \kappa$ στο σημείο (-1, $\kappa - 3$)	β. $\ln 2$
3. $h(x) = e^{-x}$ στο σημείο (0, 1)	γ. 1
4. $\varphi(x) = \log x$ στο σημείο (10, 1)	δ. $\frac{10}{\ln 10}$
5. $s(x) = x^e, x > 0$ στο σημείο (e, e^e)	ε. e^e
	στ. 3
	ζ. -1

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

4. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση f της στήλης Α του πίνακα Ι με την παράγωγο της f' στη στήλη Β όπου ορίζεται, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = a^x$	α. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$
2. $f(x) = \eta\mu(vx)$	β. $f'(x) = -vx^{v-1} \eta\mu x^v$
3. $f(x) = \log x $	γ. $f'(x) = \ln x$
4. $f(x) = x^a$	δ. $f'(x) = a^x \ln a$
5. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x^v$	ε. $f'(x) = ax^{a-1}$
6. $f(x) = x \ln x - x$	στ. $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
	ζ. $f'(x) = -vx^{v-1} + \eta\mu x^{v-1}$
	θ. $f'(x) = v \sigma\upsilon\nu(vx)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5	6

5. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι με την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο (0, 0), αν υπάρχει. Η εξίσωση της εφαπτομένης υπάρχει στη στήλη Β. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \sqrt{x}$	α. $y = x$
2. $g(x) = 2x$	β. $y = x + 1$
3. $h(x) = \eta\mu x$	γ. δεν υπάρχει
4. $\varphi(x) = x^3$	δ. $y = 2x$
5. $s(x) = x $	ε. $y = -x$
	στ. $x = 0$
	ζ. $y = 0$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

6. * Η στήλη A περιέχει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και τις εφαπτομένες τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Σε κάθε σχήμα της στήλης A του πίνακα I να αντιστοιχίσετε τη σχέση της στήλης B, η οποία ερμηνεύει αλγεβρικά στο συγκεκριμένο σχήμα, τη θέση της εφαπτομένης, συμπληρώνοντας τον πίνακα II.

Πίνακας I

Στήλη A	Στήλη B
<p>1.</p>	<p>α. $f'(1) = 0$</p> <p>β. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$</p>
<p>2.</p>	<p>γ. $f'(1) > 0$</p> <p>δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$</p>
<p>3.</p>	<p>ε. $f'(1) < 0$</p> <p>ζ. $f'(1) > f'(0)$</p>
<p>4.</p>	

Πίνακας II

1	2	3	4

7. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση f της στήλης Α του πίνακα Ι με την παράγωγό της f' στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \eta\mu^2x$	α. $f'(x) = -\eta\mu 2x$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2x$	β. $f'(x) = -2\eta\mu 2x$
3. $f(x) = \eta\mu 2x$	γ. $f'(x) = \eta\mu 2x$
4. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$	δ. $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu 2x$
	ε. $f'(x) = 2\eta\mu x$
	στ. $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε σύμβολο της στήλης Α του πίνακα Ι με το σύμβολο της στήλης Β, το οποίο έχει την ίδια σημασία, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{d(f \cdot g)}{dx}$	α. $f''(x)$ β. $[f'(x)]^2$
2. $\frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}$	γ. $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ δ. $2f'(x) \cdot f(x)$
3. $\left(\frac{df}{dx}\right)^2$	ε. $f'(x) \cdot g'(x)$ στ. $f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g(x)$
4. $\frac{d^2f}{dx^2}$	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

9. * Σε κάθε γραφική παράσταση C_f συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε τη γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

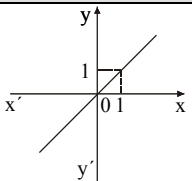
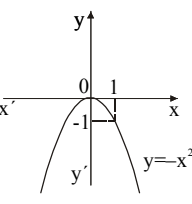
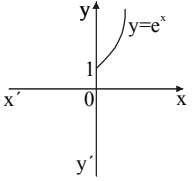
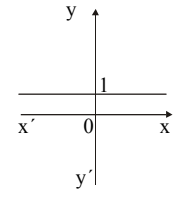
	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		<p>α.</p>
2.		<p>β.</p>
		<p>γ.</p>

Πίνακας ΙΙ

1	2

10. * Σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι, να αντιστοιχίσετε την τιμή της παραγώγου στο $x = 2$ της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

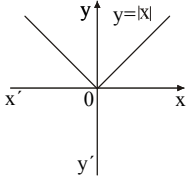
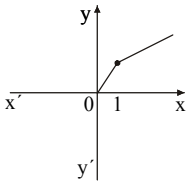
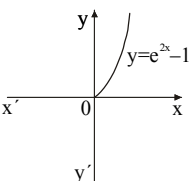
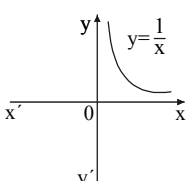
Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p> 	<p>α. $f'(2) = -4$</p> <p>β. $f'(2) = 0$</p>
<p>2.</p> 	<p>γ. $f'(2) = 1$</p> <p>δ. $f'(2) = 2$</p>
<p>3.</p> 	<p>ε. $f'(2) = e^{\ln 2}$</p>
<p>4.</p> 	<p>στ. $f'(2) = e^2$</p>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τα κενά στη στήλη Β του παρακάτω πίνακα.

Στήλη Α	Στήλη Β
<i>Γραφική παράσταση συνάρτησης f</i>	<i>Παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = 1$</i>
<p>1.</p>  <p>The graph shows a V-shaped function $y = x$ on a Cartesian coordinate system. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The origin is marked '0'. The function consists of two rays meeting at the origin, one in the first quadrant and one in the second quadrant.</p>	<p>1. $f'(1)$</p>
<p>2.</p>  <p>The graph shows a piecewise linear function on a Cartesian coordinate system. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The origin is marked '0'. The function is linear from the origin to the point (1, 1), where it has a sharp corner. From (1, 1), the function continues as a straight line with a shallower slope.</p>	<p>2. $f'(1)$</p>
<p>3.</p>  <p>The graph shows the function $y = e^{2x} - 1$ on a Cartesian coordinate system. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The origin is marked '0'. The curve passes through the origin (0, 0) and increases exponentially as x increases.</p>	<p>3. $f'(1)$</p>
<p>4.</p>  <p>The graph shows the function $y = \frac{1}{x}$ on a Cartesian coordinate system. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The origin is marked '0'. The curve is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the third quadrant, approaching the x-axis and y-axis as asymptotes.</p>	<p>4. $f'(1)$</p>

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να διατάξετε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

α) $f(x) = x^3$

β) $g(x) = x^2$

γ) $h(x) = \frac{1}{2}x$

δ) $\varphi(x) = 5$

ε) $\sigma(x) = \ln x$

2. * Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων, στα αντίστοιχα σημεία τους.

α) $f(x) = -5x + 4$ στο σημείο $(1, -1)$

β) $g(x) = 2^x$ στο σημείο $(0, 1)$

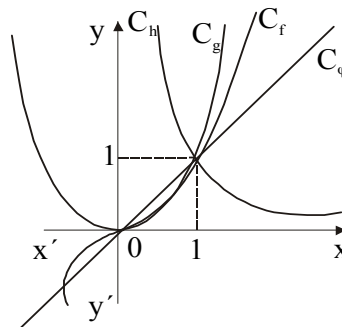
γ) $h(x) = \sqrt{-x}$ στο σημείο $(-4, 2)$

δ) $\varphi(x) = \sin^2 2x$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$

ε) $\sigma(x) = \log_2 x$ στο σημείο $(1, 0)$

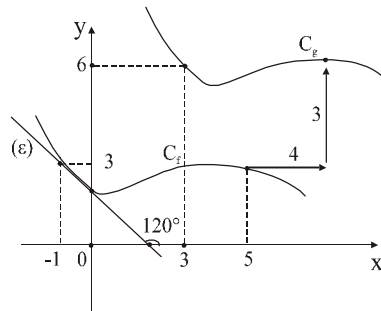
3. * Τέσσερα κινητά κινούνται στον ίδιο άξονα και οι θέσεις τους σε κάθε χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους $s_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $s_2(t) = 3\eta\mu \frac{\pi t}{2}$, $s_3(t) = 2t^3 - t^2$, $s_4(t) = t \ln t$. Να διατάξετε τις ταχύτητες των κινητών από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τη χρονική στιγμή $t = 2$.

4. * Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων f, g, h και φ . Να διατάξετε τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$, κατά αύξουσα σειρά.



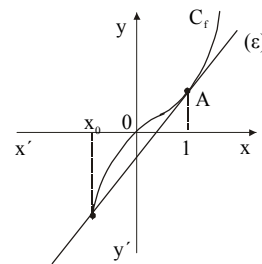
Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g .



- α) Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις συναρτήσεις f και g .
- β) Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
- γ) Να βρείτε την $g'(4)$.

2. ** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(1, 1)$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αν x_0 είναι το σημείο τομής των C_f και (ε) :

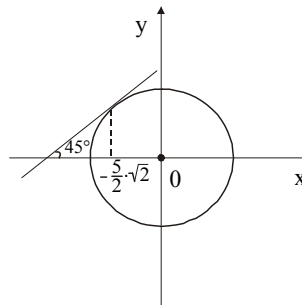


- α) να βρείτε το σημείο x_0 .
- β) να αποδείξετε ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 είναι τετραπλάσια της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στο A .

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της $C_f(x_0, f(x_0))$ στον άξονα x' είναι το σημείο της που έχει παράλληλη εφαπτομένη στον άξονα x' .
- β) Να βρείτε το x_0 και την ελάχιστη απόσταση.

4. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



5. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^2 + bx$. Να βρείτε τα a και b ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $(3, -9)$ και να έχει στο σημείο αυτό εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $(0, 1)$. Να παραστήσετε γραφικά την C_f και την (ε).

β) Με χρήση του ερωτήματος (α), να βρείτε μια προσέγγιση του αποτελέσματος $e^{-0,0135}$. Να συγκρίνετε την προσέγγιση που βρήκατε με το αποτέλεσμα που δίνει ένας υπολογιστής τσέπης.

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για μια εισαγωγή στην έννοια του διαφορικού.

7. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$.

α) Να εξετάσετε αν οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα με $x_0 = 1$, είναι κάθετες.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το ίδιο για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

8. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln x$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία στα οποία οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνουν τους άξονες, είναι κοινή τους εφαπτομένη.

9. ** Να βρεθούν οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες φέρονται από το σημείο $A(0, 1)$.
10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ποια γωνία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$;
11. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη, αφού αποδείξετε ότι $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
12. ** Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(8, 5)$.
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες.
13. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2e} x^2$ και $g(x) = \ln x$, με $x > 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = g'(x_0)$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x_0) = g(x_0)$.
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους στο σημείο αυτό.

14. ** Αν f_1, f_2, f_3, f_4 είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}$,

να αποδείξετε ότι $f'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$.

15. ** Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ προσθετέοι}}, \text{ άρα } (x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ φορές}} \right)', \text{ δηλαδή}$$

$$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \dots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}, \text{ άρα } 4x^3 = 3x^3, \text{ επομένως } 4 = 3 \quad !!!$$

16. ** Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 3x^2 \ln x \quad \beta) g(x) = \sin \sqrt{x-2} \quad \gamma) h(t) = \frac{e^{-3t}}{2t}$$

17. ** Ο όγκος ενός κύβου αυξάνει με ρυθμό $1,5 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της επιφάνειάς του όταν ο όγκος είναι 27 cm^3 .

$$\Deltaίνονται \quad \text{Όγκος κύβου πλευράς } a: V = a^3$$

$$\text{Εμβαδόν επιφάνειας κύβου πλευράς } a: E = 6a^2$$

18. ** Ένα σημείο κινείται σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t καθορίζεται από τη συνάρτηση $s(t) = 3t^2 - t - 1$. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$

β) την επιτάχυνσή του κατά τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ sec}$

γ) πότε η ταχύτητα είναι 0.

19. ** Η θέση ενός κινητού που κινείται σε άξονα δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = \ln(t+1)$, $t \geq 0$ (ο χρόνος μετράται σε sec).

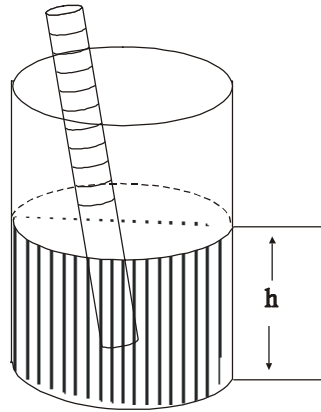
α) Δείξτε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού τη χρονική στιγμή $t_0 = 3$.

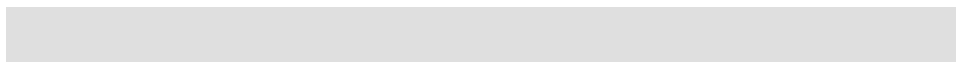
20. ** Έχει παρατηρηθεί ότι πίνοντας ένα αναψυκτικό με καλαμάκι, μια αναρρόφηση διαρκεί περίπου 1 sec και η ποσότητα του αναψυκτικού που καταναλώνεται κατά την αναρρόφηση είναι ίση με την ποσότητα που χωρά στο καλαμάκι. Το ποτήρι έχει διάμετρο 4 cm και το καλαμάκι έχει διάμετρο 0,4 cm και ύψος 25 cm.

Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του αναψυκτικού στο ποτήρι σε κάθε αναρρόφηση.

Δίνεται ο όγκος κυλίνδρου ύψους h και ακτίνας βάσης r : $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.



**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**





Κεφάλαιο 3ο: **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ** 1ο ΜΕΡΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2. α)	Σ
β)	Λ
γ)	Σ
δ)	Λ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Λ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Σ
13.	Σ

14.	Σ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ
18.	Σ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Σ
23.	Λ
24.	Σ
25.	Λ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Λ

30.	Λ
31.	Σ
32.	Λ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Σ
36.	Λ
37.	Λ
38.	Σ
39.	Λ
40.	Σ
41.	Λ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Σ
45.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Γ
2.	Γ
3.	Β
4.	Α
5.	Α
6.	Δ
7.	Ε
8.	Α

9.	Α
10.	Β
11.	Γ
12.	Δ
13.	Γ
14.	Γ
15.	Δ

16.	Γ
17.	Β
18.	Δ
19.	Γ
20.	Γ
21.	Γ
22.	Γ
23.	Γ

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

7. Στην ερώτηση έχουμε δώσει και τους τύπους των γραφικών παραστάσεων. Αυτό δεν σημαίνει ότι ο μαθητής για απαντήσει πρέπει να πάρει τον ορισμό της κατακόρυφης εφαπτομένης για καθεμιά συνάρτηση. Πρέπει να καταλάβει ότι εφαπτόμενη μιας καμπύλης «έρχεται» από τη «ράχη» της γραφικής παράστασης. Η μόνη που δεν είναι έτσι είναι η Ε.
17. Από τα δεδομένα του σχήματος συμπεραίνουμε ότι η $f'(x) = x$ (αφού είναι ευθεία $y = ax$ και διέρχεται από το $(1, 1)$). Παραγωγίζοντας τις δοσμένες συναρτήσεις βλέπουμε ότι $f'(x) = x$, δίνει μόνο η Β, η οποία είναι και η σωστή.
21. Η υπόθεση $f'(x_1) = f'(x_2)$ σημαίνει ότι υπάρχουν δυο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , ώστε στα σημεία αυτά να μπορούν να αχθούν παράλληλες εφαπτομένες. Αναζητούμε λοιπόν σε ποιο σχήμα υπάρχει τέτοια δυνατότητα. Είναι προφανές ότι είναι μόνο το σχήμα Γ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	ε
2	δ
3	α
4	β

2.

1	β	p
2	γ	r
3	α	q

3.

1	γ
2	στ
3	ζ
4	α
5	ε

4.

1	δ
2	θ
3	α
4	ε
5	β
6	γ

5.

1	στ
2	δ
3	α
4	ζ
5	γ

6.

1	γ
2	ε
3	α
4	δ

7.

1	γ
2	α
3	στ
4	β

8.

1	γ
2	ε
3	β
4	α

9.

1	β
2	γ

10.

1	γ
2	α
3	στ
4	β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\varphi'(1) < h'(1) < \sigma'(1) < g'(1) < f'(1)$
2. $f'(1) < h'(4) < \varphi'(\frac{\pi}{2}) < \sigma'(1) < g'(0)$
3. $v_2 < v_1 < v_4 < v_3$
4. $\lambda_h < \lambda_\varphi < \lambda_f < \lambda_g$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $g(x) = f(x-4) + 3$ **β)** $g'(x) = f'(x-4)$
γ) $g'(4) = \varepsilon\varphi 120^\circ$

2. **α)** $x_0 = -2$ **β)** $f'(-2) = 4f'(1)$

3. $f'(x) = \frac{(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

	$-\infty$	4	$+\infty$
f'	-	0	+
f			
		↙ ↘	
		min	
		(4,1)	

4. Το άνω ημικύκλιο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \text{ όπου } \rho \text{ η ζητούμενη ακτίνα και } -\rho \leq x \leq \rho.$$

$$\text{Ισχύει } f' \left(-\frac{5}{2} \sqrt{2} \right) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1 \text{ με } f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{\rho^2 - x^2}}, \text{ άρα } \rho = 5.$$

$$\text{Άρα η εξίσωση του κύκλου θα είναι: } x^2 + y^2 = 25.$$

5. Πρέπει $f(3) = -9$ και $f'(3) = 0$, άρα $\alpha = 1$, $\beta = -6$

6. α) $y = x + 1$

$$\beta) e^{-0,0135} \approx 1 - 0,0135 = 0,9865 \text{ (ο υπολογιστής τσέπης δίνει 0,98659)}$$

7. α) $f'(1) \cdot g'(1) = -1$

β) ισχύει

8. $y = -x + 1$ και $f'(0) = g'(1) = -1$

9. Αν $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} (x - x_0) \text{ και επειδή διέρχεται από το σημείο } (0, 1) \text{ έχουμε } 1$$

$$- \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} (-x_0), \text{ άρα } 1 - \sqrt{x_0} = -\frac{1}{2} \sqrt{x_0}, \text{ δηλαδή } \frac{1}{2} \sqrt{x_0} = 1,$$

$$\text{δηλαδή } x_0 = 4, \text{ οπότε η εφαπτομένη είναι } y = \frac{1}{4} x + 1. \text{ Επίσης έχει και την}$$

$$x = 0$$

10. Στο σημείο $x_0 = 1$ έχουμε $f'(1) = 1$, άρα $\epsilon\phi\omega = 1$, άρα $\omega = 45^\circ$

11. Ισχύει $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} > x + |x| \geq 0$

$f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη

12. α) $y - 5 = \frac{1}{3}(x - 8)$

β) Τέμνει τον x 'ς στο σημείο $(-7, 0)$ και τον y 'ς στο σημείο $(0, \frac{7}{3})$

13. α) $x_0 = \sqrt{e}$

γ) $y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$

14. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα και παραγωγίζουμε

15. Το x^4 δεν μπορεί να γραφεί $x^3 + x^3 + \dots + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

17. $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$

18. α) $s'(2) = 11$ β) $s''(4) = 6$ γ) $t = \frac{1}{6}$

19. α) $v(t) = \frac{1}{t+1}$ φθίνουσα συνάρτηση του t

β) $v(3) = \frac{1}{4}$ $|v'(3)| = \frac{1}{16}$

20. Το καλάμακι χωρά $\pi (0,2)^2 \cdot 25 \text{ cm}^3 \approx 3,14 \text{ cm}^3$, άρα $\frac{dV}{dt} = -3,14 \text{ cm}^3/\text{sec}$ (ο ρυθμός ελάττωσης του όγκου).

Ο όγκος του αναψυκτικού: $V = \pi \cdot 2^2 \cdot h = 4\pi h$ και ισχύει $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$, άρα

$-3,14 = 4\pi \frac{dh}{dt}$, άρα $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4} \text{ cm/sec}$.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

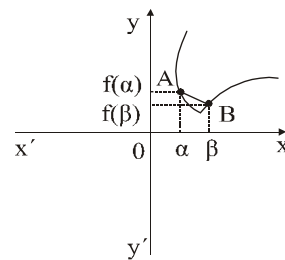
1. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό στο διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f , είναι παράλληλη στον άξονα x' .

Σ Λ

2. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (a, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(\beta, f(\beta))$.

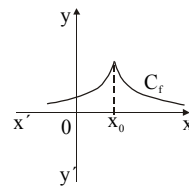
Σ Λ

3. * Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (a, \beta)$, όπου η εφαπτομένη της f να είναι παράλληλη προς την AB .



Σ Λ

4. * Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x_0]$.



Σ Λ

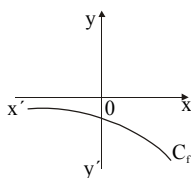
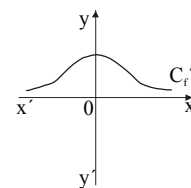
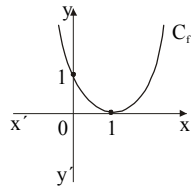
5. * Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle, χωρίς να ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος.

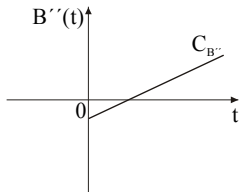
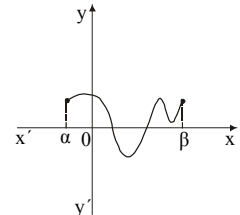
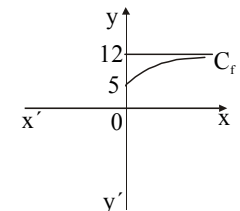
Σ Λ

6. * Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει x_0 , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x' .

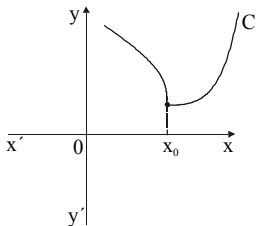
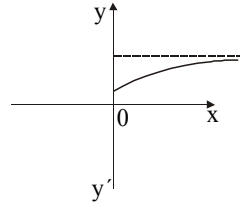
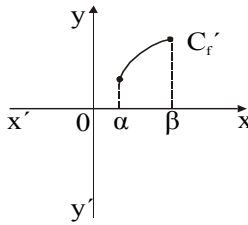
Σ Λ

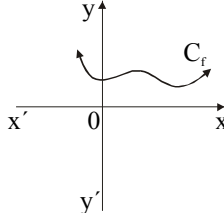
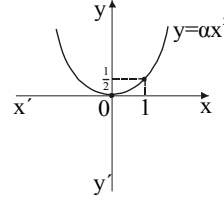
7. * Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[α, β]$, τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα μέσης τιμής στο ίδιο διάστημα. Σ Λ
8. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$, τότε κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία του διαστήματος $(α, β)$ στα οποία η f' μηδενίζεται και τα σημεία του διαστήματος $(α, β)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. Σ Λ
9. * Αν $f'(x) = (x - 1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f . Σ Λ
10. * Αν $f'(x) = |x - 1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f . Σ Λ
11. * Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Σ Λ
12. * Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο \mathbb{R} . Σ Λ
13. * Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$. Σ Λ
14. * Αν η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο το $x_0 = 1$. Σ Λ
15. * Αν η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο \mathbb{R} . Σ Λ
16. * Αν η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο \mathbb{R} . Σ Λ

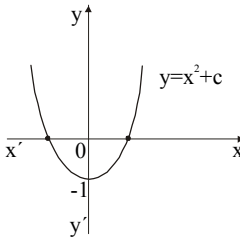


17. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) f(\beta) < 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α, β) . Σ Λ
18. * Αν $f'(x) = (x + 3)x^2$, τότε το $x_0 = -3$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου. Σ Λ
19. * Για τη συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$ υπάρχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. Σ Λ
20. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο. Σ Λ
21. * Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(3) = 5$, τότε μπορεί να ισχύει $f(5) = 4$. Σ Λ
22. * Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $B''(t)$ όπου $B(t)$ είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t . Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνεται. Σ Λ
- 
23. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' μια συνάρτησης f . Τότε η f έχει τουλάχιστον δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων. Σ Λ
- 
24. * Αν $f'(x) = e^{-x^2+16}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα. Σ Λ
25. * Η συνάρτηση του σχήματος έχει θετική πρώτη παράγωγο για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Σ Λ
- 

26. * Αν οι συναρτήσεις f, g παρουσιάζουν στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε και η συνάρτηση $f + g$ θα παρουσιάζει κι αυτή στο x_0 τοπικό ελάχιστο. Σ Λ
27. * Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε και στο $-x_0$ θα έχει τοπικό ελάχιστο. Σ Λ
28. * Αν η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι αυτή του σχήματος, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Σ Λ
-
29. * Υπάρχουν συναρτήσεις ορισμένες στο \mathbb{R} οι οποίες έχουν άπειρα τοπικά ακρότατα. Σ Λ
30. * Αν η f' έχει μία μόνο ρίζα, τότε η f θα έχει το πολύ δύο ρίζες. Σ Λ
31. ** Αν η f' έχει μόνο δύο ρίζες, τότε η f έχει δύο ακριβώς τοπικά ακρότατα. Σ Λ
32. * Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 3$ με $x \in \mathbb{R}$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία. Σ Λ
33. * Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f , είναι πάντοτε μικρότερο από κάθε τοπικό μέγιστο της ίδιας συνάρτησης. Σ Λ
34. * Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης f (εφόσον υπάρχουν), είναι πάντοτε και ελάχιστο της f . Σ Λ
35. * Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ , με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, δεν παρουσιάζει ακρότατα στο Δ . Σ Λ
36. * Μια συνεχής και σταθερή συνάρτηση στο $[a, \beta]$ παρουσιάζει ακρότατο σε κάθε σημείο του διαστήματος $[a, \beta]$. Σ Λ
37. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta = (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ . Σ Λ

38. * Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , και διαφέρουν κατά μία σταθερά, τότε έχουν ίσες παραγώγους. Σ Λ
39. ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, έχει μία μόνο ρίζα στο (α, β) . Σ Λ
40. * Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε το x_0 είναι σημείο καμπής της f . Σ Λ
- 
- The graph shows a coordinate system with x and y axes. The origin is labeled 0. A curve labeled C_f is shown. It starts in the upper left quadrant, passes through the y-axis, and then curves downwards to a point x_0 on the x-axis. At x_0 , the curve changes its concavity from concave down to concave up. A vertical dashed line connects x_0 on the x-axis to the curve.
41. * Αν $f''(x) = (x - 2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$. Σ Λ
42. * Αν η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε πάντοτε θα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0 . Σ Λ
43. * Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Τότε θα ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Σ Λ
- 
- The graph shows a coordinate system with x and y axes. The origin is labeled 0. A curve is shown starting from the y-axis and increasing as it moves to the right. The curve is concave down, meaning its slope is decreasing as x increases. A horizontal dashed line is drawn above the curve.
44. * Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Σ Λ
- 
- The graph shows a coordinate system with x and y axes. The origin is labeled 0. A curve labeled $C_{f'}$ is shown. It starts at a point α on the x-axis and increases to a point β on the x-axis. The curve is concave down in the interval (α, β) . Vertical dashed lines connect α and β on the x-axis to the curve.
45. * Μια πολωνομική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. Σ Λ

46. * Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής. Σ Λ
47. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, παρουσιάζει δύο σημεία καμπής. Σ Λ
- 
48. * Μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , αν η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση. Σ Λ
49. * Για να είναι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , αρκεί η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 . Σ Λ
50. * Αν $f(x) = 2x$, τότε η μόνη συνάρτηση που έχει την f παράγωγο είναι η $g(x) = x^2$. Σ Λ
51. * Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ και ισχύει $f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε στα σημεία των C_f και C_g με την ίδια τετμημένη, οι εφαπτομένες είναι παράλληλες. Σ Λ
52. * Η συνάρτηση $y = x^6 + 3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + y = 0$. Σ Λ
53. * Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι μία λύση της εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = x$. Σ Λ
- 
54. * Μία λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ είναι η συνάρτηση $y = 3$. Σ Λ

55. * Η παράγουσα του γινομένου δυο συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού, είναι ίση με το γινόμενο των παραγουσών αυτών. Σ Λ
56. * Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f''(x) = g''(x), x \in [\alpha, \beta]$, τότε $g'(x) = f'(x) + c, x \in [\alpha, \beta]$. Σ Λ
57. * Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f''(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f'(x)$ είναι μια παράγουσα της $g(x)$. Σ Λ
58. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα, αντιπροσωπεύει μία λύση της εξίσωσης $y' = 2x$. Σ Λ
- 
59. * Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2$ είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών με συντελεστή διεύθυνσης 2. Σ Λ
60. * Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y' = 2x$. Αν $y = f(x)$ είναι μια λύση της, τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $(-1, f(-1))$ έχει κλίση 2. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός αριθμού $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

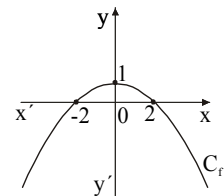
A. $e^{\alpha-\beta} = e^{\kappa} (\alpha - \beta)$ **B.** $e^{\alpha} - e^{\beta} = \kappa (\alpha - \beta)$
Γ. $e^{\alpha} - e^{\beta} = e^{\kappa} (\alpha - \beta)$ **Δ.** $e^{\alpha} - e^{\beta} = e^{\kappa} (\beta - \alpha)$
E. $e^{\alpha} - e^{\beta} = \frac{1}{\kappa} (\alpha - \beta)$

2. * Αν για τις παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(x) = g'(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

A. $f(x) = g(2x) + c$ **B.** $f(x) = 2g(2x) + c$
Γ. $f(x) = g(2x) + 2c$ **Δ.** $f(x) = \frac{1}{2} g(2x) + c$
E. $f(x) = g(x) + 2c$

3. * Το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε είναι **λάθος** ότι

- A.** Το σημείο $(-2, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
B. Το σημείο $(2, 0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

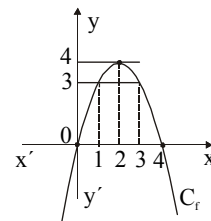


- Γ.** Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 2]$
Δ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$
E. Το σημείο $(0, 1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

4. * Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει λύση

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **Γ.** $x = 2$
Δ. $x = 3$ **E.** $x = 4$



β) Η ανίσωση $f'(x) \leq 0$ έχει λύση το διάστημα

- A.** $(-\infty, 2]$ **B.** $[2, +\infty)$ **Γ.** $[0, 4]$ **Δ.** $(-\infty, 0]$ **Ε.** $[4, +\infty)$

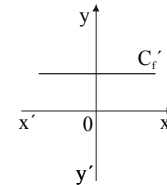
γ) Η ανίσωση $f'(x) \geq 0$ έχει λύση το διάστημα

- A.** $(-\infty, 2]$ **B.** $[2, +\infty)$ **Γ.** $[0, 4]$ **Δ.** $(-\infty, 0]$ **Ε.** $[4, +\infty)$

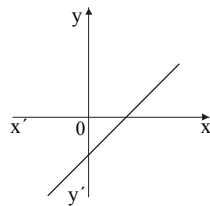
5. * Αν $f(x) = x^5 + 2004x + 2000$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

- A.** καμία ρίζα στο \mathbb{R} **B.** μία το πολύ ρίζα στο \mathbb{R}
Γ. μία μόνο ρίζα στο \mathbb{R} **Δ.** δύο τουλάχιστον ρίζες στο \mathbb{R}
Ε. τρεις τουλάχιστον ρίζες στο \mathbb{R}

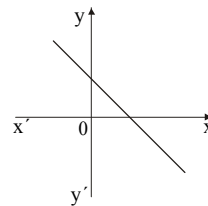
6. * Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



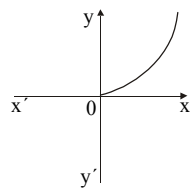
A.



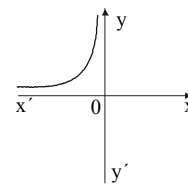
B.



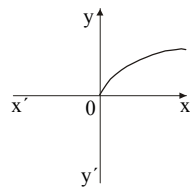
Γ.



Δ.



Ε.



7. * Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση την C_f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ισχύει

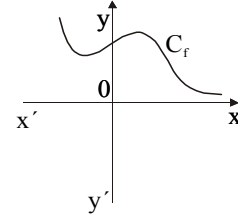
A. $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B. η $f'(x)$ έχει δύο ρίζες

Γ. η $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

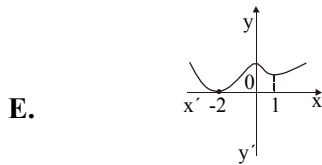
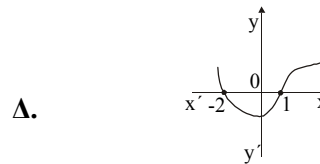
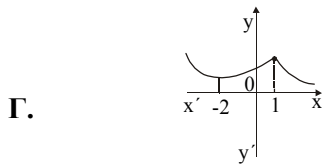
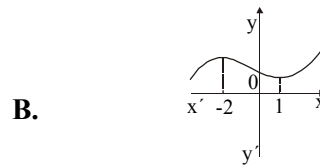
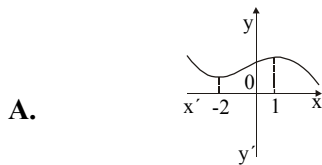
Ε. δεν είναι δυνατόν να προκύψει κάποιο συμπέρασμα για την f' .



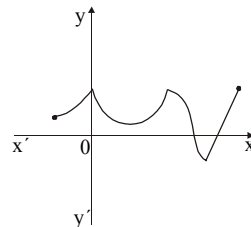
8. * Για την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f ο πίνακας τιμών της f' είναι

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι η



9. * Η παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, \beta]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$. Τότε
- A. η f έχει δύο ακρότατα B. η f δεν έχει ακρότατα
 Γ. η f έχει ολικό μέγιστο Δ. η f έχει ολικό ελάχιστο
 E. η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο
10. * Μια συνάρτηση συνεχής και γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} θα έχει
- A. καμία ρίζα B. μία το πολύ ρίζα
 Γ. ακριβώς μία ρίζα Δ. δύο τουλάχιστον ρίζες
 E. κανένα από τα παραπάνω
11. * Μια συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} και η οποία έχει ετερόσημα τοπικά ακρότατα, θα έχει
- A. καμία ρίζα B. μία το πολύ ρίζα Γ. μία τουλάχιστον ρίζα
 Δ. το πολύ τρεις ρίζες E. δύο τουλάχιστον ρίζες
12. * Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε οι θέσεις των πιθανών ακροτάτων είναι
- A. μόνο οι ρίζες της f'
 B. μόνο τα σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται
 Γ. μόνο τα άκρα του πεδίου ορισμού της
 Δ. μόνο οι ρίζες της f' και τα άκρα
 E. οι ρίζες της f' , τα σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται και τα άκρα του πεδίου ορισμού της.
13. * Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, έχει πλήθος τοπικών ακροτάτων
- A. 2 B. 3 Γ. 4
 Δ. 5 E. 6



14. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $f'(x_0) = 0$, τότε
- A. η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0
 - B. η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
 - Γ. η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0
 - Δ. η f δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο x_0
 - E. η f πιθανόν να παρουσιάζει ακρότατο στο x_0
15. * Έστω μια συνάρτηση f , η οποία παρουσιάζει τοπικά και ολικά ακρότατα, τότε
- A. κάθε τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο
 - B. δεν υπάρχει τοπικό ελάχιστο που να είναι μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο
 - Γ. το μέγιστο είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο
 - Δ. το ελάχιστο είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο
 - E. το μέγιστο είναι μικρότερο από κάθε τοπικό ελάχιστο
16. * Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$. Τότε η f παρουσιάζει
- A. σημείο καμπής στο x_0
 - B. ελάχιστο στο x_0
 - Γ. μέγιστο στο x_0
 - Δ. τοπικό ακρότατο στο x_0
 - E. η f δεν αλλάζει μονοτονία στο x_0
17. * Έστω μια συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$. Τότε
- A. το x_0 είναι ρίζα της f'
 - B. το x_0 είναι ρίζα της f' και όχι ρίζα της f''
 - Γ. το x_0 είναι ρίζα της f''
 - Δ. στο A η C_f δεν δέχεται εφαπτομένη
 - E. στο A η C_f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη
18. * Δεν υπάρχουν σημεία καμπής για τη συνάρτηση
- A. $f(x) = \sin x$
 - B. $g(x) = \eta\mu x$
 - Γ. $h(x) = x^3 + 2x^2$
 - Δ. $\varphi(x) = x^2 + 1$
 - E. $\tau(x) = x^7$

19. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ έχει

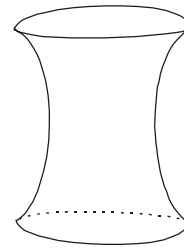
- Α. δύο σημεία καμπής
Β. ένα σημείο καμπής
Γ. κανένα σημείο καμπής
Δ. τρία σημεία καμπής
Ε. περισσότερα από τρία σημεία καμπής

20. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 1$. Τότε η παράγουσα F αυτής με $F(0) = 0$ είναι η συνάρτηση

- Α. $F(x) = \ln(1-x)$
Β. $F(x) = e^x + 2x$
Γ. $F(x) = -e^x + x + 1$
Δ. $F(x) = e^x + x - 1$
Ε. $F(x) = -e^{-x}$

21. * Δίνεται η συνάρτηση $h(t)$ του ύψους του νερού στο δοχείο του διπλανού σχήματος τη χρονική στιγμή t . Αν γεμίζουμε το δοχείο με σταθερή ποσότητα νερού ανά χρονική μονάδα, τότε ισχύει

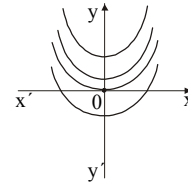
- Α. η h είναι φθίνουσα
Β. η h είναι σταθερή
Γ. η h έχει ένα σημείο καμπής
Δ. η h έχει δύο σημεία καμπής
Ε. η h δεν έχει σημείο καμπής



22. * Μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, $x > 0$ είναι η συνάρτηση

- Α. $F_1(x) = \ln x$
Β. $F_2(x) = \frac{1}{x}$
Γ. $F_3(x) = \frac{1}{\ln x}$
Δ. $F_4(x) = \frac{\ln x}{x}$
Ε. $F_5(x) = x \cdot \ln x - x$

23. * Στο διπλανό σχήμα φαίνονται μερικές λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης (ϵ). Η διαφορική εξίσωση είναι η



- Α. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\kappa}, \kappa \neq 0$ Β. $\frac{dy}{dx} = \kappa x^2$
 Γ. $\frac{dy}{dx} = x^2 + c$ Δ. $\frac{dy}{dx} = 2x$ Ε. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

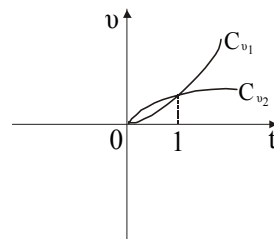
24. * Η συνάρτηση $y = \epsilon\phi x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ έχει

- Α. μια θέση τοπικού ελάχιστου
 Β. μια θέση τοπικού μέγιστου
 Γ. ένα σημείο καμπής
 Δ. μία κατακόρυφη ασύμπτωτη
 Ε. όλα τα παραπάνω

25. * Οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + c$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

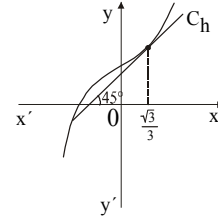
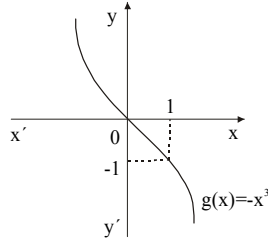
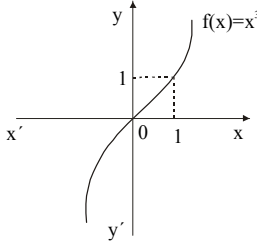
- Α. $y'' + y' = 0$ Β. $y' + y = 0$ Γ. $y'' - y' = 0$
 Δ. $y'' - y' = 2$ Ε. $y'' + y' + y = 0$

26. * Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων v_1 και v_2 που δείχνουν τις ταχύτητες δυο αυτοκινήτων σε σχέση με το χρόνο t . Τότε ισχύει



- Α. $v_1'(t) = v_2'(t)$ κατά τη διάρκεια του πρώτου λεπτού
 Β. $v_1'(t) > v_2'(t)$ μετά το πρώτο λεπτό
 Γ. $v_1'(t) < v_2'(t)$ μετά το πρώτο λεπτό
 Δ. κατά τη χρονική στιγμή $t = 1$ η επιτάχυνση των δυο κινητών είναι ίδια
 Ε. κάθε χρονική στιγμή έχουν την ίδια επιτάχυνση

27. * Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h



Από αυτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y' = 3x^2$ μπορεί να είναι οι συναρτήσεις

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------------|
| A. μόνο η f | B. μόνο η g | Γ. μόνο η h |
| Δ. η f και η h | E. η g και η h | |

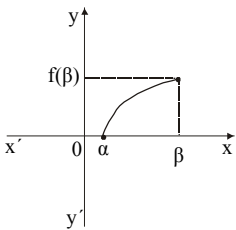
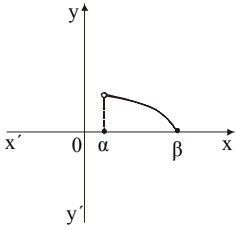
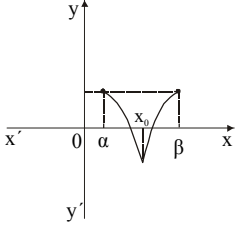
28. * Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για τις τιμές του h πολύ κοντά στο 0, η διαφορά $f(x+h) - f(x)$ προσεγγίζεται καλύτερα από

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| A. την παράγωγο $f'(x)$ | B. το διαφορικό $hf'(x)$ | |
| Γ. το h | Δ. το $hf(x)$ | E. το $h'f(x)$ |

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Για τις συναρτήσεις, που οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στη στήλη Α του πίνακα I, κάποια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[a, \beta]$ δεν ισχύει. Οι συνθήκες αυτές φαίνονται στήλη Β. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα II.

Πίνακας I

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p> 	<p>α. f συνεχής στο $[a, \beta]$</p>
<p>2.</p> 	<p>β. f παραγωγίσιμη στο (a, β)</p> <p>γ. $f(a) = f(\beta)$</p>
<p>3.</p> 	

Πίνακας II

1	2	3

2. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι με τη θέση ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση αυτή και που γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = -3x^2 + 4x + 7, x \in \mathbb{R}$	α. 2
2. $f(x) = x + 2 , x \in \mathbb{R}$	β. -2
3. $f(x) = 3x + 2, x \in [-1, 2)$	γ. 1
4. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 2] \\ -x^2, & x \in (-1, 0] \end{cases}$	δ. 0
5. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x,$ $x \in (-1, 2)$	ε. $\frac{2}{3}$
	στ. -1
	ζ. -3

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

3. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι με τη θέση του σημείου καμπής (αν υπάρχει) που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

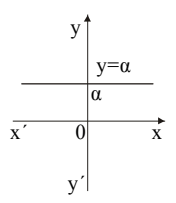
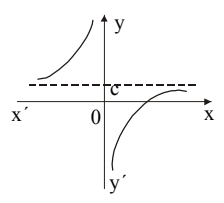
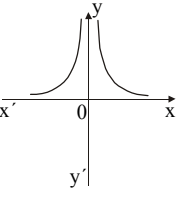
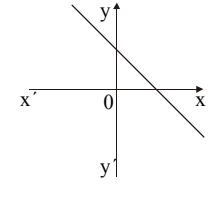
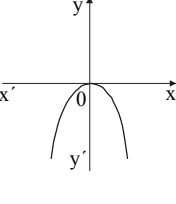
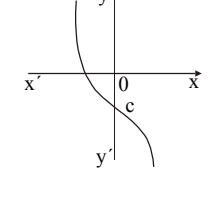
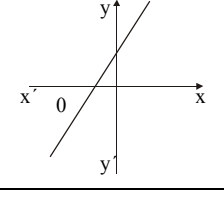
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 15$	α. - 2
2. $f(x) = \sqrt{ x }$	β. 2
3. $f(x) = (x - 2)^3$	γ. 0
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$	δ. - 1
	ε. 1
	στ. δεν υπάρχει

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

4. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι την παράγουσά της F από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

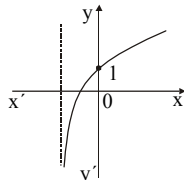
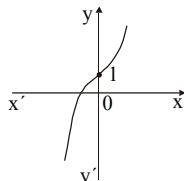
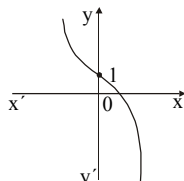
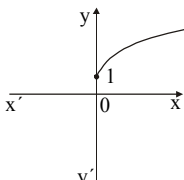
Στήλη Α	Στήλη Β
Γραφικές παραστάσεις f	Γραφικές παραστάσεις F
<p>1.</p> 	<p>α.</p> 
<p>2.</p> 	<p>β.</p> 
<p>3.</p> 	<p>γ.</p> 
	<p>δ.</p> 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

5. ** Σε κάθε διαφορική εξίσωση της στήλης Α του πίνακα Ι να αντιστοιχίσετε τη μερική της λύση που η γραφική της παράσταση είναι στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ. Η αρχική συνθήκη για κάθε διαφορική εξίσωση είναι η $f(0) = 1$.

Πίνακας Ι

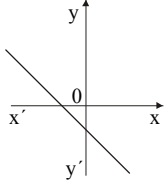
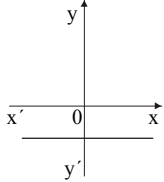
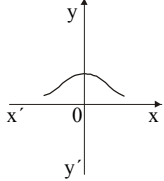
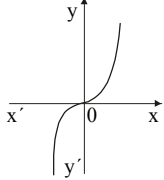
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{1}{3} \frac{dy}{dx} = x^2$	α. 
2. $\sqrt{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \quad (x > 0)$	β. 
3. $(x + e) \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad (x > -e)$	γ. 
	δ. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

6. * Η στήλη Α του πίνακα Ι περιέχει τις παραγώγους των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4 και η στήλη Β τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

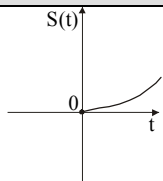
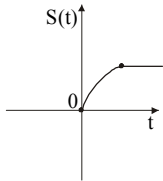
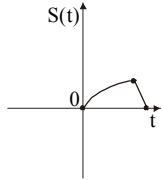
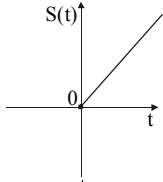
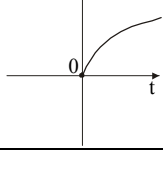
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f_1'(x) = x^2 + 1$	α. 
2. $f_2'(x) = -5$	β. 
3. $f_3'(x) = 0$	γ. 
	δ. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

7. * Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα v_0 . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ περνά από το σταθερό σημείο O . Αν $s(t)$ είναι η απόσταση του κινητού από το O καθώς απομακρύνεται από αυτό, να αντιστοιχίσετε σε κάθε μορφή κίνησης από τη στήλη Α του πίνακα Ι το κατάλληλο διάγραμμα της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

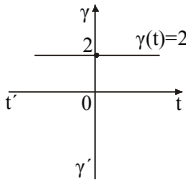
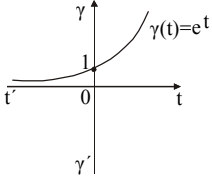
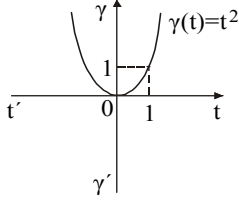
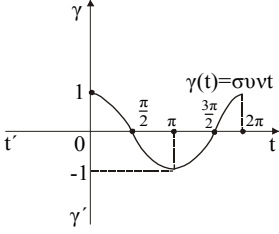
Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1. ομαλά επιταχυνόμενη</p> <p>2. κίνηση με σταθερή ταχύτητα</p> <p>3. ομαλά επιβραδυνόμενη και ακινητοποίηση</p>	<p>α.</p> 
	<p>β.</p> 
	<p>γ.</p> 
	<p>δ.</p> 
	<p>ε.</p> 

Πίνακας ΙΙ

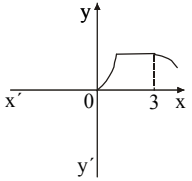
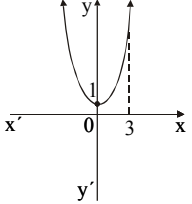
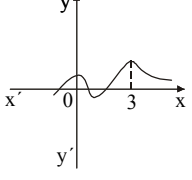
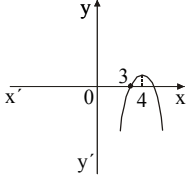
1	2	3

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

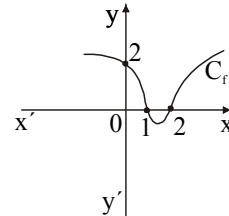
1. * Στη στήλη Α φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των επιταχύνσεων τεσσάρων κινητών. Να συμπληρώσετε στη στήλη Β τους πιθανούς τύπους των συναρτήσεων των ταχυτήτων τους.

Στήλη Α	Στήλη Β
γραφική παράσταση επιτάχυνσης	συνάρτηση ταχύτητας
<p>1.</p> 	<p>1.</p>
<p>2.</p> 	<p>2.</p>
<p>3.</p> 	<p>3.</p>
<p>4.</p> 	<p>4.</p>

2. * Στη στήλη A φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h, φ. Να συμπληρώσετε τα κενά στη στήλη B, βάζοντας την κατάλληλη ανίσωση που δείχνει το πρόσημο των παραγώγων τους για $x > 3$.

Στήλη A	Στήλη B
γραφικές παραστάσεις	πρόσημο $f'(x)$ για $x \geq 3$
<p>1.</p> 	<p>1.</p>
<p>2.</p> 	<p>2.</p>
<p>3.</p> 	<p>3.</p>
<p>4.</p> 	<p>4.</p>

3. * Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f . Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση C_g της g αν $g'(x) = -f'(x)$ και $g(1) = 2$.



Ερωτήσεις διάταξης

- * Να διατάξετε με αύξουσα σειρά τις τετμημένες των ακροτάτων και των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^3 (x + 1)^3$.
- * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$ και τα διαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$. Να βρείτε τους αριθμούς $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα παραπάνω διαστήματα. Να διατάξετε τους παραπάνω αριθμούς με φθίνουσα σειρά.
- * Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στο \mathbb{R} και $x_1 < x_2$, να διατάξετε τους αριθμούς $f'(x_1), f'(x_2), f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Για να υπολογίσει κάποιος την \sqrt{x} ($0 \leq x \leq 1$) χρησιμοποιεί για προσέγγιση τον αριθμό $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, ενώ ένας άλλος τον αριθμό $\frac{2x+1}{3}$.
- α) Να εκτιμήσετε ποια από τις δύο προσεγγίσεις δίνει το ελάχιστο (απόλυτο) σφάλμα για τις τιμές του x :
i) στο διάστημα $[0,12 \ 0,13]$,
ii) στο διάστημα $[0,95 \ 1]$.
- β) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{2x+1}{3}$ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α).
2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{5t^2 + 192}{2t^2 + 24}$ του πληθυσμού μιας πόλης σε χιλιάδες ως προς το χρόνο t .
- α) Να δείξετε ότι ο πληθυσμός θα μειώνεται, και όσο περνά ο χρόνος θα πλησιάζει τους 2.500 κατοίκους.
- β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
3. ** Το κόστος παραγωγής υλικού για την κατασκευή βάσεων κυλινδρικού δοχείου είναι 3 δρχ./cm², ενώ για την κατασκευή της παράπλευρης επιφάνειας είναι 2 δρχ./cm². Να βρείτε τη σχέση της ακτίνας της βάσης και του ύψους του κυλινδρικού δοχείου ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος, με την προϋπόθεση ότι ο όγκος θα είναι σταθερός.

4. ** α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ και $g(x) = f(x) \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.
- β) Να εξετάσετε την ισχύ της παραπάνω πρότασης στη γενική περίπτωση που η f είναι τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) > 0$ και $g(x) = f(x) \eta\mu kx$, $x \in \mathbb{R}$.
5. ** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ με τη βοήθεια των παραγώγων.
6. ** α) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ στο $+\infty$.
- β) Να δείξετε ότι οι τιμές της $f(x)$ για $x > 100$ προσεγγίζονται από την $g(x) = x - 1$ με σφάλμα που δεν ξεπερνά το 0,01.
7. ** Ένα κινητό ξεκινά από σημείο A και κινείται ευθύγραμμα. Πέντε λεπτά μετά την εκκίνηση φτάνει στο σημείο B που απέχει 5 km από το A και σταματά. Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση του κινητού από το A τη χρονική στιγμή t δίνεται από μια τριτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση $s(t)$. Να βρεθούν:
- α) ο τύπος της $s(t)$.
- β) η μέγιστη ταχύτητα που ανέπτυξε το κινητό
- γ) τα διαστήματα στα οποία η κίνηση ήταν επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη.
8. ** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2$. Ένα σημείο M (x, y) κινείται πάνω στην παραβολή. Να βρεθεί η θέση του σημείου αυτού, όταν οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι.

9. ** Αν η συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης για ποσότητα παραγωγής q είναι $C(q) = q^3 - 21q^2 + 53q + 1000$ και η συνάρτηση εσόδων είναι $R(q) = -3q^2 + 20q + 1300$, να προσδιοριστεί το μέγιστο κέρδος και οι τιμές του κόστους και των εσόδων που πραγματοποιείται το μέγιστο κέρδος.
10. ** Για ποιες τιμές του k η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;
11. ** Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ' ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;
12. ** Είναι γνωστό ότι αν f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ τότε $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Συχνά γίνεται το λάθος να εφαρμόζεται η ισότητα $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$. Είναι όμως η ισότητα αυτή πάντα λανθασμένη; Αν $f(x) = e^{3x}$ να βρείτε μια μη μηδενική συνάρτηση g για την οποία να ισχύει $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$.
13. ** Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$
(η πραγματική τιμή είναι $-\frac{5}{3}$).
14. ** Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο $E(v) = \frac{1}{v} [2(v - 35)^2 + 750]$, $v > 0$, όπου v είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, $v > 0$.
α) Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.
β) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

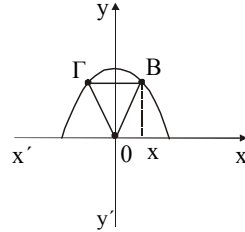
15. ** Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση

$$y = \frac{1}{14}(48 - x^2), \text{ και το ισοσκελές τρίγωνο } O\Gamma\Gamma \text{ με}$$

$$OB = O\Gamma.$$

- α) Να βρείτε τα σημεία B, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου OΓΓ γίνεται μέγιστο.

- β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;



16. ** Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση

με το χρόνο t . Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t-2}$, $t > 2$:

- α) Να βρείτε τον τύπο της f , αν ισχύει $f(3) = 4$.

- β) Μέχρι ποια χρονική στιγμή θα ισχύει $f(t) > 1$;

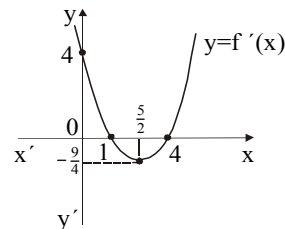
17. ** Έστω $f(x) = x^2(3-x)$, όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

18. ** Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f .

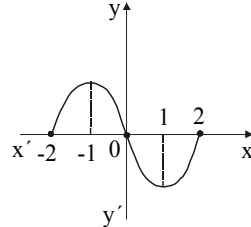
- β) Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(0) = 1$.

- γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .



19. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:

α) $f'(x) = 0$ β) $f'(x) < 0$ γ) $f'(x) > 0$



20. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a > 0$. Στο σημείο M της C_f με τετμημένη $x_1 > 0$ φέρνουμε εφαπτομένη (ε) που τέμνει τον x' στο T . Θεωρούμε τα σημεία P, N πάνω στον x' ώστε $MP \perp x'$ και $MN \perp (\varepsilon)$.

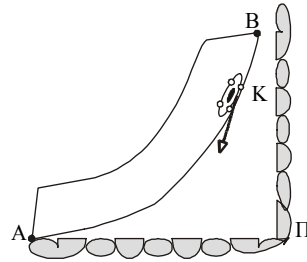
α) Να δείξετε ότι:

i) $OP = 2TP$ ii) $TP = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

iii) $PN = f(x_1) \cdot f'(x_1)$ iv) $TM = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \sqrt{1 + (f'(x_1))^2}$

- β) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ το TP είναι σταθερό. Για ποια εκθετική συνάρτηση ισχύει $TP = \frac{1}{2}$;

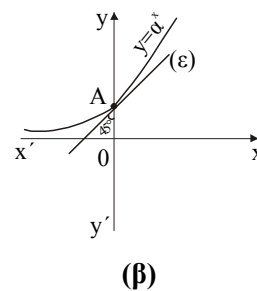
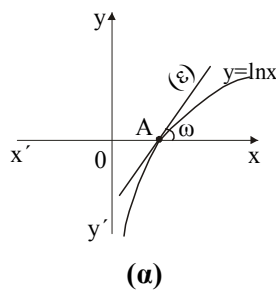
- γ) Το κομμάτι AB της πίστας δοκιμών αυτοκινήτων που αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο A . Στο σημείο K , που απέχει 40 μέτρα από το προστατευτικό διάζωμα $ΑΠ$, το αυτοκίνητο K εκτρέπεται λόγω της πολύ μεγάλης ολισθη-



ρότητας, κινείται σχεδόν ευθύγραμμα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης και προσκρούει στο διάζωμα $ΑΠ$ σε απόσταση 8 μέτρα από το A . Ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση του τμήματος AB ;

Σημείωση: Η προηγούμενη άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για ανάπτυξη και άλλων ερωτημάτων όπως για παράδειγμα αν ισχύουν οι ίδιες σχέσεις και για παραβολή της μορφής $y^2 = ax$ ($y = \kappa\sqrt{x}$).

21. ** Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία ω και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό a . (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η (ϵ) είναι εφαπτομένη της C_f).

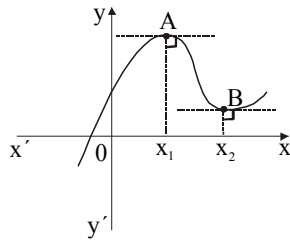


22. ** Ένα κέντρο έρευνας για την ασφάλεια των αυτοκινήτων εξετάζει το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα διακρίνει ένα εμπόδιο μέχρι την ακινητοποίησή του. Οι ερευνητές κατέληξαν σε μια σχέση της μορφής $3K \frac{ds}{dt} - e^t s^2 = 0$ όπου t ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο, K μια σταθερά που εξαρτάται από το μοντέλο και παριστάνει το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα πατήσει φρένο μέχρι την ακινητοποίησή του (υποτίθεται ότι στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε για όλα τα αυτοκίνητα ταχύτητα 80 km/h).
- α) Να βρείτε τη συνάρτηση $s(t)$ χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική συνθήκη.
- β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

γ) Κάποιος γνωρίζει ότι ο χρόνος αντίδρασής του είναι 0,8 sec. Πόση απόσταση πρέπει να κρατά από ένα προπορευόμενο αμάξι όταν τρέχει με $v = 80 \text{ km/h}$;

23. ** Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σε έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωστών επιλογών r (σε μια εβδομάδα) βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο $r(t) = \frac{13}{1 + 25e^{-0,24t}}$ (t εβδομάδες εκπαίδευσης).
- α) Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.
- β) Τι θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα;
24. ** Ο υπολογιστής τσέπης για να υπολογίσει τις δυνάμεις του αριθμού e , δηλαδή τις τιμές του e^x , χρησιμοποιεί το άθροισμα $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ (στην ουσία χρησιμοποιεί πολύ περισσότερους προσθετέους).
- α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ η προσέγγιση του υπολογιστή είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του e^x .
- β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $24e^x = 12x^2 + 4x^3 + x^4$, $x \geq 0$ έχει λύση.
- γ) Να δείξετε ότι για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του e^x , $x > 0$, έχουμε ολοένα μεγαλύτερο σφάλμα.
25. ** Μια συνάρτηση f έχει $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$. Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές για τα $f(0,1)$ και $f(-0,05)$.

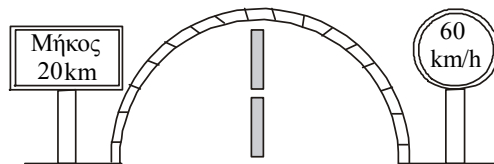
26. ** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.



Να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

27. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
 - Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x - \alpha)^v + x^v$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, $v = 2\rho$.
Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.
28. ** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα Δ . Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in \Delta$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.

29. ** Το παρακάτω σχήμα παριστάνει την είσοδο μιας σήραγγας του εθνικού οδικού δικτύου. Όταν η κίνηση είναι αυξημένη παρατηρείται «μποτιλιάρισμα» των αυτοκινήτων στη σήραγγα αυτή. Μια ομάδα συγκοινωνιολόγων μελέτησε τη ροή f των αυτοκινήτων για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και κατέληξε σε έναν τύπο ο οποίος εκφράζει τη ροή (πλήθος αυτοκινήτων / sec) σαν συνάρτηση της ταχύτητας v των αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα. Ο τύπος είναι $f(v) = \frac{22v}{v + \frac{v^2}{22} + 73}$.



- α) Ποιες επεμβάσεις προτείνετε στη σήμανση που υπάρχει στην είσοδο της σήραγγας;
- β) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ροή αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα;
30. ** Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$, $x \in \mathbb{R}$, διαφέρουν κατά μία σταθερά. Να βρεθεί αυτή η σταθερά.
31. ** Η κατανάλωση ενός φορτηγού που τρέχει με σταθερή ταχύτητα v είναι $1 + \frac{v^2}{300}$ lt πετρέλαιο την ώρα, το πετρέλαιο κοστίζει 150 δρχ. το lt και η αμοιβή του οδηγού είναι 4.000 δρχ. την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς, καθώς και τα έξοδα της μεταφοράς για μια απόσταση 500 km.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**





Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Λ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Σ
13.	Σ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Λ
17.	Σ
18.	Σ
19.	Λ
20.	Λ

21.	Λ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Λ
29.	Σ
30.	Σ
31.	Λ
32.	Σ
33.	Λ
34.	Σ
35.	Σ
36.	Σ
37.	Λ
38.	Σ
39.	Σ
40.	Λ

41.	Λ
42.	Λ
43.	Σ
44.	Σ
45.	Σ
46.	Λ
47.	Σ
48.	Σ
49.	Λ
50.	Λ
51.	Σ
52.	Λ
53.	Λ
54.	Λ
55.	Λ
56.	Σ
57.	Σ
58.	Σ
59.	Σ
60.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Γ
2.	Δ
3.	Ε
4. α)	Γ
β)	Β
γ)	Α
5.	Γ
6.	Α
7.	Β
8.	Α

9.	Δ
10.	Β
11.	Γ
12.	Ε
13.	Ε
14.	Ε
15.	Γ
16.	Δ
17.	Γ
18.	Δ

19.	Β
20.	Δ
21.	Γ
22.	Ε
23.	Δ
24.	Ε
25.	Γ
26.	Β
27.	Δ
28.	Β

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

2. Πρέπει να εξηγήσουμε ότι οι συμβολισμοί $g'(2x)$ και $(g(2x))'$ είναι διαφορετικοί. Το $g'(2x)$ είναι η παράγωγος της g στο $2x$, ενώ $(g(2x))' = g'(2x) \cdot (2x)' = 2g'(2x)$. Άρα η δοσμένη σχέση $f'(x) = g'(2x)$ δίνει $f'(x) = \frac{1}{2} 2g'(2x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (g(2x))' \Leftrightarrow f'(x) = (\frac{1}{2} g(2x))'$, άρα $f(x) = \frac{1}{2} g(2x) + c$ (απάντηση Α).
7. Εδώ θέλουμε από τη γραφική παράσταση της f , να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την f' . Από το σχήμα βλέπουμε ότι η f αλλάζει μονοτονία, άρα δεν μπορεί να είναι σωστή η Α, Γ και η Δ. Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα βλέπουμε ότι αλλάζει δύο φορές μονοτονία, άρα έχει δύο ρίζες η f' . Έτσι σωστή είναι η Β.

16. Η υπόθεση $f''(x_0) \neq 0$ σημαίνει $f''(x_0) > 0$ ή $f''(x_0) < 0$. Στην πρώτη περίπτωση η f θα είχε ελάχιστο το x_0 , δηλαδή ακρότατο. Στη δεύτερη περίπτωση θα είχε μέγιστο στο x_0 , δηλαδή πάλι ακρότατο. Έτσι, σε κάθε περίπτωση έχει ακρότατο, χωρίς να ξέρουμε το είδος του ακροτάτου, συνεπώς σωστή είναι η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	γ
2	α
3	β

2.

1	ε
2	β
3	στ
4	α
5	γ

3.

1	δ
2	στ
3	β
4	γ

4.

1	δ
2	α
3	γ

5.

1	β
2	δ
3	α

6.

1	δ
2	α
3	β

7.

1	α
2	δ
3	β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-1 < -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$

2. $\xi_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}} < \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_4 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

3. $f'(x_2) < f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f'(x_1)$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Η συνάρτηση $f_1(x) = \left| \sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right|$ έχει σύνολο τιμών το $[0, \frac{1}{2}]$, ενώ η

$f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{2x+1}{3}$ μηδενίζεται κοντά στο $\frac{1}{8} = 0,125$. Άρα στο

$[0,12 \quad 0,13]$ καλύτερη προσέγγιση δίνει η $\frac{2x+1}{3}$ ενώ στο $[0,95 \quad 1]$

η $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

β) Παρατηρήστε ότι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $(1, 1)$

2. α) $f'(t) < 0$ για $t > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 2,5$

β) $y = \frac{5}{2}$

3. Εμβαδόν βάσεων $2\pi r^2$, εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $2\pi r \cdot h$. Συνολικό κόστος $3 \cdot 2\pi r^2 + 2 \cdot 2\pi r h$ με όγκο $V = \pi r^2 \cdot h$, άρα $h = \frac{V}{\pi r^2}$, οπότε το συνολικό κόστος $K(r) = 6\pi r^2 + \frac{4V}{r}$. Για $K'(r) = 0$ προκύπτει $12\pi r^3 - 4V = 0$, άρα $3r = h$
4. α) Αν x_0 η τετμημένη του κοινού σημείου τότε $f(x_0) = g(x_0)$, άρα $\eta_{\mu x_0} = 1$, $g'(x_0) = f'(x_0) \cdot \eta_{\mu x_0} + f(x_0) \cdot \sigma_{\nu x_0}$, όμως $\sigma_{\nu x_0} = 0$, $\eta_{\mu x_0} = 1$, άρα $g'(x_0) = f'(x_0)$
- β) Για τα κοινά σημεία $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = f(x) \eta_{\mu kx}$, άρα $\eta_{\mu kx} = 1$ και $g'(x) = f'(x) \eta_{\mu kx} + \kappa_{\sigma \nu x} \cdot f(x)$, άρα $g'(x) = f'(x)$ για $\eta_{\mu kx} = 1$
5. $f(x) = \eta_{\mu^6} x + \sigma_{\nu^6} x + 3\eta_{\mu^2} x \cdot \sigma_{\nu^2} x$, οπότε $f'(x) = 0$
6. α) $y = x - 1$
- β) Αν $\delta = \frac{x^2}{1+x} - (x-1) = \frac{1}{1+x}$ ισχύει $\delta < 0,01$ για $x > 100$
7. α) $s'(t) = v(t) = at^2 + \beta t + \gamma$ με $v(0) = 0$, $v(5) = 0$, άρα $v(t) = at^2 - 5at$
δηλαδή $s(t) = \frac{at^3}{3} - \frac{5at^2}{2} + c$ με $s(0) = 0$ και $s(5) = 5$. Άρα $a = -\frac{6}{25}$
- β) $v(2,5) = 90$
- γ) στο $[0, \frac{5}{2}]$ επιταχ. στο $(\frac{5}{2}, 5]$ επιβραδ.

8. Αν $M(x, y)$ σημείο της $y = x^2$ θέλουμε $(x^2)' = x'$, δηλαδή $2x = 1$, άρα $x = \frac{1}{2}$,

$$y = \frac{1}{4}$$

9. $q = 11$ $c(11) = 373$ $R(11) = 1157$

10. $\kappa = -3$

11. Έστω $A(-\rho, 0)$ το σημείο επαφής. Τότε το B έχει συντεταγμένες $(x, \sqrt{\rho^2 - x^2})$, άρα $(AB\Gamma) = (\rho + x) \sqrt{\rho^2 - x^2} = f(x)$ ($-\rho \leq x \leq \rho$).

$$f'(x) = \frac{(\rho + x)(\rho - x)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \text{ και όταν } x = \frac{\rho}{2}, \text{ η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο, άρα η } B\Gamma$$

πρέπει να απέχει $3 \frac{\rho}{2}$ από το A .

α) Αν ο κύκλος εφάπτεται στον $y'y$ στο $O(0, 0)$, τότε αν $B(x, y)$, $OK = x$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο OBD το BK είναι ύψος, άρα $y^2 = BK^2 = OK \cdot KD = x(2\rho - x)$, άρα $y = \sqrt{2\rho x - x^2}$, οπότε το εμβαδόν $E = x \sqrt{2\rho x - x^2} = f(x)$. Για την $f(x)$ προκύπτει το ίδιο μέγιστο και αυτό αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι η θέση των αξόνων είναι ανεξάρτητη του αποτελέσματος.

β) Παρατηρούμε ότι στη θέση μεγίστου εμβαδού $B\Gamma = \sqrt{3}\rho$, άρα το τρίγωνο πρέπει να είναι ισόπλευρο. Το πρόβλημα της εγγραφής μέσα σε κύκλο τριγώνου με μέγιστο εμβαδό είναι ένα κλασικό γεωμετρικό πρόβλημα, του οποίου η αναλυτική αντιμετώπιση θα μπορούσε να είναι η προτεινόμενη παραπάνω.

12. $g(x) = ce^{\frac{3x}{2}}$

13. Στο δεύτερο βήμα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος L' Hospital

14. α) $v = 40$ β) $E(40) = 20$ μονάδες ενέργειας

15. α) $E = \frac{48x - x^3}{14}$ Β $(4, \frac{16}{7})$ Γ $(-4, \frac{16}{7})$

β) $E = \frac{64}{7}$

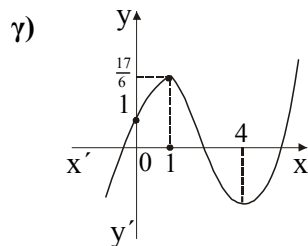
16. α) $f(t) = \ln(t - 2) + 4$ β) $t > 2 + e^{-3}$

17. $x = 2$ $f(2) = 4$

18. α) $(-\infty, 1] \uparrow, (1, 4] \downarrow, (4, +\infty) \uparrow$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $f'(x) = x^2 - 5x + 4$,

άρα $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c$ και αφού $f(0) = 1$, άρα $c = 1$



19. α) $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ β) $-1 < x < 1$ γ) $-2 < x < -1$ ή $1 < x < 2$

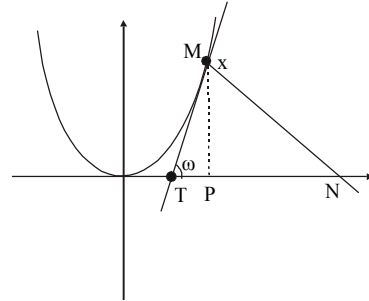
20. α) i) $OP = x_1$, η (ε) έχει εξίσωση:

$$y - \alpha x_1^2 = 2\alpha x_1 (x - x_1). \text{ Για } y = 0$$

προκύπτει

$$x = \frac{x_1}{2} \text{ (η τεταμημένη του T), άρα } OP$$

$$= 2TP$$



ii) $\epsilon\phi\omega = \frac{MP}{TP}$, άρα $f'(x_1) = TP \cdot f(x_1)$

iii) Στο TMN ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $PN \cdot TP = MP^2$, άρα

$$PN = f^2(x_1) \cdot \frac{f'(x_1)}{f(x_1)}$$

iv) $\frac{TM}{MP} = \frac{MN}{PN}$, άρα $TM = \frac{MP \cdot MN}{PN}$ και $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$

β) $TP = 1$ για την e^x και αν $TP = \frac{1}{2}$ $\alpha = e^2$

γ) $AT = 8$ άρα το OT του (α) ερωτήματος είναι 8, δηλαδή $OP = 16$ επομένως $f(16) = 40$, δηλαδή $\alpha \cdot 16^2 = 40$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση

$$y = \frac{40}{16^2} x^2$$

21. α) $\epsilon\phi\omega = f'(1)$ με $f(x) = \ln x$, άρα $\epsilon\phi\omega = 1$ δηλαδή $\omega = 45^\circ$

β) $\epsilon\phi 45^\circ = f'(0)$ με $f(x) = \alpha^x$, άρα $1 = \alpha^0 \cdot \ln \alpha$, δηλαδή $\alpha = e$

22. α) $\left(-\frac{1}{s(t)}\right)' = \left(\frac{e^t}{3\kappa}\right)'$. Άρα $s(t) = \frac{3\kappa}{-e^t + 4}$ αφού για $t = 0$ $s(t) = \kappa$.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν ο οδηγός είχε μηδενικό χρόνο αντίδρασης (0 καθυστέρηση), το αυτοκίνητο θα διένυε διάστημα κ .

β) $s'(t) > 0$ άρα $s(t) \uparrow$, δηλαδή μεγαλύτερος χρόνος αντίδρασης μεγαλύτερο διάστημα ακινητοποίησης

$\gamma) s(0, 8) = 1,7\kappa$

23. $\alpha) r'(t) > 0$, δηλαδή $r(t) \uparrow$

$\beta) \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 13$

24. $\alpha) f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$, $x > 0$, τότε $f^{(3)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0,

άρα $f^{(2)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f'(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f \uparrow$ με $f(x) > 0$

$\beta)$ αδύνατη

$\gamma)$ η f είναι \uparrow και δίνει τη διαφορά του e^x από το άθροισμα

25. $(f(x) + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$ για $x = 0$ και $\Delta x = 0,1$

$f(0, 1) \approx 1,2$ ενώ με όμοιο τρόπο $f(-0,05) \approx 0,9$

26. Στα σημεία A, B οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον $x'x$ άρα τα x_1, x_2

είναι ρίζες της $f'(x) = 3x^2 + 2\kappa x + 1$, όμως $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{3}$

27. $\alpha) f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 500$, άρα για $x < 500$ $f \downarrow$, ενώ για $x > 500$ $f \uparrow$

$\beta) f(1000) > f(998)$ από το (α) ερώτημα. Θα μπορούσαμε ακόμη να πούμε ότι $f(0) > f(2)$ και να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα: $1000^2 > 998^2 + 2^2$

$\gamma)$ Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε μια γενίκευση των $(\alpha), (\beta)$ και

$f'(x) = v [(x - \alpha)^{v-1} + x^{v-1}]$, μια προφανής ρίζα της f' είναι η $x_0 = \frac{\alpha}{2}$

(αφού $v = 2\rho$) που είναι μοναδική, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$.

Η μονοτονία της f είναι: $f \downarrow$ στο $(-\infty, \frac{\alpha}{2}]$ και $f \uparrow$ στο $(\frac{\alpha}{2}, +\infty)$.

Για $\alpha = 10.000$ και $v = 100$ προκύπτει $f(10.000) > f(9.000)$

28. $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, άρα παράλληλες εφαπτομένες

29. α) $f'(v) = 0$ τότε $v \approx 40$, άρα η σήμανση πρέπει να γίνει 40 km/h
β) $f(40) \approx 5$ αυτ/sec

30. $f'(x) = g'(x)$ άρα $f(x) = g(x) + c$ για $x = 0$ $c = 4$

31. Σε t ώρες έξοδα καυσίμου $150 \left(1 + \frac{v^2}{300}\right) t$, αφού θα κινηθεί επί $t = \frac{500}{v}$.

Άρα θεωρούμε την $K(t) = 150 \left(1 + \frac{v^2}{300}\right) t + 4.000t$

Άρα $K(v) = 150 \left(1 + \frac{v^2}{300}\right) \frac{500}{v} + 4.000 \frac{500}{v}$

Βρίσκουμε $v = \sqrt{8.300} \approx 91$ χιλ./ώρα και έξοδα $K(91) \approx 45.500$ δραχ.