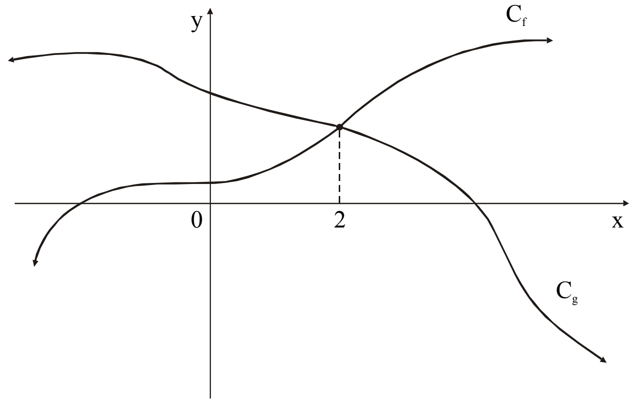
ΜΕΡΟΣ Β΄: ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 1ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι το διάστημα (- 1, 1). **Σ** **Λ**

2. * Στο παρακάτω σχήμα η λύση της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι το διάστημα $(2, +\infty)$. **Σ** **Λ**



3. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

4. * Το γινόμενο δύο συναρτήσεων ορίζεται όταν τα πεδία ορισμού τους έχουν κοινά στοιχεία. **Σ** **Λ**

5. * Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες στο R. **Σ** **Λ**

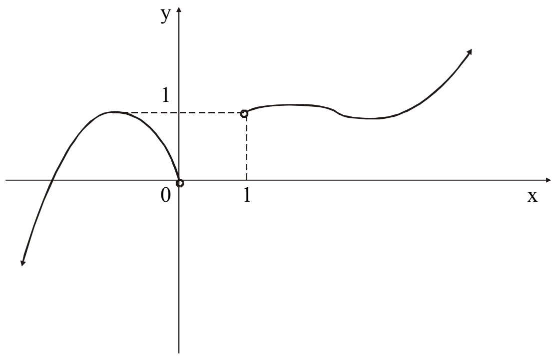
6. ** Οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x - 12}{(2x - 6)^2}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$$

είναι ίσες. **Σ** **Λ**

7. * Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ με $x \neq 0$ είναι σταθερή. **Σ** **Λ**

8. * Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το R. **Σ** **Λ**



9. * Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι της μορφής [α, β], τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο α και μέγιστο β. **Σ** **Λ**

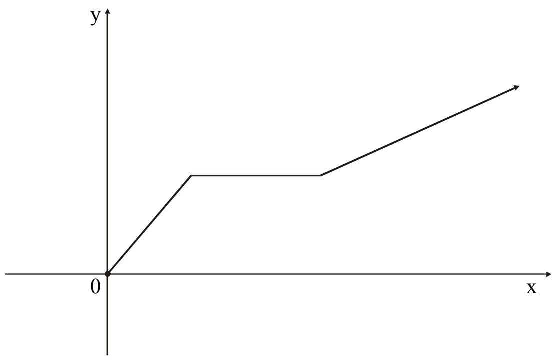
10. * Η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in N^{*}$, είναι:

i) άρτια, αν ο ν είναι άρτιος **Σ** **Λ**

ii) περιττή, αν ο ν είναι περιττός. **Σ** **Λ**

11. ** Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu\lambda x$, $\lambda \neq 0$, είναι περιοδική με περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{|\lambda|}$. **Σ** **Λ**

12. * Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**



13. ** Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και f γνησίως αύξουσα, τότε και η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως αύξουσα στο R. **Σ** **Λ**

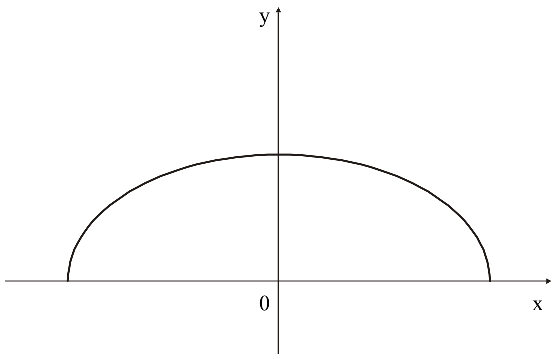
14. * Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ με κοινό σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, τότε και η συνάρτηση $f{\cdot}g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

15. ** Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Αν ο λόγος $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι αρνητικός για κάθε $x_1, x_2 \in Δ$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

16. * Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο διάστημα Δ, τότε και η συνάρτηση f + g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

17. ** Η συνάρτηση $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. **Σ** **Λ**

18. * Η συνάρτηση που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι συνάρτηση 1 -1. **Σ** **Λ**



19. * Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0]$ είναι συνάρτηση 1 - 1. **Σ** **Λ**

20. * Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1 - 1 στο R, τότε και η συνάρτηση fog είναι 1 - 1 στο R. **Σ** **Λ**

21. * Η συνάρτηση f είναι 1 - 1 στο R, όταν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. **Σ** **Λ**

22. * Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in R$ και $c \neq 0$, έχει για αντίστροφη την $g(x) = \frac{1}{c}$. **Σ** **Λ**

23. ** Η 1 - 1 συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και η $(f^{-1})^{-1}$ είναι ίσες συναρτήσεις. **Σ** **Λ**

24. ** Μια περιοδική συνάρτηση αντιστρέφεται στο πεδίο ορισμού της. **Σ** **Λ**

25. ** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1 στο R, τότε θα ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in R$. **Σ** **Λ**

26. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το R. Τότε ισχύει:

i) $fog = f \cdot g$, **Σ** **Λ**

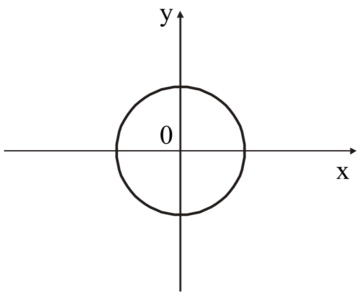
ii) $fog = gof$. **Σ** **Λ**

27. ** Έστω $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ και $h(x) = x$. Τότε θα ισχύει η ισότητα $fog = h$. **Σ** **Λ**

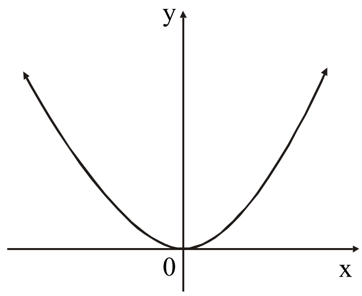
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Από τα παρακάτω διαγράμματα, γραφική παράσταση συνάρτησης είναι το διάγραμμα

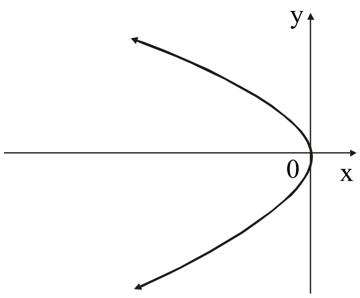
Α.



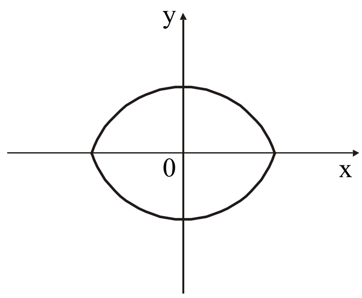
Β.



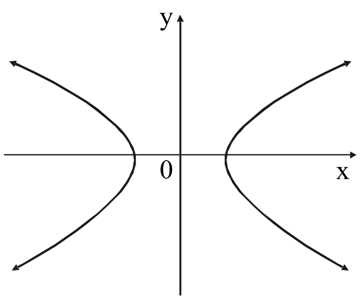
Γ.



Δ.

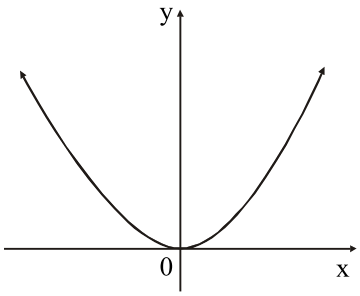


Ε.

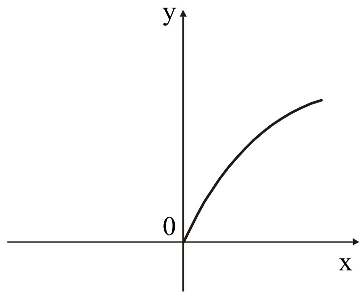


2. * Από τα παρακάτω διαγράμματα **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης το διάγραμμα

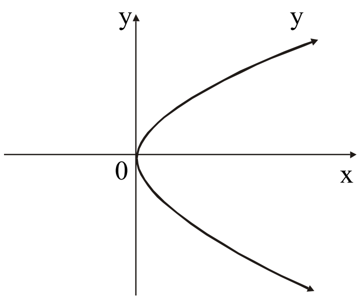
Α.



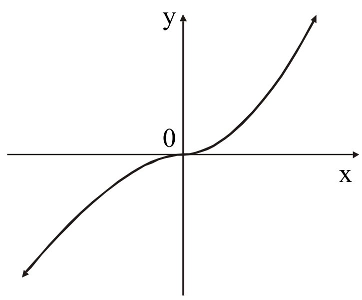
Β.



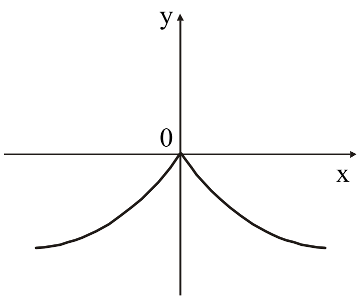
Γ.



Δ.



Ε.



3. * Αν f (x) = $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, τότε το f (3) είναι ίσο με

Α. - 3 **Β.** - 27 **Γ.** 27 **Δ.** 0 **Ε.** 81

4. * Αν $f(x) = \begin{cases} 0, \text{αν } x < 0 \\ x, \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε ισχύει

Α. $f(x) = x + |x|$ **Β.** $f(x) = |x| - x$ **Γ.** $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$

Δ. $f(x) = \frac{|x| - x}{2}$ **Ε.** $f(x) = |x|$

5. * Σκέψου έναν αριθμό. Ύψωσέ τον στο τετράγωνο. Πολλαπλασίασε το τετράγωνο με 2 και πρόσθεσε 7. Αν ο αριθμός που σκέφθηκες είναι x, ποιος από τους παρακάτω τύπους δίνει το αποτέλεσμα;

Α. $(2x)^2 + 7$ **Β.** $2x^2 + 7$ **Γ.** $2(x + 7)^2$

Δ. $2(x^2 + 7)$ **Ε.** $\frac{1}{2}x^2 + 7$

6. * Αν $f(x) = x^2$ και $\alpha \neq \beta$, τότε το πηλίκο $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ είναι ίσο με

Α. $\alpha - \beta$ **Β.** $\beta - \alpha$ **Γ.** 2α **Δ.** $\alpha + \beta$ **Ε.** 2β

7. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 2x}$ είναι το σύνολο

Α. $(-\infty, 4]$ **Β.** $[4, +\infty)$ **Γ.** $R - \{0, 2\}$ **Δ.** $(4, +\infty)$

Ε. $\{ x \mid x \leq 4 \text{ και } x \neq 0, 2 \}$

8. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x - 1}{x^4 + 1}$ είναι το σύνολο

Α. $R - \{1\}$ **Β.** $R - \{-1, 1\}$ **Γ.** $R - \{-1\}$ **Δ.** $[1, +\infty)$ **Ε.** R

9. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(2x - 1)$ είναι το σύνολο

Α. R **Β.** $(-\infty, \frac{1}{2})$ **Γ.** $[\frac{1}{2}, +\infty)$ **Δ.** $(\frac{1}{2}, +\infty)$

Ε. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + κx^2 + λx - 5$. Αν $f(1) = 8$ και $f(-1) = 4$, η τιμή της παράστασης $κ + 2λ$ είναι ίση με

Α. 0 **Β.** 8 **Γ.** 13 **Δ.** - 11 **Ε.** 11

11. * Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 2$ και $g(x) = 2\sqrt{x}$. Τότε ισχύει

Α. $f(x) > g(x)$ για $x \geq 0$ **Β.** $f(x) < g(x)$ για $x \geq 0$

Γ. $f(x) = g(x)$ για $x = 0$ **Δ.** $f(x) > g(x) + 2$ για $x \in (0, 4)$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

12. * Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα x΄x είναι

Α. 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

13. * Το σύνολο των τετμημένων των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ τέμνει τον άξονα x΄x είναι

Α. $\{-1, 1\}$ **Β.** $\{1\}$ **Γ.** $\{-1, 1, 3\}$ **Δ.** $\{-1, -3, 1\}$ **Ε.** $\{1, 3\}$

14. * Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2 - x$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων τους είναι οι αριθμοί

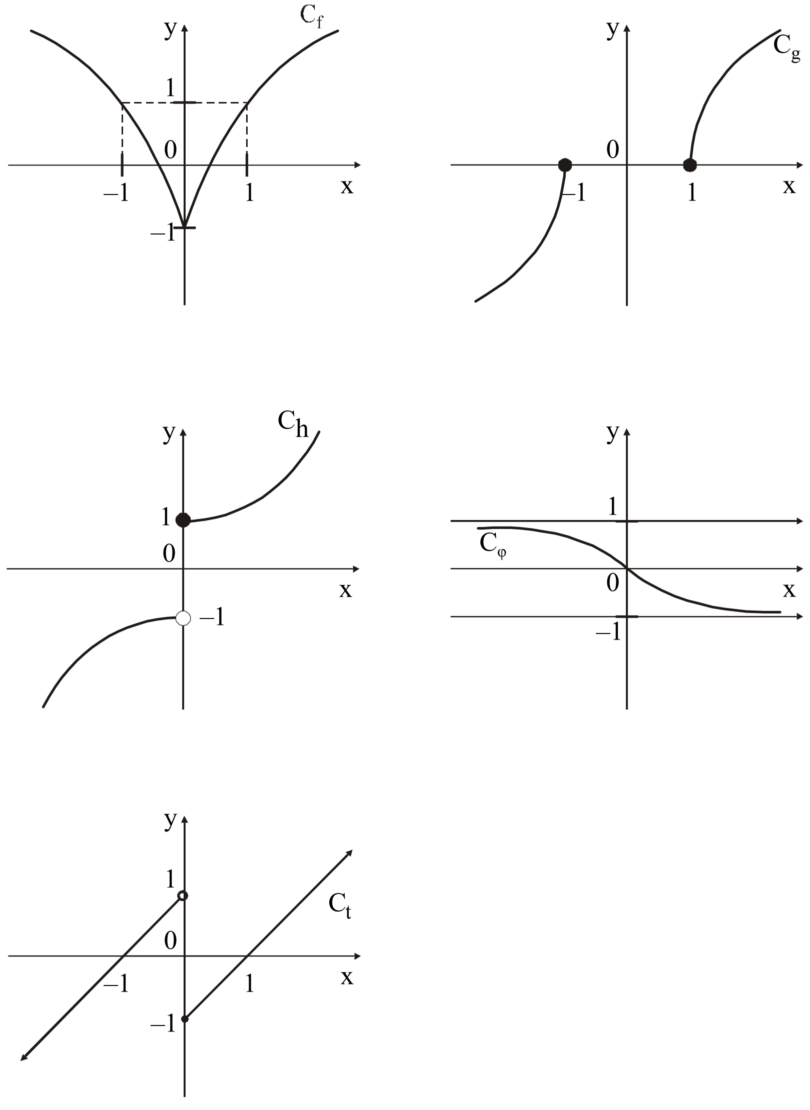
Α. 1, 0 **Β.** 1, - 1 **Γ.** 1 **Δ.** 1, 2 **Ε.** 1, 0, 2

15. * Το σημείο $(1, 2α + 2β)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^3 + βx^2 - γ$. Τότε για τα α, β, γ ισχύει

Α. $α + β = γ$ **Β.** $α + β + γ = 0$ **Γ.** $α + γ = β$

Δ. $α = β + γ$ **Ε.** $α = 2(β + γ)$

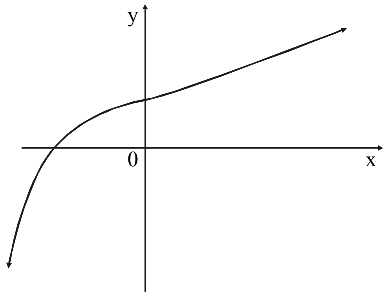
16. * Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε συναρτή-σεων: f, g, h, φ, t.



Το διάστημα (- 1, 1) είναι σύνολο τιμών της συνάρτησης

Α. f **Β.** g **Γ.** h **Δ.** φ **Ε.** t

17. * Η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f στο R, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει



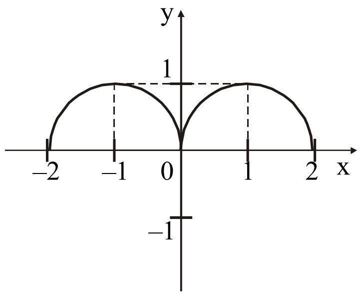
Α. δύο τουλάχιστον ρίζες

Β. μία μόνο ρίζα **Γ.** καμία ρίζα

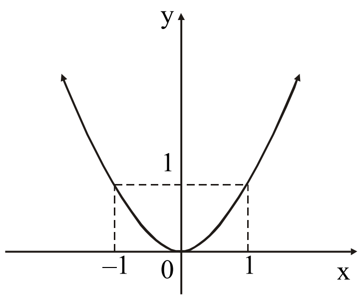
Δ. περισσότερες από δύο ρίζες **Ε.** μία ρίζα θετική

18. * Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφική παράσταση συνάρτησης 1 - 1;

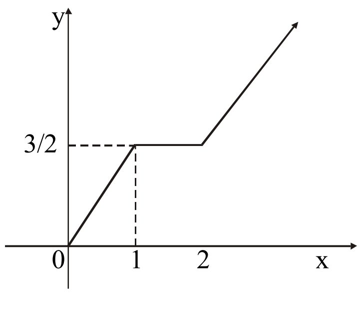
Α.



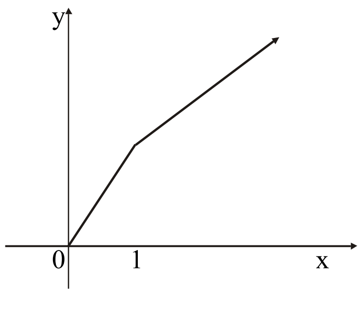
Β.



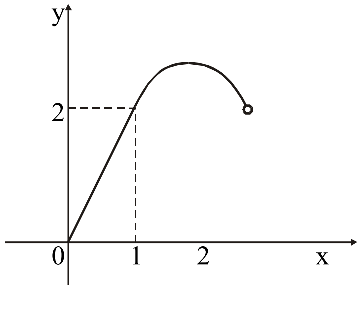
Γ.



Δ.



Ε.



19. * Η συνάρτηση g, της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 1 - 2^x$, ως προς τον άξονα y΄y, έχει τύπο

Α. $g(x) = 1 + 2^x$ **Β.** $g(x) = 1 - 2^{-x}$ **Γ.** $g(x) = 2^x - 1$

Δ. $g(x) = \ln(x - 1)$ **Ε.** $g(x) = \ln(1 - x)$

20. * Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση τη συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, είναι η συνάρτηση

Α. $y = f(-x)$ **Β.** $y = -f(x)$ **Γ.** $y = |f(x)|$

Δ. $y = 2f(x)$ **Ε.** $y = -f(-x)$

21. * Έστω f μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές

Α. ως προς την ευθεία $y = x$ **Β.** ως προς την ευθεία $y = -x$

Γ. ως προς τον άξονα y΄y **Δ.** ως προς την αρχή των αξόνων

Ε. ως προς τον άξονα x΄x

22. * Για τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει ότι η f

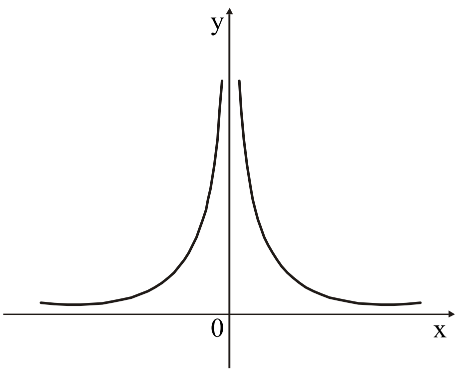
Α. είναι 1 - 1

Β. είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Γ. αντιστρέφεται

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα



23. * Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την

Α. $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **Β.** $h(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$

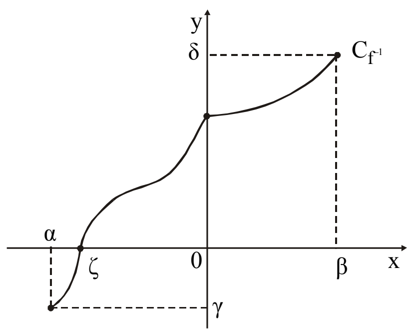
Γ. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\ln x$ **Δ.** $\sigma(x) = \sqrt{\ln x}$ **Ε.** $t(x) = \ln(2 - x)$

24. * Από τις παρακάτω συναρτήσεις **δεν** έχει αντίστροφη συνάρτηση η

Α. $y = ημx,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **Β.** $y = x^3 + 1$ **Γ.** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Δ. $y = \dfrac{2}{3}e^x$ **Ε.** $y = \ln(x - 3),\ x > 3$

25. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f. Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός



Α. πεδίο ορισμού της f είναι το [γ, δ]

Β. σύνολο τιμών της f είναι το [α, β]

Γ. $f^{-1}(\zeta) = 0$ **Δ.** $f(0) = \zeta$

Ε. Η f έχει ελάχιστο το α για x = 0

26. ** Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 4 - x^2$, τότε το πεδίο ορισμού της fog είναι

Α. $(-\infty, 2]$ **Β.** $[-2, 2]$ **Γ.** $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Δ. $(-2, 2)$ **Ε.** $(0, 2)$

27. * Αν $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 7$ και $g(x) = 7$, τότε η συνάρτηση gof έχει τύπο

Α. $7x^4 - 28x^3 - 21x + 49$ **Β.** $x^2 - 4x - 14$ **Γ.** 289

Δ. 7 **Ε.** $(x^2 - 7)^2$

28. * Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f, τότε η g (f (x)), όπου ορίζεται, είναι ίση με

Α. 1 **Β.** g (x) · f (x) **Γ.** $\frac{1}{x}$

Δ. x **Ε.** - x

29. * Δίνεται η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R, η οποία είναι 1 - 1. Τότε η εξίσωση $f(e^{x-1}) = f(e)$

Α. είναι αδύνατη στο R

Β. έχει μοναδική λύση τον αριθμό e

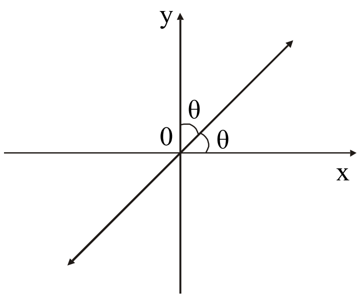
Γ. έχει μοναδική λύση τον αριθμό 1

Δ. έχει λύσεις τους αριθμούς 0 και 1

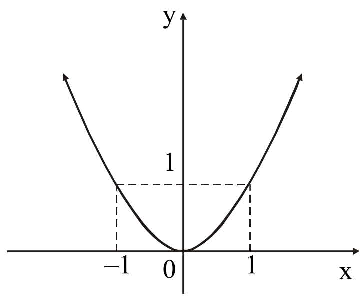
Ε. έχει μοναδική λύση τον αριθμό 2

30. ** Δίνονται οι συναρτήσεις h (x) = x, g (x) = x^2. Αν f = goh, τότε η γραφική παράσταση της f είναι

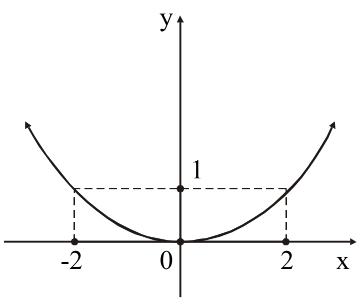
Α.



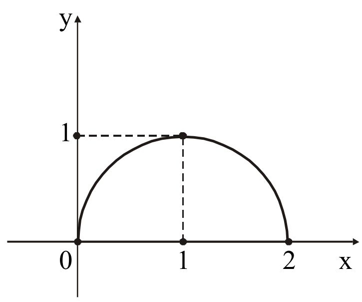
Β.



Γ.



Δ.



Ε. καμία από αυτές

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Δίνονται οι συναρτήσεις f (x) = $\sqrt{7 - x}$ και g (x) = $\sqrt{x - 3}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α, στο πεδίο ορισμού της που γράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. f	**α.** R
2. g	**β.** (- ∞, 7]
3. f + g	**γ.** [3, 7]
4. f - g	**δ.** (3, 7]
5. f · g	**ε.** [3, 7)
6. $\frac{f}{g}$	**ζ.** (3, 7)
7. $\frac{g}{f}$	**η.** [3, + ∞)

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5	6	7

2. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α, με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

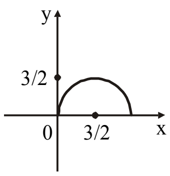
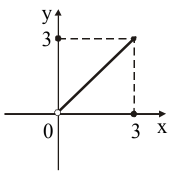
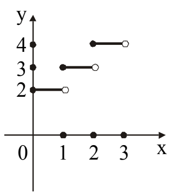
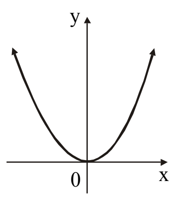
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(2x)$	**α.** $\frac{x^2+2}{x^2-2}$
2. $2f(x)$	**β.** $\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$
3. $f(x^2)$	**γ.** $\frac{2(x+2)}{x-2}$
4. $[f(x)]^2$	**δ.** $\frac{2x-6}{x-2}$
	ε. $\frac{2x+2}{2x-2}$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

3. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

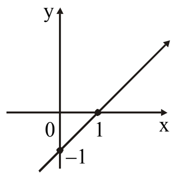
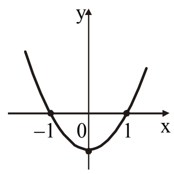
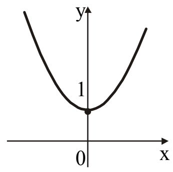
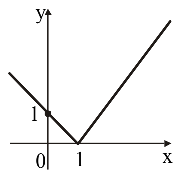
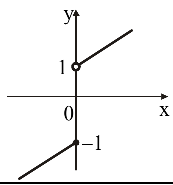
Στήλη Α	Στήλη Β
1.  **2.**  **3.**  **4.** 	**α.** $D_f = R$ **β.** $D_f = R - \{0\}$ **γ.** $D_f = [0, 3]$ **δ.** $D_f = (0, 3]$ **ε.** $D_f = [0, 3)$ **ζ.** $D_f = (0, 3)$ **η.** $D_f = [0, +\infty)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

4. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στη γραφική της παράσταση που υπάρχει στην στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

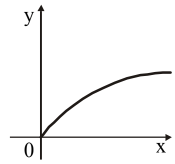
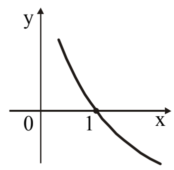
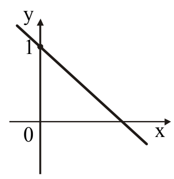
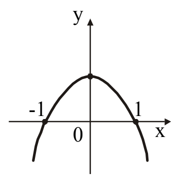
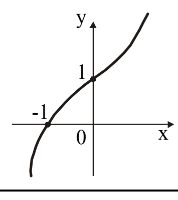
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = x^2 - 1$	**α.** 
2. $f(x) = x - 1$	**β.** 
3. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$	**γ.** 
4. $f(x) = \lvert x - 1 \rvert$	**δ.** 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

5. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στη γραφική της παράσταση που φαίνεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

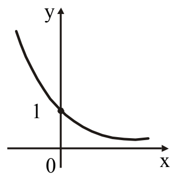
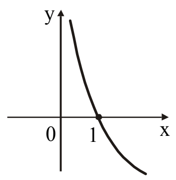
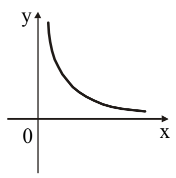
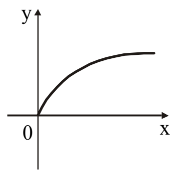
Στήλη Α	**Στήλη Β**
	α. 
1. $f(x) = -x^2 + 1$	**β.** 
2. $f(x) = x^3 + 1$	
3. $f(x) = \ln \frac{1}{x}$	**γ.** 
4. $f(x) = \sqrt{x}$	**δ.** 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

6. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τον τύπο της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $f(x) = \log_{\alpha}x,\ 0 < \alpha < 1$
	β. $f(x) = \ln x$
2. 	**γ.** $f(x) = \alpha^{x},\ 0 < \alpha < 1$
	δ. $f(x) = e^{x}$
3. 	**ε.** $f(x) = \lvert x \rvert$
4. 	**ζ.** $f(x) = \sqrt{x}$
	η. $f(x) = \dfrac{\alpha}{x},\ \alpha > 0$ και $x > 0$

Πίνακας ΙΙ

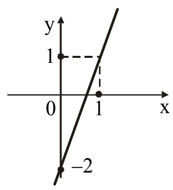
1	2	3	4

7. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

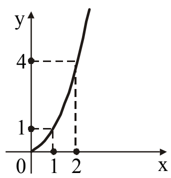
Πίνακας Ι

Στήλη Α

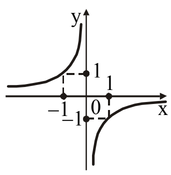
1.



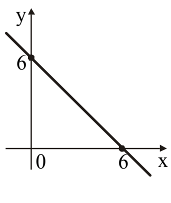
2.



3.

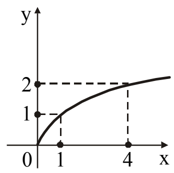


4.

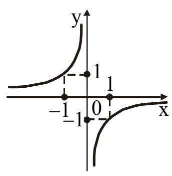


Στήλη Β

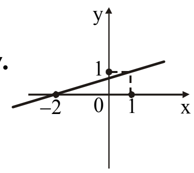
α.



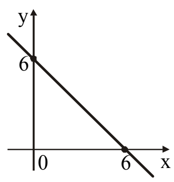
β.



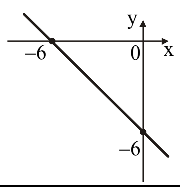
γ.



δ.



ε.

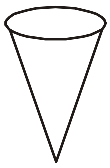
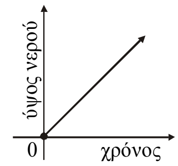
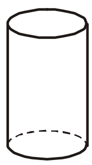
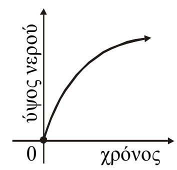
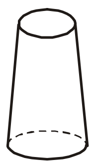
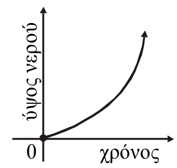
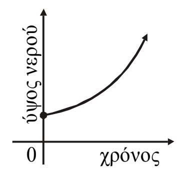


Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

8. * Τα παρακάτω δοχεία της στήλης Α γεμίζονται με την ίδια σταθερή παροχή νερού. Στη στήλη Β δίνονται οι γραφικές παραστάσεις του ύψους του νερού σε κάθε δοχείο συναρτήσει του χρόνου. Να αντιστοιχίσετε κάθε δοχείο της στήλης Α στην κατάλληλη γραφική παράσταση της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** 
2. 	**β.** 
3. 	**γ.** 
	δ. 

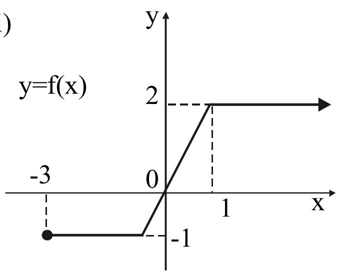
Πίνακας ΙΙ

1	2	3

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ***** Λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, να συμπληρώσετε τις ισότητες (όπου f (D_f) είναι το σύνολο των τιμών της f):

i)



D_f = ...

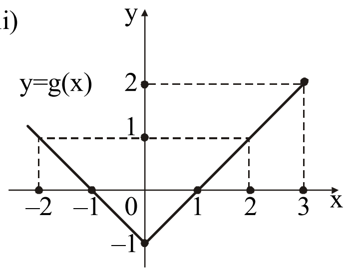
f (D_f) = ...

f (- 2) = ...

f (1) = ...

f (3) = ...

ii)



D_g = ...

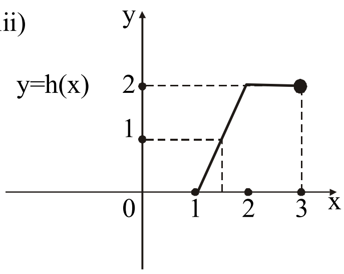
g (D_g) = ...

f (- 2) = ...

f (0) = ...

f (2) = ...

iii)



D_h = ...

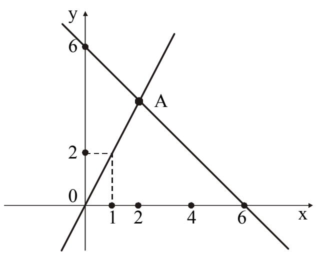
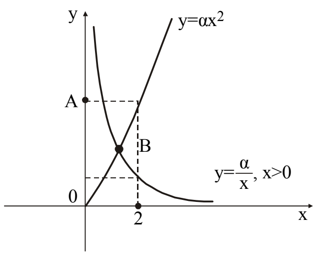
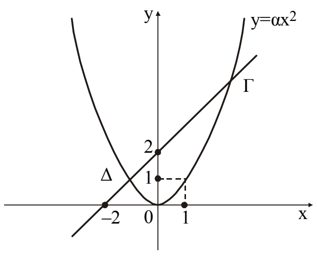
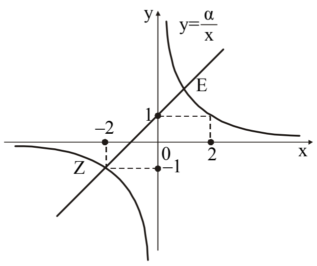
h (D_h) = ...

h (1) = ...

h (1,5) = ...

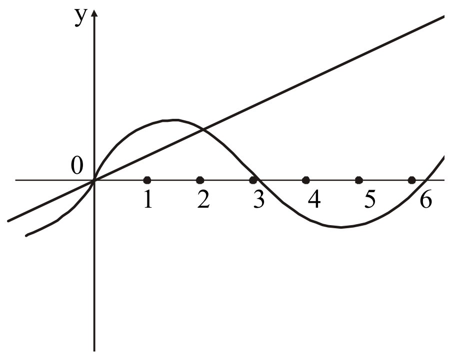
h (3) = ...

2. * Να συμπληρώσετε τη στήλη Β του παρακάτω πίνακα με τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων που βρίσκονται στην αντίστοιχη θέση της στήλης Α:

Στήλη Α ***γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων***	**Στήλη Β** ***σημεία τομής τους***
	
	
	
	

3. * Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}x$ και $g(x) = ημx$.

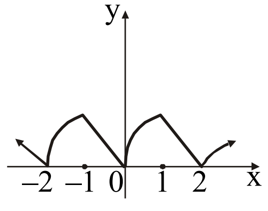
Να βρείτε στο ίδιο σχήμα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

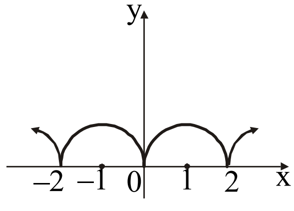


4. * Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, η g περιττή και h = gof, φ = fog, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

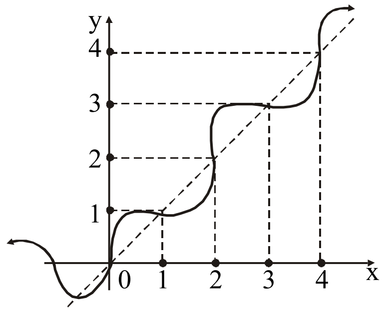
x	**f (x)**	**g (x)**	**h (x)**	**φ (x)**
- 3	0	0		
- 2	2	2		
- 1	2	2		
0	0	0		
1				
2				
3				

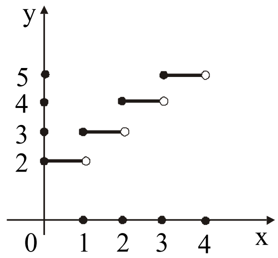
5. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την κατάλληλη ιδιότητα: “περιοδική” ή “μη περιοδική”.





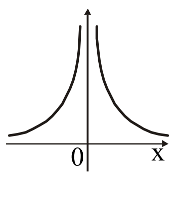
……………………………………… ………………………………………

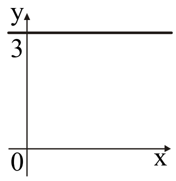


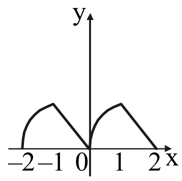


……………………………………… ………………………………………

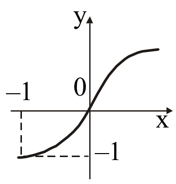
6. ***** Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την κατάλληλη ιδιότητα: “άρτια”, “περιττή”, “ούτε άρτια - ούτε περιττή”.

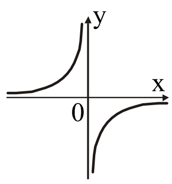


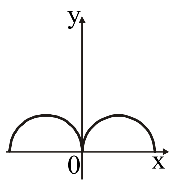




………………………… ………………………… …………………………

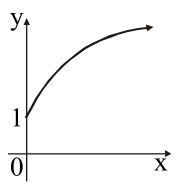


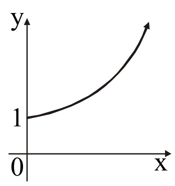


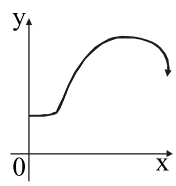


………………………… ………………………… …………………………

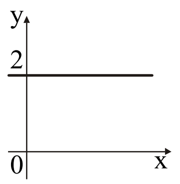
7. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε: το κατάλληλο είδος μονοτονίας (αν είναι γνησίως μονότονη) ή τη φράση “όχι γνησίως μονότονη”.

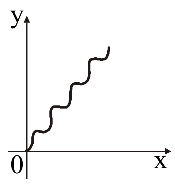


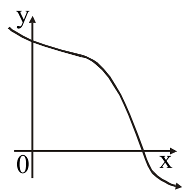




………………………… ………………………… …………………………

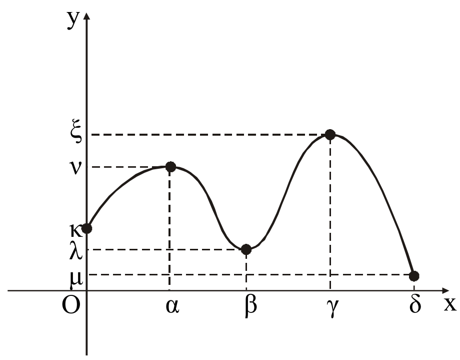






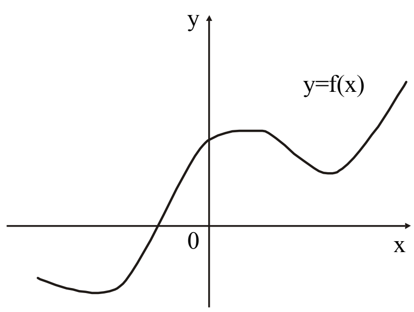
………………………… ………………………… …………………………

8. * Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος, να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα το είδος μονοτονίας (αν είναι γνησίως μονότονη) και το είδος των ακροτάτων σε καθένα από τα διαστήματα που ζητούνται:



Διάστημα	*Μονοτονία*	*Μέγιστο*	*Ελάχιστο*
[0, α]			
[α, β]			
[0, γ]			
[β, γ]			
[γ, δ]			
[α, γ]			

9. ** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = |f(x)|$.



Ερωτήσεις διάταξης

1. ** Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με f γνησίως φθίνουσα στο R και g γνησίως αύξουσα στο R. Επιπλέον ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in R$.
Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),\ g(x_1),\ g(x_2),\ g(x_3),\ g(x_4)$$

2. ** Δίνονται οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x - 2}$, **β)** $g(x) = \ln x$, **γ)** $h(x) = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x - 1}}$, **δ)** $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{2x - 3}}$

Να τις τοποθετήσετε σε μια σειρά ώστε το πεδίο ορισμού καθεμιάς να είναι ευρύτερο διάστημα από το πεδίο ορισμού της προηγούμενής της.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}}$

β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x - 2} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{|x - 2| - 1} + \dfrac{1}{|3x - 8| - |x|}$

δ) $f(x) = \dfrac{5}{|x - 3| - 1}$

ε) $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log\dfrac{x + 3}{3 - x}$

στ) $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{2\text{ημ}x - 1} + \dfrac{1}{\text{εφ}x - 1}$, $x \in [0, 2\pi]$

ζ) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$

2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{1 - x}{1 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ $f(|x|) = f(x)$.

4. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x - 2}$ και $g(x) = \sqrt{6 - x}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $p = f \cdot g$, καθώς και όλες τις τιμές της p για τις ακέραιες τιμές του x στο πεδίο ορισμού της.

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \le -3 \\ 5 - 2x, & -3 < x \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x < 2 \\ 7x - 5, & 2 \le x \end{cases}$$

Να βρείτε τον τύπο της F με $F(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)$.

6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$

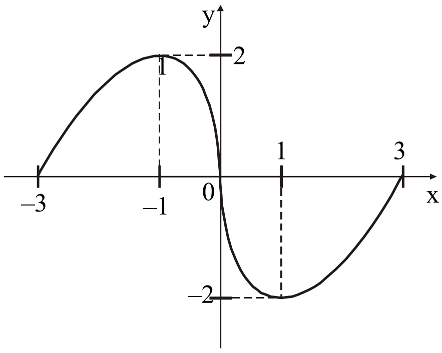
β) $f_2(x) = 2f(x)$

γ) $f_3(x) = -f(x)$

δ) $f_4(x) = |f(x)|$

7. ** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

8. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(x) = 0$,

ii) $f(x) = 2$,

iii) $f(x) = -2$

δ) Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f(x) > 0$, ii) $f(x) < 0$,

iii) $f(x) \leq 2$, iv) $f(x) < -2$

ε) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια.

ζ) Να εξετάσετε αν η f είναι περιττή.

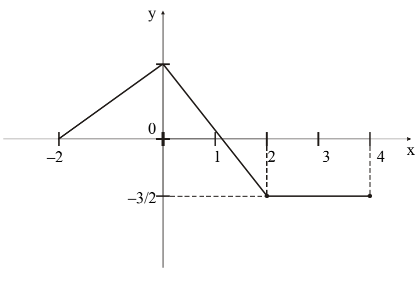
η) Να εξετάσετε αν η f είναι 1 - 1.

9. ** α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$.

10. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 1}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις 2f, f^2 και $\dfrac{f}{f}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

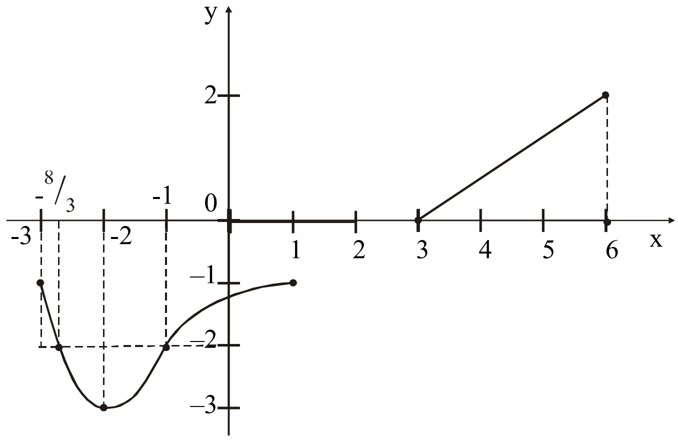
11. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [2, 4]. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:



α) $g(x) = f(x) + 1$

β) $h(x) = -f(x)$ γ) $\varphi(x) = |f(x)|$.

12. ** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g.

β) Να βρείτε τον τύπο της g όταν $x \in [3, 6]$.

γ) Για ποιες τιμές του x ισχύει $g(x) = -1$;

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: i) $-2 < g(x) < 0$

ii) $g(x) \geq 0$

13. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x - 2)$, $x \in [0, 2]$.

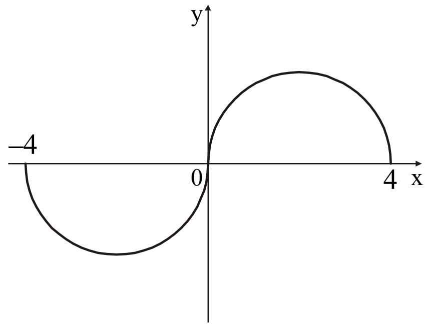
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in D_f$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-1, 0]$.

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x όταν οι τιμές του $y = 0$ και όταν $y = \frac{3}{4}$.

14. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αποτελείται από τα δύο ημικύκλια του σχήματος.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της.

γ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $y = |f(x)|$ ii) $y = -f(x)$ iii) $y = f(x-2)$

15. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{x-3} + 3(x-3)$. Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

16. ** Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μπορεί να γραφεί στη μορφή f (g (x)). Να βρείτε σε κάθε περίπτωση κατάλληλες συναρτήσεις f και g.

α) $h(x) = \text{συν}^2 x$ β) $h(x) = 3(x^2+2)^3$

γ) $h(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$ δ) $h(x) = \text{ημ}\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)$ ε) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

17. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

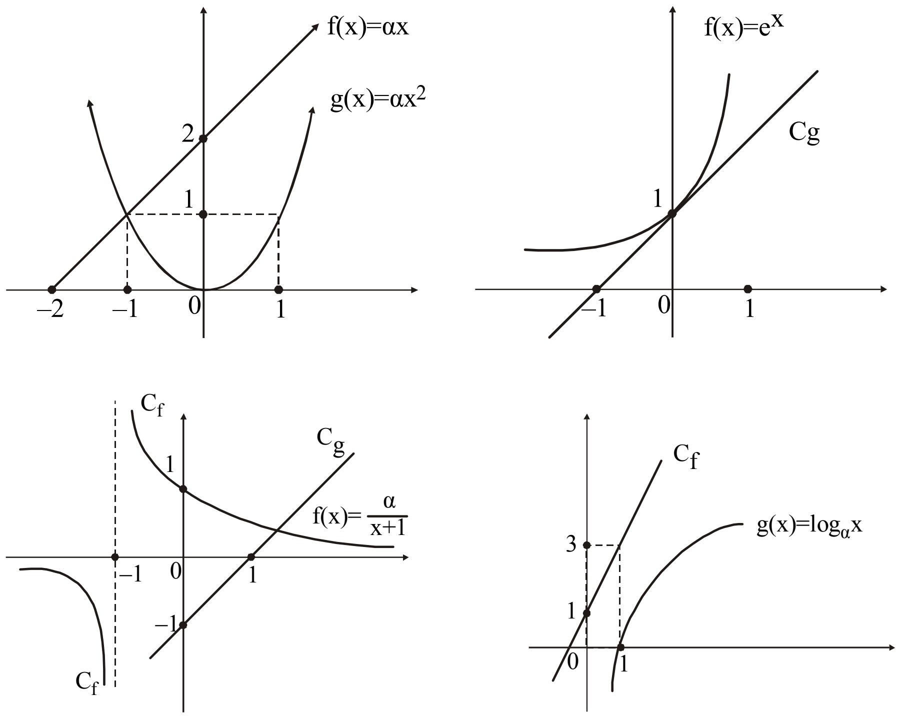
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(gof)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

18. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g.



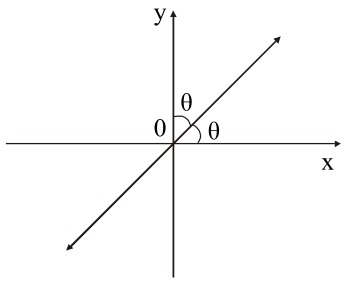
Σε κάθε περίπτωση:

α) Να βρείτε τους τύπους των f, g.

β) Να βρείτε τον τύπο της fog.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη fog.

19. ** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x + 1. Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε η γραφική παράσταση της fog να είναι η ευθεία του διπλανού σχήματος.



20. ** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx + β$, $α \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$ β) $f = -f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$

($c \neq 0$, σταθερά)

21. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να δείξετε ότι $f^{-1} = f$.

β) Τι μπορείτε να πείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής;

22. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$ και $g(x) = x^2 - 1$ με πεδίο ορισμού το R.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε την $h(x) = (gof^{-1})(x)$.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της h.

ε) Από την C_h να βρείτε το σύνολο τιμών της h και τα ακρότατα αυτής.

23. ** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - x$, $x \in [1, +\infty)$ και $g(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$.

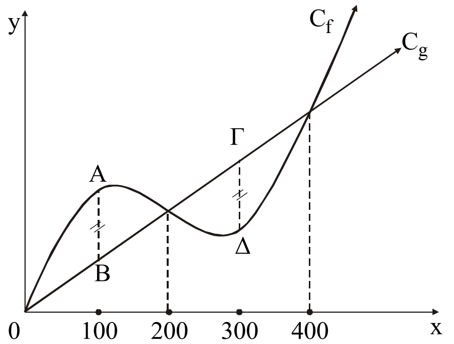
α) Να βρείτε τη συνάρτηση gof.

β) Να αποδείξετε ότι η gof είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της gof και να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της $(gof)^{-1}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $(gof)^{-1}(x) = x$.

24. ** Η συνάρτηση f του κόστους παραγωγής x τεμαχίων ενός προϊόντος μιας επιχείρησης καθώς και η συνάρτηση g των εσόδων της επιχείρησης από την πώληση των x τεμαχίων, έχουν γραφικές παραστάσεις C_f και C_g που φαίνονται στο σχήμα.



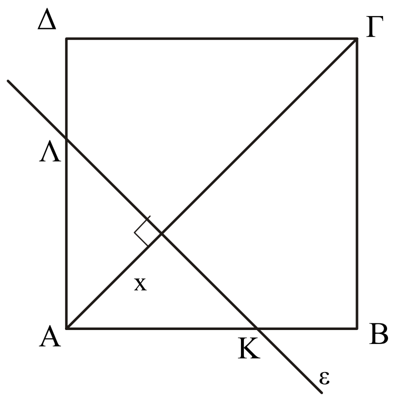
α) Να βρείτε σε ποιο διάστημα πρέπει να βρίσκεται ο αριθμός των τεμαχίων που παράγει η επιχείρηση ώστε αυτή να έχει κέρδος.

β) Πόσα αντικείμενα πρέπει να παράγει για να έχει μέγιστο κέρδος;

γ) Αν παράγει λιγότερα από 200 ή περισσότερα από 400 αντικείμενα, τι μπορείτε να πείτε για το κέρδος της επιχείρησης;

δ) Αν η επιχείρηση δεν μπορεί να παράγει περισσότερα από 200 αντικείμενα, τότε τι μπορείτε να πείτε αν παράγει 100 αντικείμενα;

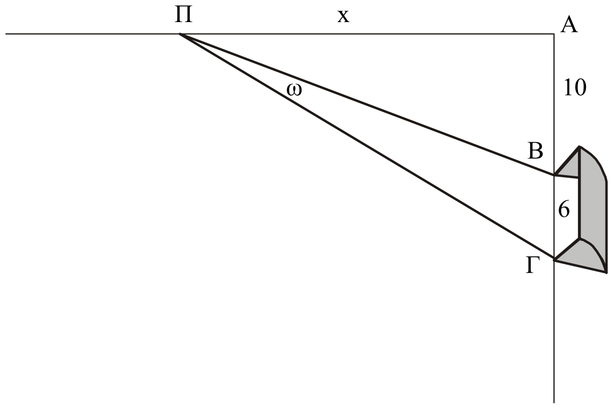
25. ** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 1. Μια ευθεία ε που είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ, τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Κ, Λ αντιστοίχως και έστω x η απόσταση της ε από την κορυφή Α. Η ευθεία αυτή χωρίζει το τετράγωνο σε δύο χωρία.



α) Να εκφράσετε το εμβαδό Ε του χωρίου που περιέχει την κορυφή Α, ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε τις τιμές Ε (0), Ε ($\sqrt{2}$), Ε (1), Ε ($\frac{\sqrt{2}}{2}$).

26. ** Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα ΒΓ κινούμενος πάνω στην ευθεία ΠΑ. Αν ΑΒ = 10 και ΒΓ = 6:



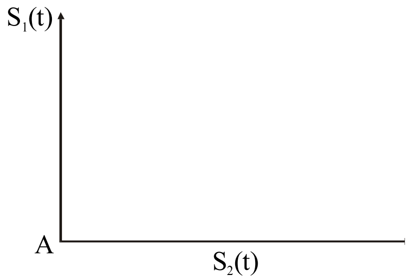
α) να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών ΑΠΒ και ΑΠΓ ως συνάρτηση της απόστασης ΠΑ = x

β) να υπολογίσετε την εφω ως συνάρτηση του x

γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να "σουτάρει" ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

Δίνεται ότι εφ (α - β) = $\dfrac{\text{εφα} - \text{εφβ}}{1 + \text{εφα} \cdot \text{εφβ}}$.

27. ** Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με ταχύτητα υ_1 = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με ταχύτητα υ_2 = 80 km/h.



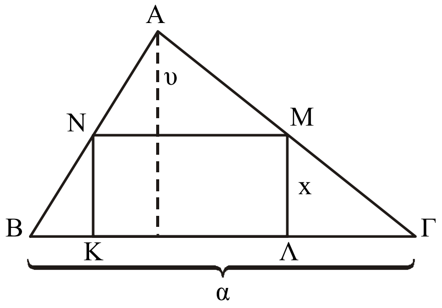
α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t.

Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ ως συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;

28. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση α και ύψος υ. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

29. ** Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές:

$\frac{1}{2}$ s, 1 s, 2 s, 3 s, $\frac{7}{2}$ s, 4 s.

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9}$ m;

δ) Να βρείτε το λόγο $\upsilon(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

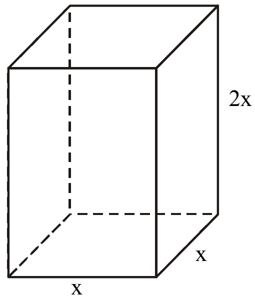
30. ** Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί μέχρι 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$ (t ακέραιος). Το ημερήσιο κόστος K (x) σε χιλιάδες "εύρο" για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι

$K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος Κ ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

β) Μέχρι πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια "εύρο";

31. ** Το ορθό πρίσμα του διπλανού σχήματος έχει βάση τετράγωνο πλευράς x και ύψος 2x.



α) Να εκφράσετε το εμβαδό Ε της επιφάνειας του πρίσματος ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε τις τιμές Ε (1), Ε (3), Ε (6), Ε ($\frac{1}{2}$).

γ) Σχολιάστε την τιμή Ε (-3).

32. ** Ένα κατάστημα πουλά τσάντες με 10.000 δρχ. κόστος για την κάθε τσάντα. Εκτιμάται ότι, αν η κάθε τσάντα πωλείται x χιλιάδες δρχ., αγοράζονται 70 - x τσάντες το μήνα.

α) Να εκφράσετε το μηνιαίο κέρδος ως συνάρτηση του x.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε την τιμή πώλησης για την οποία το κατάστημα θα έχει το μέγιστο κέρδος.

33. ** Για να περιοριστεί η κατανάλωση νερού σε μία πόλη, ανακοινώνεται ότι μια οικογένεια 4 ατόμων, θα πληρώνει το μήνα για τα πρώτα 1.200 κ.μ. νερού, 1.000 δρχ. τα 100 κ.μ.. Από 1.200 - 2.400 κ.μ. θα πληρώνουν 10.000 δρχ. τα 100 κ.μ., και αν η κατανάλωση ξεπερνά τα 2.400 κ.μ., θα πληρώνουν 40.000 δρχ. για τα 100 κ.μ. Να εκφράσετε το μηνιαίο λογαριασμό της οικογένειας σε χιλιάδες ως συνάρτηση της ποσότητας του νερού που καταναλώνει.

34. ** Όταν η τιμή μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο είναι x χιλιάδες δραχμές, τότε η προσφορά της (για πώληση) είναι Π (x) = x^2 + αx - 3 δεκάδες χιλιάδες τεμάχια, ενώ η ζήτησή της (για αγορά) είναι Ζ (x) = βx + 32 δεκάδες χιλιάδες τεμάχια (α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί). Ένας αξιόπιστος σύμβουλος επενδύσεων εκτιμά ότι κανείς δεν πρόκειται να πουλήσει μετοχές στην τιμή των 3.000 δραχμών (και κάτω) ενώ κανείς δεν πρόκειται να αγοράσει μετοχές στην τιμή των 4.000 δραχμών (και άνω).

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις Π (x) και Ζ (x).

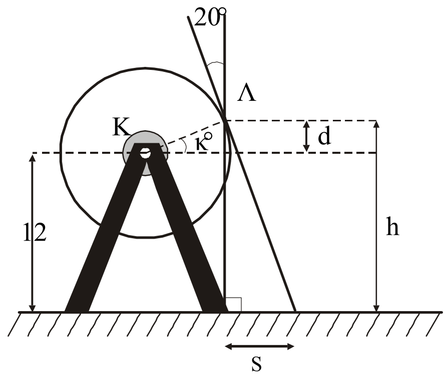
β) Να υπολογίσετε την αξία της μετοχής όταν η ζήτηση είναι τετραπλάσια της προσφοράς.

35. ** Το εισιτήριο του τρένου μεταξύ δύο ορισμένων σταθμών κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

36. ** Σε ένα Λούνα Παρκ ο μεγάλος τροχός έχει ακτίνα 10 m και το κέντρο του Κ βρίσκεται 12 m πάνω από το έδαφος. Στην καρέκλα Λ του τροχού οι ακτίνες του ηλίου πέφτουν υπό γωνία 20° ως προς την κατακόρυφο. Με τη βοήθεια του σχήματος, να εκφράσετε:



α) το d ως συνάρτηση του κ

β) το h ως συνάρτηση του d

γ) το s ως συνάρτηση του h

δ) να βρείτε τη συνάρτηση sohod.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Λ**	**10. i)**	**Σ**	**19.**	**Σ**
2.	**Σ**	**10. ii)**	**Σ**	**20.**	**Σ**
3.	**Σ**	**11.**	**Σ**	**21.**	**Σ**
4.	**Σ**	**12.**	**Λ**	**22.**	**Λ**
5.	**Λ**	**13.**	**Σ**	**23.**	**Σ**
6.	**Σ**	**14.**	**Σ**	**24.**	**Λ**
7.	**Λ**	**15.**	**Σ**	**25.**	**Λ**
8.	**Σ**	**16.**	**Σ**	**26. i)**	**Λ**
9.	**Σ**	**17.**	**Λ**	**26. ii)**	**Λ**
		18.	**Λ**	**27.**	**Λ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Β**	**11.**	**Α**	**21.**	**Α**
2.	**Γ**	**12.**	**Ε**	**22.**	**Δ**
3.	**Δ**	**13.**	**Γ**	**23.**	**Β**
4.	**Γ**	**14.**	**Γ**	**24.**	**Γ**
5.	**Β**	**15.**	**Β**	**25.**	**Ε**
6.	**Δ**	**16.**	**Δ**	**26.**	**Δ**
7.	**Β**	**17.**	**Β**	**27.**	**Δ**
8.	**Ε**	**18.**	**Δ**	**28.**	**Δ**
9.	**Δ**	**19.**	**Β**	**29.**	**Ε**
10.	**Γ**	**20.**	**Β**	**30.**	**Β**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

19. Στην ερώτηση αυτή δεν μπορούμε εύκολα να αποκλείσουμε κάποιες απαντήσεις. Ο στόχος της ερώτησης είναι να «θυμηθούμε» ότι δυο συμμετρικά σημεία ως προς τον y΄y θα έχουν συντεταγμένες (x, y) και (- x, y). Έτσι, αν στον τύπο $y = 1 - 2^x$ θέσουμε όπου x το - x, βρίσκουμε $y = 1 - 2^{-x}$ και η σωστή απάντηση είναι Β.

24. Εδώ θέλουμε να επισημάνουμε αφενός τη μονοτονία (και το 1-1) κάποιων γνωστών συναρτήσεων, αφετέρου την κατανόηση του ορισμού της 1-1 συνάρτησης. Όλες οι συναρτήσεις Α, Β, Δ, Ε προφανώς είναι 1-1, άρα αντιστρέφονται. Έτσι απομένει η Γ, η οποία δεν είναι αντιστρέψιμη.

27. Φαινομενικά η ερώτηση έχει πολλές πράξεις ή μπορεί να θεωρηθεί άσκηση ανάπτυξης, αφού πρέπει να βρεθεί η gof. Εκείνο όμως που θέλαμε να τονίσουμε μ’ αυτή την ερώτηση είναι ότι αν η πρώτη (με τη σειρά που γράφονται) συνάρτηση μιας σύνθεσης συναρτήσεων είναι σταθερή, τότε και η σύνθεση είναι σταθερή με την ίδια τιμή. Έτσι έχουμε (gof) (x) = g (f (x)) = 7.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	η
3	γ
4	γ
5	γ
6	δ
7	ε

2.

1	ε
2	γ
3	α
4	β

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α

4.

1	β
2	α
3	ε
4	δ

5.

1	δ
2	ε
3	β
4	α

6.

1	γ
2	α
3	η
4	ζ

7.

1	γ
2	α
3	β
4	δ

8.

1	β
2	α
3	γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) < g(x_4) < f(x_4) < f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$

2. f, φ, h, g.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

2. **α)** $D_f = (-1, 1)$

β) $\log \dfrac{1-x_1}{1+x_1} + \log \dfrac{1-x_2}{1+x_2} = \log \left(\dfrac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \dfrac{1-x_2}{1+x_2} \right) = \log \dfrac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$

$$\log \frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2} = \log \frac{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = \log \frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$$

3. **α)** Αν $x = y = 0$, τότε $f(0) + f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 3f(0)$, δηλαδή $f(0) = 0$

β) Αν $y = x$, τότε $f(2x) + f(0) = 2f(x) + f(x)$, άρα $f(2x) = 3f(x)$

Αν $y = -x$, τότε $f(0) + f(2x) = 2f(x) + f(-x)$, άρα $f(2x) = 2f(x) + f(-x)$, οπότε $3f(x) = 2f(x) + f(-x)$, δηλαδή $f(x) = f(-x)$

γ) i) $x > 0$, οπότε $f(|x|) = f(x)$

ii) $x < 0$, οπότε $f(|x|) = f(-x) = f(x)$, γιατί f άρτια

4. $p(x) = \sqrt{-x^2+8x-12}$, $\quad x \in [2, 6]$

5. $$F(x) = \begin{cases} x-9, & x \le -3 \\ -14x+9, & -3 < x < 2 \\ -20x+25, & x \ge 2 \end{cases}$$

6. **α)** Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Διπλασιασμός των τιμών της f

γ) Συμμετρική ως προς τον y΄y

δ) Τα τμήματα της C_f πάνω από τον x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν.

7. Θεωρώ $x_1 > x_2$ και $(\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_1) = \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)}$, αλλά $f(x_1) > f(x_2)$, γιατί f αύξουσα. Αφού $f(x_1)$, $f(x_2) > 0$, τότε θα ισχύει $\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$. Όμοια $\frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$, οπότε $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)} = (\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_2)$.

Τελικά $(\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_1) < (\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_2)$, δηλαδή $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ φθίνουσα.

8. **α)** $Df = [-3, 3]$ **β)** $f(A) = [-2, 2]$

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 0$ ή $x = 3$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1$, $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 1$

δ) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$, $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$, $f(x) < -2$ αδύνατη

ε) δεν είναι άρτια **ζ)** είναι περιττή **η)** δεν είναι 1 - 1

9. **α)** $\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$, δηλαδή $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha \in R$, άρα και για $\alpha > 0$

β) Εφαρμογή του (α) για x = α. Άρα, αφού $x + \frac{1}{x} \geq 2$, το 2 θα είναι το ελάχιστο. Αν $x + \frac{1}{x} = 2$, $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

11. **α)** Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Συμμετρική ως προς τον x΄x

γ) Τα τμήματα πάνω από τον x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν

12. **α)** $D_g = [-3, 1] \cup [3, 6]$ $\quad$ $g(A) = [-3, -1] \cup [0, 2]$

β) $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ $\quad$ **γ)** $x = -3$ και $x = 1$

δ) $[-3, -\frac{8}{3}) \cup (-1, 1]$ $\quad$ **ii)** $x \in [3, 6]$

14. **α)** $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-(x+2)^2}, & -4 \le x < 0 \\ \sqrt{4-(x+2)^2}, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

γιατί για $0 \le x \le 4$ ισχύει $(x-2)^2 + y^2 = 4$, δηλαδή $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

και για $-4 \le x \le 0$ ισχύει $(x+2)^2 + y^2 = 4$, δηλαδή $y = -\sqrt{4-(x+2)^2}$

β) $-4 \le x < -2$, $\quad$ f γνησίως φθίνουσα

$-2 \le x < 2$, $\quad$ f γνησίως αύξουσα

$2 \le x \le 4$, $\quad$ f γνησίως φθίνουσα $\quad$ Ακρότατα $f_{min} = -2$ $\quad$ $f_{max} = 2$

15. $h(x) = x - 3$ $\quad$ $g(x) = \frac{5}{x} + 3x$

16. **α)** $g(x) = συνx$, $f(x) = x^2$

β) $g(x) = x^2 + 2$, $f(x) = 3x^3$

γ) $g(x) = \dfrac{1}{συνx}$, $f(x) = x^2$

δ) $g(x) = \dfrac{1}{x^{ν}}$, $f(x) = ημx$

ε) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

17. **α)** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1\}$

β) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$, $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

γ) $(gof)(x) = \dfrac{2 - x}{x}$, ενώ $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

δ) δεν είναι ίσες.

18. **α)** $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$

β) *1ο σχήμα:* $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$, τότε $(fog)(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

2ο σχήμα: $f(x) = x + 1$, $g(x) = e^x$, τότε $(fog)(x) = f(e^x) = e^x + 1$

3ο σχήμα: $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$, τότε $(fog)(x) = f(x - 1) = \dfrac{1}{x}$

4ο σχήμα: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = logx$, τότε $(fog)(x) = f(logx) = 2logx + 1$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$ **δ)** $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = logx$

19. Πρέπει $(fog)(x) = x$, δηλαδή $f(g(x)) = x$, δηλαδή $g(x) + 1 = x$, οπότε $g(x) = x - 1$

20. α) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $-\frac{\beta}{\alpha}$

β) $f^{-1}(x) = +\frac{1}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha}$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $\frac{\beta}{\alpha}$

γ) $f^{-1}(x) + c = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha} + c$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $-\frac{\beta}{\alpha} + c$

21. α) $y = \frac{1-x}{1+x}$, οπότε $y(1+x) = 1 - x$, δηλαδή $x = \frac{1-y}{1+y}$. Έχουμε λοιπόν $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$

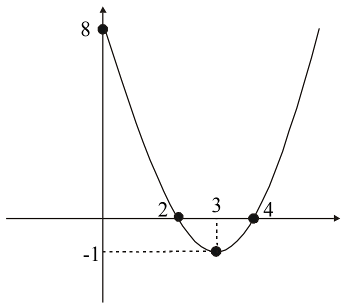
β) Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία y = x.

22. α) Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα f 1-1

β) $y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$, δηλαδή $f^{-1}(x) = x - 3$ $\quad D_{f^{-1}} = R$

γ) $h(x) = (gof^{-1})(x) = g(x-3) = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$

δ)



ε) $h(A) = [-1, +\infty)$. Έχει ελάχιστο το - 1 για x = 3

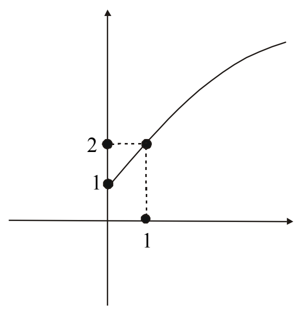
23. **α)** $y = 1 - x$, άρα $x = 1 - y$ με $1 - y \geq 1$, δηλαδή $y \leq 0$, οπότε $f(A) \subset Dg$, άρα $(gof)(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2$

β) Έστω x_1, x_2 ανήκουν στο Dg με $x_1 > x_2$, τότε $- x_1 < - x_2$ και $1 - x_1 < 1 - x_2$, δηλαδή $(1 - x_1)^2 < (1 - x_2)^2$, οπότε η g είναι φθίνουσα

γ) $y = x^2 - 2x + 1$, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 - y = 0$,

οπότε $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{y}}{2} = 1 \pm \sqrt{y}$, δηλαδή

$(gof)^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$



δ) $(gof)^{-1}(x) = x$ δηλαδή $1 + \sqrt{x} = x$, $x > 0$,

δηλαδή $x - \sqrt{x} - 1 = 0$.

Θέτω $z = \sqrt{x}$, οπότε $z^2 - z - 1 = 0$ και $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, άρα

$x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

24. **α)** μεταξύ 200 και 400 **β)** 300

γ) δεν έχει κέρδος **δ)** θα έχει τη μέγιστη ζημιά

25. **α)** Ισχύει $\dfrac{ΛK}{ΔB} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, δηλαδή $ΛK = \dfrac{x \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2x$, $(ΔB = AΓ = \sqrt{2})$

$E(x) = \dfrac{ΛK \cdot x}{2} = \dfrac{2x \cdot x}{2} = x^2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Όμοια, αν $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, ισχύει $E(x) = 1 - (\sqrt{2} - x)^2$.

β) $E(0) = 0^2 = 0$, $E(\sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 1$,

$E(1) = 1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = - 2 + 2\sqrt{2}$, $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

26. α) $\dfrac{10}{x}$, $\dfrac{16}{x}$ **β)** εφω = $\dfrac{6x}{x^2+160}$

γ) $y = \dfrac{6x}{x^2+100} \Leftrightarrow yx^2 - 6x + 160y = 0$ άρα πρέπει $y^2 \le \dfrac{9}{160}$, άρα $y^2 = \dfrac{9}{160}$

για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{6}{2y} = \sqrt{160}$ μέτρα $\approx$ 12,6 m

27. α) $s\,(t) = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2} = 100t$.

Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα 100 km/h

β) $AM = \dfrac{s}{2} = 50t$

γ) Έστω ότι πρέπει να έχει ταχύτητα x km/h. Τότε $AM = \dfrac{s\,(t)}{2}$, άρα

$180 = \dfrac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}$. Για t = 4, έχουμε $\sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90$,

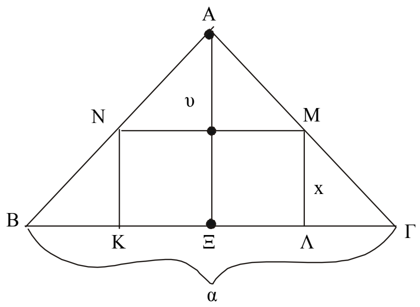
οπότε $x \approx 67$. Άρα ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 13 km/h περίπου.

28. α) L = 2x + 2 (α - ΛΓ - ΒΚ). Ισχύει $\dfrac{x}{\upsilon} = \dfrac{\Lambda\Gamma}{\Gamma\Xi}$ και $\dfrac{x}{\upsilon} = \dfrac{BK}{B\Xi}$, οπότε

$\Lambda\Gamma = \dfrac{x \cdot \Gamma\Xi}{\upsilon}$, $BK = \dfrac{x \cdot B\Xi}{\upsilon}$,

δηλαδή $\Lambda\Gamma + BK = \dfrac{x}{\upsilon}\,(\Gamma\Xi + B\Xi) = \dfrac{x}{\upsilon}\,\alpha$,

δηλαδή $L = 2x + 2\,(\alpha - \dfrac{x}{\upsilon}\alpha)$



β) $ΚΛ = α - (ΒΚ + ΛΓ) = α - \frac{x}{υ}α$, $Ε = ΚΛ \cdot x = (α - \frac{x}{υ}α)\, x = αx - \frac{αx^2}{υ} =$

$α\,(1 - \frac{x}{υ})\, x$

29. **β)** $f(x) = 20t - 5t^2$. Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$, το οποίο είναι $f(2) = 20$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $\frac{160}{9} = 20t - 5t^2$ και έχουμε $t_1 = \frac{8}{3}$ s και $t_2 = \frac{4}{3}$ s

δ) $υ(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{20t - 2t^2 - 40 + 20}{t - 2} = \frac{20t - 2t^2 - 20}{t - 2} =$

$\frac{-5t(t-2) + 10(t-2)}{t-2} = -5t + 10$

30. **α)** Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η σύνθεση της $Κ(x)$ με την $Ν(t)$, δηλαδή: $Κ(t) = 15 + 800t - 40t^2$, t ακέραιος με $0 \le t \le 10$

β) $Κ(t) \le 3.885$ και $0 \le t \le 10$, άρα $0 \le t \le 8{,}2$ ή $t \ge 11{,}8$, άρα $t = 8$

31. $Ε(x) = 10x^2$

32. **α)** $Κ(x) = x(70 - x) - 10(70 - x) = -x^2 + 80x - 700$

γ) Μέγιστο έχουμε, για $x = -\frac{β}{2α} = 40$, άρα η τιμή πώλησης θα πρέπει να είναι 40.000 δρχ.

33. Για $0 \leq x \leq 12$ είναι $f(x) = 1 \cdot x$, για $12 \leq x \leq 24$ είναι $f(x) = 12 + 10(x - 12)$,

οπότε $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 12 \\ 10x - 108, & 12 < x \leq 24 \\ 40x - 828, & x > 24 \end{cases}$

34. α) $\Pi(3) = 0$, άρα $9 + 3\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$

$Z(4) = 0$, άρα $4\beta + 32 = 0 \Leftrightarrow \beta = -8$

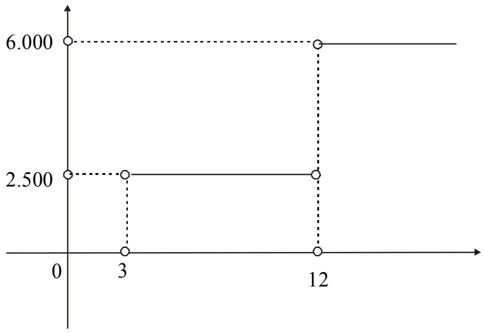
$\Pi(x) = x^2 - 2x - 3$ $\quad\quad Z(x) = -8x + 32$

Πρέπει $\Pi(x) = Z(x)$, άρα $x = 3{,}633$, δηλαδή 3.633 δρχ.

β) Πρέπει $Z(x) = 4\Pi(x)$, άρα $x^2 = 11$, δηλαδή $x = 3{,}316$ ή 3.316 δρχ.

35. α) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 3 \\ 2500 & 3 \leq x < 12 \\ 6000 & 12 \leq x \end{cases}$

β)



36. α) $d = 10\eta\mu\kappa$ $\quad\quad$ **β)** $h = 12 + d$ $\quad\quad$ **γ)** $s = h \cdot \varepsilon\varphi 20°$