

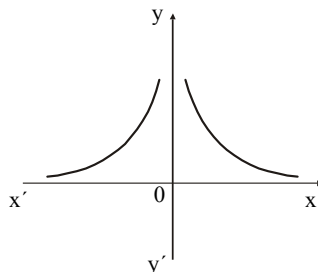
Κεφάλαιο 2ο: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

- | | | |
|---|---|---|
| 1. * Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 , έναν πραγματικό αριθμό ℓ . Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της. | Σ | Λ |
| 2. * Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f , όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 , συμπίπτουν πάντοτε. | Σ | Λ |
| 3. * Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. | Σ | Λ |
| 4. * Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε αυτό το όριο είναι μοναδικό. | Σ | Λ |
| 5. * Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , αν υπάρχει, εξαρτάται από τα άκρα α, β των διαστημάτων $(\alpha, x_0), (x_0, \beta)$ στα οποία ορίζεται η f . | Σ | Λ |
| 6. * Ισχύει πάντοτε $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, όπου c σταθερά και $x_0 \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 7. ** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε υπάρχει συνάρτηση φ με $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ και $f(x) = \ell + \varphi(x)$. | Σ | Λ |
| 8. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0 . | Σ | Λ |
| 9. ** Αν για τις συναρτήσεις f, φ ισχύει $ f(x) - \alpha \leq \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$. | Σ | Λ |
| 10. ** Αν για τις συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ τότε πάντοτε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | Σ | Λ |

11. ** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$, $\ell \neq 0$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Σ Λ
12. * Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Σ Λ
13. * Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{x} = 1$ με $\alpha \neq 0, 1$. Σ Λ
14. * Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
15. ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι πάντοτε μη συνεχής στο x_0 . Σ Λ
16. * Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0 . Τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Σ Λ
17. * Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
18. ** Αν οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το Δ **δεν** είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f + g$ μπορεί να είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
19. ** Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f^2 δεν είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ
20. ** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $x \cdot f(x) = \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(0) = 2$. Σ Λ
21. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . Σ Λ

22. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι συνεχής στο D_f .



23. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) τότε είναι συνεχής και στο $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

24. ** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

25. * Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

26. * Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

27. ** Αν $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, τότε η συνάρτηση $g(x) = x f(x)$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 1$.

28. * Αν $f(x) = 2 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

29. * Έστω οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε η συνάρτηση $f + g$ έχει πάντοτε όριο στο x_0 τον αριθμό 0.

30. * Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, τότε η f έχει όριο στο $+\infty$ τον αριθμό 2.

Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

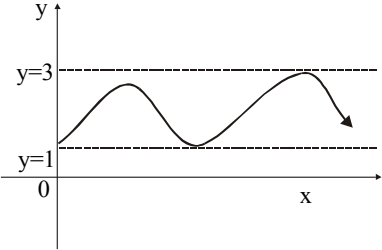
Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

Σ Λ

31. * Αν $f(x) = \log x - 2, x > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$. Σ Λ
32. * Η συνάρτηση $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha \neq 0$ και $n \geq 2$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Σ Λ
33. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$ με $\alpha_n, \beta_\mu \neq 0$ έχει:
- i) οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 0$, αν $n < \mu$ Σ Λ
- ii) οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\alpha_n}{\beta_\mu}$, αν $n = \mu$ Σ Λ
- iii) οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = \alpha_n$, αν $n > \mu$. Σ Λ
34. ** Η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{-2x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 1$. Σ Λ
35. ** Η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^3}$ έχει:
- i) κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ Σ Λ
- ii) οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = -1$. Σ Λ
36. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα δεν έχει όριο στο $+\infty$.
- 

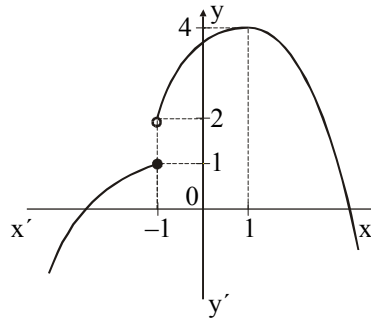
Σ Λ
37. * Αν $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}, x < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$. Σ Λ

38. * Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$. Σ Λ
39. * Αν $f(x) = \ln(x-2)$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$. Σ Λ
40. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ έχει:
- i) κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = -3$ Σ Λ
- ii) οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 1$. Σ Λ
41. ** Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν δύο οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Σ Λ
42. * Υπάρχουν συναρτήσεις με περισσότερες από μία κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ
43. ** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Σ Λ
44. * Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = a$. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

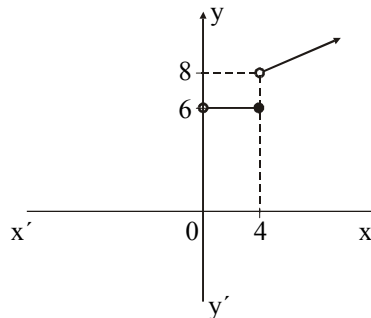
1. * Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, τότε **λάθος** είναι

- Α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ Β. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$
 Γ. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$ Δ. $f(-1) = 2$
 Ε. $f(1) = 4$



2. * Για τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει

- Α. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 6$ Β. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 8$
 Γ. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
 Δ. υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
 Ε. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$



3. * Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$, τότε **δεν** ισχύει ότι

- Α. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = 1$ Β. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] = -6$
 Γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2}{3}$ Δ. $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + 3g(x)] = 13$
 Ε. $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 2$

4. * Αν $f(x) \leq g(x)$ με $x \in (1, 3)$, και οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο 2, τότε ισχύει πάντοτε

A. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) < 0$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ Δ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

5. * Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ με $x \in (0, 2)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$, τότε

ισχύει ότι

A. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{2}$ B. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] = 3$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 1} [h(x) - f(x)] = 3$ Δ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

6. * Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{|x|}$, τότε

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ Δ. δεν υπάρχει όριο της f στο 0

Ε. κανένα από τα παραπάνω

7. * Το $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x}$ είναι ίσο με

A. 0 B. 1 Γ. $+\infty$ Δ. -1 Ε. π

8. * Αν $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) = 2$, τότε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ είναι ίσο με

A. 0 B. 2 Γ. 3 Δ. -1 Ε. -2

9. * Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε πάντοτε ισχύει ότι

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Γ. για το όριο της συνάρτησης $f \cdot g$ στο x_0 έχουμε απροσδιόριστη μορφή

Δ. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] > 0$

Ε. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] < 0$

10. * Διαθέτουμε έναν υπολογιστή τσέπης, με αρκετά ισχυρή μνήμη ώστε να δίνει προσέγγιση εκατομμυριοστού, και προσπαθούμε να υπολογίσουμε το $\eta_{0,025}$ (το τόξο έχει μετρηθεί σε rad). Ποια από τις παρακάτω τιμές θα εμφανιστεί στην οθόνη;

A. 0,027131

B. 0,012325

Γ. 0,075

Δ. 0,024997

Ε. 0,025

11. * Από τις παρακάτω ισότητες να βρείτε αυτήν που είναι **λάθος**

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$

Δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \sin^2 x} = +\infty$

Ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{x^3} = +\infty$

12. * Για τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει

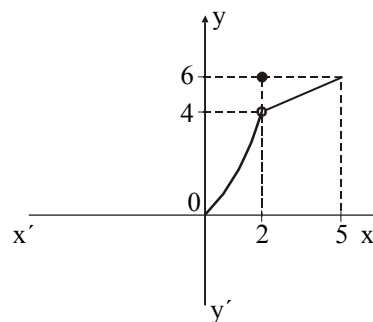
A. η f είναι συνεχής στο $[0, 5]$

B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

Δ. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

Ε. $f(2) \neq 6$



13. * Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , τότε ισχύει πάντοτε

- A. η συνάρτηση f είναι 1 - 1
- B. η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται
- Γ. η συνάρτηση f είναι συνεχής
- Δ. η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
- E. η συνάρτηση f είναι άρτια

14. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε

- A. υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$
- B. δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Γ. ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- Δ. ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- E. ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

15. * Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\varphi(\pi x)}{x}, & x \neq 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, τότε το κ

είναι ίσο με

- A. 1
- B. 0
- Γ. π
- Δ. $\frac{\pi}{2}$
- E. $-\pi$

16. * Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$ και οι προτάσεις:

- I. υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- II. $f(2) = 6$

III. η f είναι συνεχής στο 2.

Τότε αληθεύουν

- A. μόνο η I
- B. μόνο η II
- Γ. οι I και II
- Δ. καμία από τις τρεις
- E. και οι τρεις

17. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq \alpha \\ \lambda x + \beta, & x < \alpha \end{cases}$ ισχύει

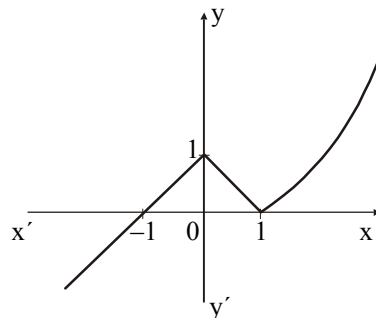
- A. η f δεν είναι συνεχής στο $(\alpha, +\infty)$
- B. η f είναι συνεχής για κάθε $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$
- Γ. η f δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, \alpha)$
- Δ. αν η f είναι συνεχής στο α , τότε $\beta = \alpha^2 - \lambda\alpha$
- E. δεν υπάρχουν $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο α

18. * Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και οι προτάσεις:

- I. f συνεχής II. f άρτια III. f γνησίως μονότονη
- Η αντίστροφη της f υπάρχει, όταν ισχύει
- A. η I B. η II Γ. οι I και II Δ. η III
 - E. η I ή η II

19. * Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι

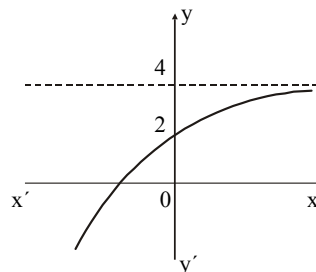
- A. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$
- B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- Γ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- Δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- E. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



20. * Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4 - 2e^{-x}$ ισχύει

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

Γ. η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα



Δ. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

21. * Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1}{(4 - x)(4 + x)}$ είναι ίσο με

- A. - 16 B. - 4 Γ. 1 Δ. $+\infty$ Ε. $-\infty$

22. * Αν $f(x) = e^{-x} - 2$, τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ Γ. - 2 Δ. - 1 Ε. 0

23. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{4x^2 + 7}$. Η τιμή $f(10^{2004})$ προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τον αριθμό

- A. 1,4 B. 10^4 Γ. 0,75 Δ. 0,25 Ε. $\frac{1}{7}$

24. * Αν n ακέραιος θετικός τότε **δεν** αληθεύει πάντα ότι

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

Δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

Ε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$, αν n άρτιος

25. * Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{-x^3 + 2x + 1}{x - 3}$ ισχύει
- A. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 3$
 B. η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη
 Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Δ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ Ε. όλα τα παραπάνω
26. * Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + \lambda^2}{x - 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι αληθής;
- A. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 1$
 B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 Γ. η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 1$
 Δ. η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{1\}$
 Ε. η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
27. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$, ισχύει
- A. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 2$
 B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
 Γ. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 1$
 Δ. υπάρχει στο \mathbb{R} το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ Ε. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
28. ** Οι παρακάτω προτάσεις αναφέρονται στην συνάρτηση $f: (-1, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$.
- Να βρείτε αυτήν η οποία είναι σωστή.
- A. η f έχει μόνο οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 0$
 B. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
 Γ. η f δεν έχει ασύμπτωτες
 Δ. η f έχει οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη
 Ε. η f έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

29. * Η συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, και ισχύει $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$. Από τις παρακάτω προτάσεις είναι **λάθος** η

Α. η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = a$

Β. ισχύει $f(x) > 10^5$ για κάποια x κοντά στο a

Γ. $\lim_{x \rightarrow a^-} \kappa \cdot f(x) = +\infty$, όταν $\kappa > 0$

Δ. $\lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, όταν το x είναι κοντά στο a και $\kappa = 2, 3, \dots$

Ε. για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) \geq 0$

30. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$. Τότε ισχύει

Α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Β. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

Δ. η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ε. όλα τα παραπάνω

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα II ώστε σε κάθε γραφική παράσταση από τη στήλη A του πίνακα I να αντιστοιχούν οι σχέσεις που ισχύουν από τη στήλη B.

Πίνακας I

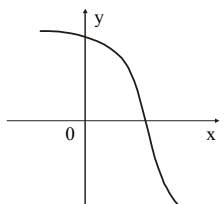
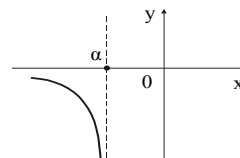
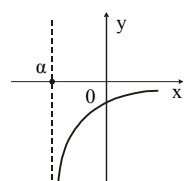
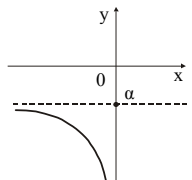
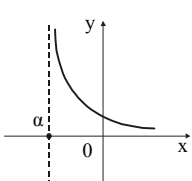
Στήλη A	Στήλη B
<p>1.</p> <p>$f(x)=a^x$ με $0 < a < 1$</p>	<p>α. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>
<p>2.</p> <p>$f(x)=a^x$ με $a > 1$</p>	<p>γ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$</p>
<p>3.</p> <p>$f(x)=\log_a x$ με $a > 1$</p>	<p>δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$</p> <p>ε. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$</p>
<p>4.</p> <p>$f(x)=\log_a x$ με $0 < a < 1$</p>	<p>ζ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>

Πίνακας II

1	2	3	4

2. ** Σε κάθε ισότητα της στήλης Α να αντιστοιχίσετε ένα γράφημα της στήλης Β του πίνακα Ι που την αναπαριστά, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β	
1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	α.	
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	β.	
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$	γ.	
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	δ.	
	ε.	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

3. ** Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται οι τύποι κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι εξισώσεις της οριζόντιας ή κατακόρυφης ασύμπτωτης των συναρτήσεων αυτών (αν υπάρχουν). Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$	α. δεν έχει οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη
2. $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$	β. η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
3. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4}$	γ. η $x = -2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη και δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη
4. $f(x) = \frac{2x-3}{x^3+1}$	δ. ο άξονας $x'x$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και η $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
5. $f(x) = \frac{3x^2+3x}{x+2}$	ε. η $x = -2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
	ζ. η $y = -2$ οριζόντια ασύμπτωτη
	η. η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

--	--	--	--	--

4. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα II, ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στη στήλη A του πίνακα I, να αντιστοιχούν οι σχέσεις που γράφονται στη στήλη B.

Πίνακας I

	Στήλη A	Στήλη B
1.		<p>α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta$</p>
2.		<p>β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$</p> <p>γ. $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = +\infty$</p>
3.		<p>δ. $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$</p> <p>ε. $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$</p>

Πίνακας II

1	2	3

5. ** Στη στήλη A του πίνακα I γράφονται μία ή δύο σχέσεις που σημαίνουν κάποιο από αυτά που γράφονται στη στήλη B. Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα II.

Πίνακας I

Στήλη A	Στήλη B
<p>1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$</p>	<p>α. η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$</p> <p>β. η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$</p>
<p>2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$</p>	<p>γ. η $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$</p>
<p>3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$</p>	<p>δ. η $x = x_0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$</p>
<p>4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$</p>	<p>ε. η $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f</p>

Πίνακας II

1	2	3	4

6. ** Σε κάθε γραφική παράσταση της συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι, να αντιστοιχίσετε μια σχέση της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

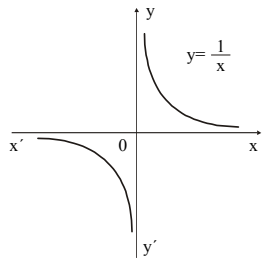
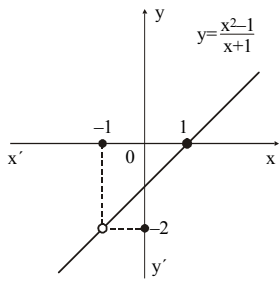
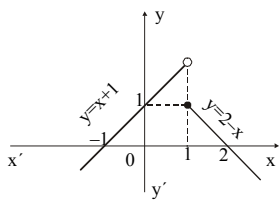
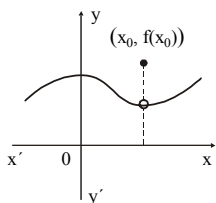
	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		<p>α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$</p>
2.		<p>γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$</p>
3.		<p>ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$</p> <p>ζ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -a$</p>
4.		

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

7. ** Σε κάθε γραφική παράσταση της συνάρτησης f της στήλης Α του πίνακα Ι, να αντιστοιχίσετε μια σχέση της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.		<p>α. συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$</p> <p>β. συνεχής στο $\mathbb{R} - \{2\}$</p>
2.		<p>γ. συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$</p> <p>δ. συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$</p>
3.		<p>ε. συνεχής στο \mathbb{R}</p> <p>ζ. συνεχής στο $\mathbb{R} - \{x_0\}$</p>
4.		

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4



Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. ** Να συμπληρώσετε τα κενά στη στήλη Β με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της στήλης Α.

Στήλη Α ιδιότητες της f	Στήλη Β γραφική παράσταση της f
1. $D_f = [2, 5]$ και f συνεχής στο $[2, 5]$	
2. $D_f = [0, 7]$ και $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$	
3. $D_f = [0, 3) \cup (2, 5]$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$	
4. $D_f = [3, 10]$ και $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) \neq f(7)$	

2. ** Να συμπληρώσετε τις ισότητες στη στήλη Β:

Στήλη Α συνάρτηση $f(x)$	Στήλη Β όριο της $f(x)$
1. $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots\dots\dots$
2. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$
3. $f(x) = -x^2$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$
4. $f(x) = x\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

Ερωτήσεις διάταξης

1. ** Αφού βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων στο $-\infty$, να τα διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3} \qquad g(x) = \frac{4x^2+5}{x^2-1} \qquad h(x) = \frac{-3x+7}{4x+3}$$

$$\varphi(x) = \frac{-3x^2+7x}{x^2+4} \qquad s(x) = \frac{-2x^4+3x^2}{4x^4+1}$$

2. * Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} , συνεχείς και ισχύει: f γνησίως αύξουσα, g γνησίως φθίνουσα και $f(2) = g(2)$. Να διατάξετε σε μία σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις παρακάτω διαφορές:

α) $f(e) - g(e)$

β) $f(\pi) - g(\pi)$

γ) $f(0) - g(0)$

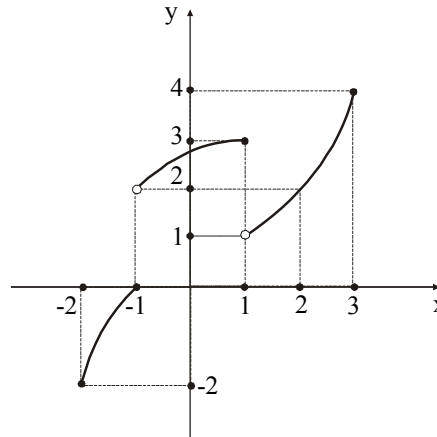
δ) $f(2) - g(2)$

ε) $f(3) - g(3)$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
 γ) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
 ε) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ στ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 ζ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$



2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$.

- α) Να βρείτε το D_f .
 β) Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

3. ** Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x - 1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^v - 1}{x}$.

4. ** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \eta\mu x}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - 2x}{x}$
 δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu 7x}$ ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 2x}{\eta\mu x}$

5. ** Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος v σε καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu vx}{x} = 28$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \dots \cdot \eta\mu vx}{x^v} = 120$$

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $g(x) = x^2 - 4$
 $h(x) = x^2 - 7x + 10$ $\varphi(x) = x^2 - 6x + 8$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x)$.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{\varphi(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$.

γ) Τι παρατηρείτε;

δ) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας.

7. ** Αν $|x| < 1$ και $|f(x) - 3| \leq |x|$, $|g(x) + 4| \leq |x|$, να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x))$$

8. ** Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια στο $x = x_0$:

$$\alpha) \text{ της } f(x) = \frac{2x^2 + 3}{|x|}, x_0 = 0 \quad \beta) \text{ της } g(x) = \frac{|x-1|}{2-x}, x_0 = 2.$$

9. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{3x+4}{(x-1)^2}$, $g(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$

$$h(x) = \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)^2}, \quad \varphi(x) = \frac{5x+6}{(x-1)^2}$$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)]$, $\lim_{x \rightarrow 1} [h(x) - \varphi(x)]$.

- γ) Τι παρατηρείτε;
 δ) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας.

10. ** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 2 \\ 4 + 2x & x \geq 2 \end{cases}, \text{ στο } (0, 2) \text{ και στο } [0, 2]$$

$$\beta) f(x) = \frac{2x+1}{3x-6} \qquad \gamma) f(x) = \begin{cases} \eta\mu 2x & x \neq 0 \\ x & \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

11. ** Έστω η συνάρτηση g συνεχής στο 0 και ισχύουν $g(0) = 0$ και $|f(x)| \leq |g(x)|, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

12. ** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο x_0 , ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)}{\eta\mu 2h} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = 0$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

13. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & \text{αν } x < 1 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ τις συναρτήσεις:

$$f+g \quad f-g \quad f \cdot g \quad 3f \quad \frac{1}{g} \quad \frac{f}{g(f)} \quad \sqrt[3]{f}$$

14. ** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $|f(x)| \leq |x^2 - 5x + 6|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και στο σημείο $x_0 = 3$.

15. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \text{συν}x}{x}$, $x \neq 0$. Είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή $f(0)$ με τέτοιο τρόπο, ώστε η f να είναι συνεχής στο \mathbb{R} ;

16. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3^x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 - x, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.

17. ** Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x \cdot \text{συν} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

18. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - \kappa x^2, & x > 1 \end{cases}$.

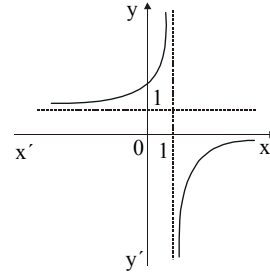
- α) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.
β) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

19. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$;

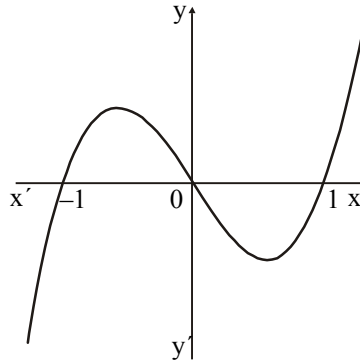


20. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



21. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$

22. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 7^x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 8^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x^3}{|x|+2}}$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ \ell n(x-1) - 2 \ell n(x+1) \}$

23. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

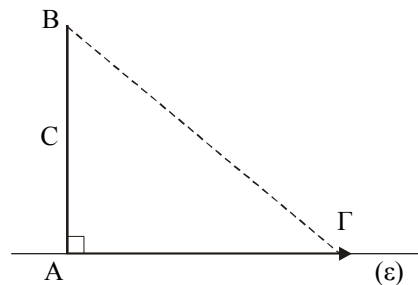
γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu^{\rho} \frac{1}{x})$ με $\rho \in \mathbb{N}^*$ και $\rho \geq 2$

24. ** Αν $f(x) = \frac{2\kappa}{\kappa e^x + 1}$ με $\kappa > 0$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

25. ** Το ευθύγραμμο τμήμα AB του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C . Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το A επάνω στην (ε) . Να αποδείξετε ότι τα μήκη των $B\Gamma$ και $A\Gamma$ τείνουν να γίνουν ίσα.



26. ** Αν $f(x) = \frac{x}{4-x}$ και $g(x) = \ell \ln \frac{x}{4-x}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x).$$

27. ** Αν $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

α) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

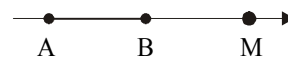
β) να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

28. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(1 - \ell nx)^2$, $x > 0$.

Ποιο είναι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

29. ** Αν $f(x) = \frac{1}{2 - e^{\frac{x}{2}}}$, να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

30. ** Δίνεται ένα τμήμα AB και στην προέκτασή του προς το B παίρνουμε σημείο M . Να βρείτε

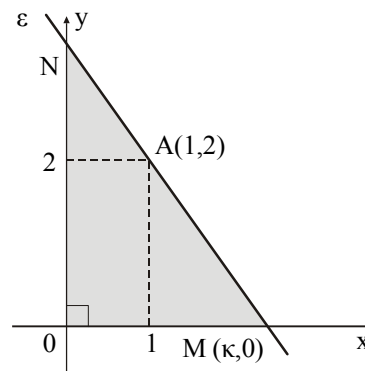


το όριο του λόγου $\frac{AM}{BM}$, καθώς το M απομακρύνεται στο άπειρο.

31. ** Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα M και N αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OMN ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου M .

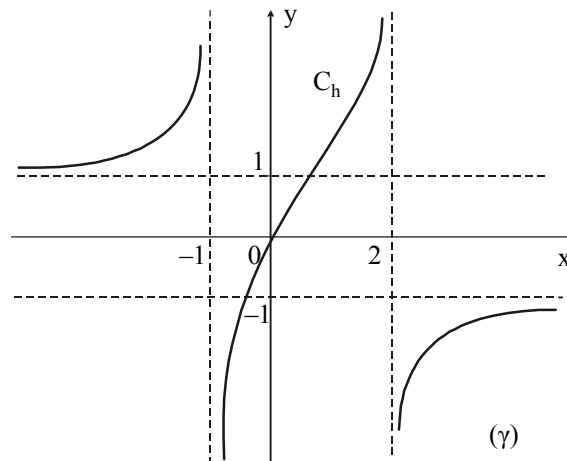
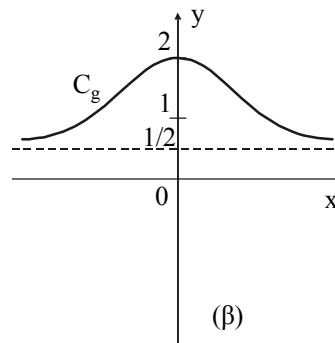
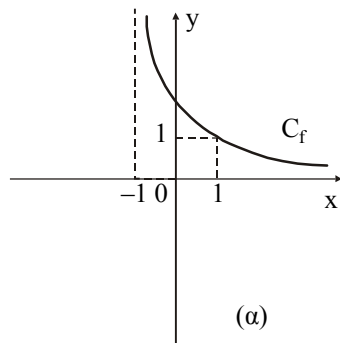
β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \rightarrow +\infty$ και όταν $\kappa \rightarrow 1$.



32. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x}{x^2 - 4}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Για ποια τιμή του α η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 2$;
 β) Για την τιμή του α που βρήκατε και για $\beta \neq -4$, να αποδείξετε ότι η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

33. ** Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f , g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.
 β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (κατακόρυφες, οριζόντιες).

34. ** Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f .

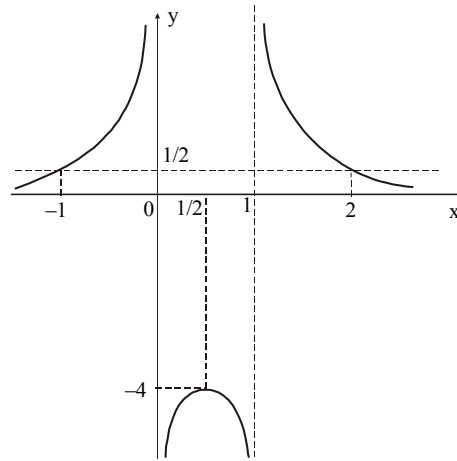
β) Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$$



γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω να προσδιορίσετε τις οριακές τιμές της $\frac{1}{f}$ στα σημεία του ερωτήματος (β).

δ) Να βρείτε τον τύπο της f , αν ξέρετε ότι είναι ένας από τους παρακάτω:

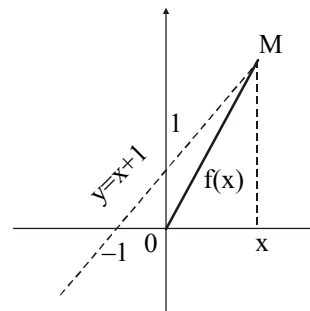
$$f_1(x) = \frac{2x+1}{6x+5}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{2|x^2-1|}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

35. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση $y = x + 1$ και το σημείο της M με τετμημένη x . Η απόσταση από το σημείο O δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = (OM)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Για ποια τιμή του x ισχύει $f(x) = 1$;

β) Για ποια τιμή του x η απόσταση γίνεται ελάχιστη;



γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και να εξηγήσετε τα αποτελέσματα γεωμετρικά (στο σχήμα).

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{2} (x + \frac{1}{2})) = 0$.

36. ** Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x + 36}{2x + 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 8 + \frac{12}{2x + 3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

37. ** Ένα κατάστημα νοικιάζει βιντεοκασέτες με τιμή 600 δρχ. για τις 4 πρώτες ημέρες. Αν ο χρόνος είναι μεγαλύτερος από 4 ημέρες, τότε ο πελάτης πληρώνει πρόστιμο 200 δρχ. και 75 δρχ. επιπλέον για την καθεμιά ημέρα που καθυστερεί να επιστρέψει την κασέτα. Αν το κόστος ενοικίασης της μιας κασέτας παρασταθεί με $f(x)$, όπου x είναι οι ημέρες ενοικίασης:

α) να εκφράσετε το κόστος ενοικίασης σαν συνάρτηση των ημερών ενοικίασης.

β) να εξετάσετε αν η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής.

38. ** Έστω ότι σε μια χώρα 80.000 κάτοικοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν αυτοκίνητα αξίας 10 εκατομμυρίων και πάνω. Αν σε x μήνες από τώρα ο αριθμός των κατοίκων, οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν τέτοιου είδους αυτοκίνητο, είναι σε χιλιάδες $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 4x + 80$, να βρείτε:

α) τον αριθμό αυτό των αγοραστών σε 16 μήνες από τώρα

β) σε πόσους μήνες από τώρα ο αριθμός αυτός θα είναι πάλι 80.000

γ) το $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{f(x) - f(16)}{x - 16}$

39. ** Το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος κάποιου προϊόντος είναι 9.000. Επιπλέον από αυτό, για παραγωγή μέχρι 20 τόννων, το κόστος είναι 400 δρχ. ανά τόνο. Μετά τους 20 τόννους, κάθε επιπλέον τόννος στοιχίζει 800 δρχ. Αν το $f(x)$ συμβολίζει το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος των x τόννων την εβδομάδα, τότε:
- να βρείτε τον τύπο της $f(x)$
 - να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ για $0 \leq x \leq 40$ (κάθε μονάδα στον άξονα x να είναι 5 τόννοι και κάθε μονάδα στον y να είναι 5.000 δρχ.)
 - να εξετάσετε την $f(x)$ ως προς τη συνέχεια στο $x = 20$.

40. ** Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα v μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t , δίνεται από τη σχέση:

$$v(t) = \kappa(1 - e^{-t})$$

όπου κ μια θετική σταθερά.

- Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση v όταν $t \geq 0$.
- Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.
- Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ .

41. ** Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

- Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2,718$).
- Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.
- Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ) Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

42. ** Το ποσοστό των μαθητών που εκδηλώνουν τη νόσο λοιμώδη μονο-πυρήνωση, x ημέρες μετά το πρώτο κρούσμα, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{100x}{2x^2 + 32}.$$

α) Πότε θα γίνει αυτό το ποσοστό μέγιστο;

β) Τι συμβαίνει όταν $x \rightarrow \infty$; Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

43. ** Μετά από μια εκστρατεία κατά της ρύπανσης των ακτών από σκουπίδια επισκεπτών σ' ένα νησί βρέθηκε ότι το επίπεδο της ρύπανσης ακολουθεί το μοντέλο

$$M(t) = \left(\frac{\sqrt{t} + 10}{t^2 + 10} \right) M_0$$

όπου M_0 το επίπεδο της ρύπανσης μόλις πριν την έναρξη της εκστρατείας και t ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη της εκστρατείας.

Ο πρόεδρος της επιτροπής που έκανε την εκστρατεία εμφανίστηκε αισιόδοξος ότι αν διατηρηθούν αυτές οι συνθήκες τελικά θα εξαλειφθεί αυτή η ρύπανση των ακτών του νησιού. Δικαιολογήστε (με τα Μαθηματικά) την αισιοδοξία του προέδρου.

44. ** Για την πενθήμερη εκδρομή της Γ' τάξης ενός Λυκείου, ένα πρακτορείο έκανε την εξής προσφορά:

Για τους πρώτους 50 μαθητές, 75.000 ανά μαθητή.

Για κάθε επόμενο μαθητή και μέχρι τους 70, μείωση κατά 5.000.

Αν η συμμετοχή ξεπεράσει τους 70 και μέχρι τους 100, 68.000 για κάθε μαθητή.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εκδρομής, σύμφωνα με την προσφορά, για 1 έως και 100 μαθητές.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Έχει νόημα να εξεταστεί η συνέχεια της συνάρτησης που θα βρείτε στο ερώτημα (α);

δ) Να βρείτε το κόστος για 69 μαθητές και για 71 μαθητές.

45. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε οι συναρτήσεις f , g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 2\ln(x+1) + 2\alpha, & -1 < x < 0 \\ 2x - \beta, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{e^x + 8}, & x < 0 \\ x + \alpha + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

να έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο σημείο $x_0 = 0$.

46. ** Κατά τη διάρκεια ενός ποιοτικού ελέγχου σε μια μονάδα παραγωγής βρέθηκε ότι η ποσότητα των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από έναν εργάτη ή εργάτρια δίνεται από τον τύπο:

$$E(t) = \frac{3t + 7}{t}$$

όπου t ο χρόνος που χρειάζεται ένας εργαζόμενος για να κάνει τη συγκεκριμένη δουλειά.

Παρατηρήθηκε ακόμη ότι όταν οι εργάτες ή οι εργάτριες πιέζονται για την ελαχιστοποίηση του τυπικού μέσου χρόνου παραγωγής του προϊόντος, ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων αυξάνεται δραματικά. Πώς το εξηγείται αυτό με τα Μαθηματικά;

47. ** Το μηνιαίο κέρδος μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ΕΥΡΩ βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο:

$$K(t) = \frac{2t - 4}{t + 1}$$

όπου t ο χρόνος λειτουργίας της σε μήνες.

Να αποδείξετε ότι, αν διατηρηθεί αυτός ο τύπος για μεγάλο χρονικό διάστημα, το μηνιαίο κέρδος σταθεροποιείται σε μια τιμή την οποία και να υπολογίσετε.

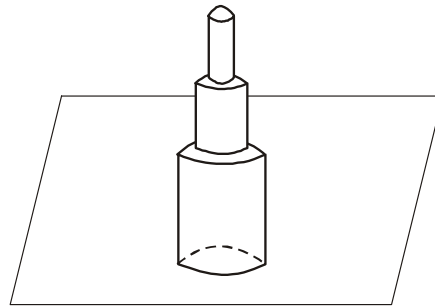
48. ** Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός $N(t)$ των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$N(t) = M(1 - e^{-0,5t})$$

όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

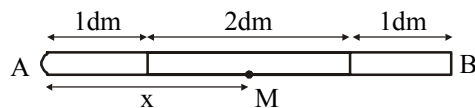
Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Πώς το σκέφτηκε αυτό;

49. ** Τρεις κύλινδροι είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλον σε ένα οριζόντιο επίπεδο p . Οι ακτίνες των βάσεων των κυλίνδρων είναι 3 m, 2 m και 1 m και το ύψος του καθενός είναι 5 m.



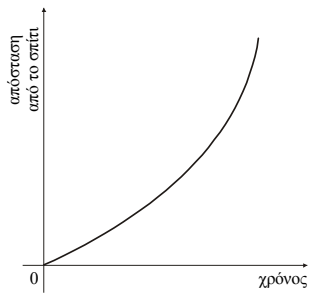
- α) Να εκφράσετε το εμβαδόν της οριζόντιας τομής του στερεού που σχηματίζεται ως συνάρτηση της απόστασης της τομής από το επίπεδο p .
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

50. ** Μια ράβδος AB αποτελείται από τρία ομοιογενή τμήματα με μήκη 1 dm, 2 dm, 1 dm και βάρη 2 kg, 3 kg, 1 kg αντιστοίχως.

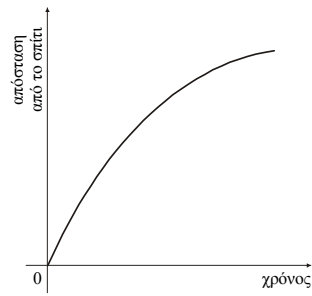


Να εκφράσετε το βάρος ενός τμήματος AM της ράβδου ως συνάρτηση του μήκους του x . Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση αυτή.

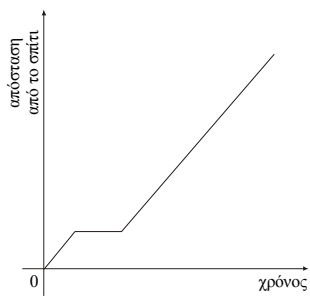
51. ** Δίνονται τα διαγράμματα:



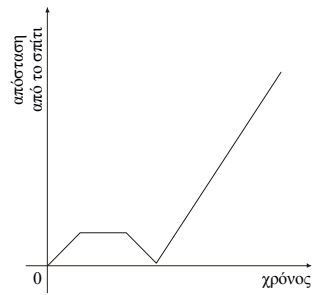
Διάγραμμα I



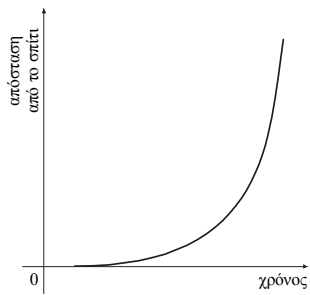
Διάγραμμα II



Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

και οι αφηγήσεις τριών μαθητών:

Μαθητής Α: Το πρωί ξεκίνησα στην αρχή με αργό ρυθμό για το σχολείο, όταν όμως κατάλαβα ότι επρόκειτο να αργήσω επιτάχυνα.

Μαθητής Β: Πήγαινα κανονικά μέχρι τη στιγμή που κλατάρισε ένα λάστιχο του ποδηλάτου μου. Το επισκεύασα επί τόπου και συνέχισα με την ίδια ταχύτητα.

Μαθητής Γ: Δεν είχα απομακρυνθεί πολύ, όταν θυμήθηκα ότι είχα αφήσει στο σπίτι το τετράδιο των Μαθηματικών. Αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω να το πάρω και μετά ξεκίνησα πάλι για το σχολείο.

- α) Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αφήγηση το διάγραμμα που της ταιριάζει:

<i>Αφήγηση</i>	A	B	Γ
<i>Διάγραμμα</i>			

- β) Γράψτε από μια αφήγηση που να ταιριάζει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Μαθητής Δ:

(Διάγραμμα ...)

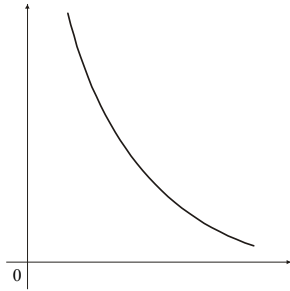
Μαθητής Ε:

(Διάγραμμα)

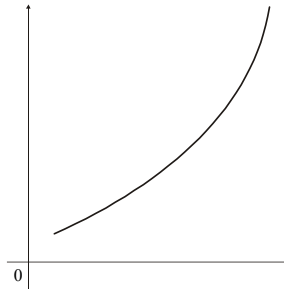
52. ** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών των συναρτήσεων:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$\varphi(x)$	$\sigma(x)$
1	23	23	23	33	33
2	24	27	25	32	29
3	26	30	27	30	26
4	29	32	29	27	24
5	33	33	33	23	23

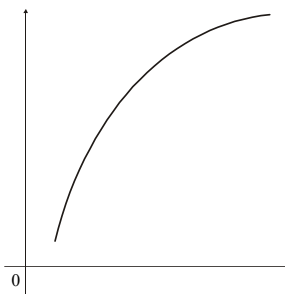
και τα διαγράμματα:



Διάγραμμα I



Διάγραμμα II



Διάγραμμα III

α) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάγραμμα την κατάλληλη από τις παραπάνω συναρτήσεις συμπληρώνοντας τον πίνακα:

<i>Διάγραμμα</i>	I	II	III
<i>Συνάρτηση</i>			

β) Να φτιάξετε ένα σχεδιάγραμμα για καθεμιά από τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

53. ** Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, f συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$, αλλά να μην υπάρχει αριθμός γ μεταξύ του -1 και του 1 με $f(\gamma) = 0$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**





Κεφάλαιο 2ο: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Λ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Λ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Λ
17.	Σ

18.	Σ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ
26. i)	Σ
26. ii)	Λ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Λ
30.	Λ
31.	Λ
32.	Σ

33. i)	Σ
33. ii)	Σ
33. iii)	Λ
34.	Λ
35. i)	Σ
35. ii)	Λ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ
39.	Σ
40. i)	Λ
40. ii)	Σ
41.	Λ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Γ
3.	Δ
4.	Γ
5.	Δ
6.	Δ
7.	Β
8.	Β
9.	Γ
10.	Δ

11.	Γ
12.	Β
13.	Α
14.	Δ
15.	Γ
16.	Γ
17.	Δ
18.	Δ
19.	Γ
20.	Γ

21.	Β
22.	Γ
23.	Δ
24.	Δ
25.	Ε
26.	Γ
27.	Γ
28.	Δ
29.	Ε
30.	Γ

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

5. Η ερώτηση είναι απλή, αν ο μαθητής γνωρίζει την αντίστοιχη ιδιότητα της διπλής διάταξης. Αξίζει όμως να επισημανθεί στους μαθητές ότι δεν είναι απαραίτητη υπόθεση η ύπαρξη του ορίου της f (όπως στην απλή διάταξη). Μια παραλλαγή της ερώτηση θα μπορούσε να είναι

B. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = 0$ (σωστό) και **Γ.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (λάθος)

10. Ασυνήθιστη ερώτηση. Ο μαθητής μπορεί να απαντήσει αν έχει κατανοήσει την έννοια του ορίου. Θα πρέπει να ανακαλέσει στη μνήμη του ότι $|\eta\mu x| < |x|$, άρα αποκλείονται οι τιμές οι μεγαλύτερες ή ίσες του 0,025 (Α, Γ και Ε). Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, άρα η τιμή θα είναι πολύ κοντά το 0,025. Μένει να είναι η Δ.

25. Έχουμε καθιερώσει στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής να είναι ένα μόνο σωστό (ή ένα μόνο λάθος). Από τη στιγμή λοιπόν που τα Α και Β είναι προφανές ότι ισχύουν, σωστή απάντηση είναι η Ε (χωρίς να εξεταστεί η αλήθεια ή όχι την Γ και Δ, κατ' ανάγκη).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	δ
2	ζ
3	α
4	γ

2.

1	β
2	γ
3	δ
4	α

3.

1	ε
2	α
3	η
4	δ
5	γ

4.

1	α
2	δ
3	ε

5.

1	ε
2	γ
3	β
4	α

6.

1	ε
2	α
3	δ
4	γ

7.

1	γ
2	α
3	δ
4	ζ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
2. $\gamma, \delta, \alpha, \varepsilon, \beta$.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) 2 β) 0 γ) 2 δ) 3 ε) 1
 στ) 2 ζ) 4

2. α) $D_f = [2, 4]$ β) 0 και $+\infty$

3. α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + 1) = v$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^v - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{(1-x)^v - 1}{-x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{(1-x)^v - 1}{(1-x) - 1} \right] = -v$

4. α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 3$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \eta\mu x}{x} = 0$

- γ) Πολλαπλασιασμός με τη συζυγή παράσταση: - 2

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu 5x}{x}}{\frac{\eta\mu 7x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\eta\mu 5x}{5x}}{7 \frac{\eta\mu 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{7x}} = \frac{5}{7}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 2x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x (1 - 2\eta\mu^2 x)} = 2$$

5. **α)** $1 + 2 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2} = 28$ άρα $v = 7$

β) $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v = 120 \Rightarrow v = 5$

6. Το πηλίκο τριωνύμων τα οποία έχουν κοινή ρίζα ρ έχει όριο, στο $x_0 = \rho$, πραγματικό αριθμό (εφόσον ο παρονομαστής δεν έχει διπλή ρίζα τον ρ).

7. $|f(x) - 3| \leq |x|$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 3| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 3| \leq 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

Όμοια $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -4$, και συνεπώς:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = -1$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = 3(-4) = -12$

8. **γ)** πλευρικά όρια στο 0 **δ)** πλευρικά όρια στο 2 (δεν υπάρχει όριο).

9. **α)** $+\infty$

β) Μόνο πλευρικά όρια για την $f(x) - g(x)$, και

επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} [h(x) - \varphi(x)] = 1$

10. **α)** συνεχής στο $(0, 2)$, μη συνεχής στο $[0, 2]$ **β)** συνεχής στο D_f
γ) μη συνεχής

12. **β)** $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu 2h$, δηλαδή $f(x_0) = 0$

γ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{h \cdot \eta\mu 2h} \cdot \eta\mu 2h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{\eta\mu 2h} \cdot \frac{2\eta\mu 2h}{2h} = 2$

19. **α)** $+\infty, -\infty, 2, 2$ **β)** 0

20. **α)** $-\infty$ **β)** 0 **γ)** 0 **δ)** 0 **ε)** $+\infty$

21. **α)** 0 **β)** $+\infty$ **γ)** $-\infty$ **δ)** $-\infty$

22. **α)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 7^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x \left[1 - \left(\frac{7}{5}\right)^x \right] = -\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x}{5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x + 2} = \frac{0}{2} = 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 8^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^x - 1}{5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^x} = -\infty$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x^3}{|x|+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-x^3}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x-1}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x} = -\infty$$

23. α) 1 β) 0 γ) 0

24. α) $\kappa e^x + 1 \neq 0$, δηλαδή $e^x \neq -\frac{1}{\kappa} < 0$ το οποίο ισχύει πάντοτε. Άρα $Df = \mathbb{R}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\kappa}{\kappa e^x + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\kappa}{\kappa e^x + 1} = \frac{2\kappa}{1} = 2\kappa$$

25. Έστω $A\Gamma = x$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (B\Gamma - A\Gamma) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + c^2} - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + c^2} - x)(\sqrt{x^2 + c^2} + x)}{\sqrt{x^2 + c^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + c^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + c^2} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c^2}{\sqrt{x^2 + c^2} + x} = 0$$

26. $P(x) = x(x^v - 1) - (x - 1) = (x - 1) \quad Q(x)$ με $Q(0) = -1, Q(1) = v$

27. α) Σύνθεση συνεχών β) θεώρημα Bolzano για την $h(x)$ στο $[0, \frac{\alpha}{2}]$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln^2 x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)^2 = +\infty$$

$$29. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}} = \frac{1}{2}$$

30. Αν $AB = \alpha$ και $AM = x$ τότε $BM = x - \alpha$, $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{AM}{BM} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \alpha} = 1,$$

31. α) Πρέπει $x > 1$. Η ευθεία $AM : 2x + y(\kappa - 1) - 2\kappa = 0$.

Για το σημείο N έχω τετμημένη $x = 0$, οπότε $y = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}$.

$$\text{Άρα } E_{MON} = \frac{OM \cdot ON}{2} = \frac{\kappa \cdot \frac{2\kappa}{\kappa - 1}}{2} = \frac{\kappa^2}{\kappa - 1}$$

$$\beta) \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\kappa^2}{\kappa - 1} = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2}} = +\infty$$

Το $\lim_{\kappa \rightarrow 1} \frac{\kappa^2}{\kappa - 1} = +\infty$, επειδή $\kappa > 0$

32. α) Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x}{x^2 - 4} = 2$, δηλ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2}{x^2} = 2$,

οπότε $\alpha - 1 = 2$ και $\alpha = 3$

β) Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + \beta x}{x^2 - 4}$, $\beta \neq -4$. Αυτό είναι ίσο με $\frac{8+2\beta}{0}$, $\beta \neq -4$.

Άρα το όριο είναι το $+\infty$.

35. α) Αν $f(x) = 1$, θα έχουμε $\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 1$, δηλ. $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$, δηλ. $2x^2 + 2x = 0$, συνεπώς $x = 0$ ή $x = -1$

β) Ζητούμε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση $g(x) = x^2 + (x+1)^2$ παρουσιάζει ελάχιστο. Ισχύει $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ και το ζητούμενο x είναι το $-\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \sqrt{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - \frac{1}{2} - 2x}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2}(2x + 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = 0$

36. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$

37. α) $f(x) = \begin{cases} 600, & 0 < x \leq 4 \\ 75x + 800, & x > 4 \end{cases}$

β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της εκτός από το σημείο $x_0 = 4$.

38. α) περίπου 58,6 χιλ. β) $x = 36$ γ) 0

$$39. \alpha) f(x) = \begin{cases} 400x + 9000, & 0 \leq x \leq 20 \\ 800x + 1000, & x > 20 \end{cases}$$

40. α) σχήμα β) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa (1 - e^{-t}) = \kappa$.

γ) Σε μεγάλης διάρκειας συνεχούς βροχόπτωσης η ταχύτητα της σταγόνας είναι περίπου ίση με κ .

41. α) $f(0) = e^{\frac{0}{2}+1} = e$ περίπου 2,718

β) $\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = e^3$, $\lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} \left(-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3 \right) = e^3$ περίπου 20,079

γ) $f(t) = 0$, δηλ. $-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3 = 0$, άρα $e^3 \left(-\frac{1}{5}t + \frac{9}{5} \right) = 0$ οπότε $t = 9$

δ) $f(0) = 2,718$ $f(4) = 20,079$, οπότε κάποια χρονική στιγμή t με t μεταξύ 0 και 4 θα έχουμε $f(t) = 18,950$. Επιπλέον, αν $-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3 = 18,950$, τότε ... t περίπου 4,3.

42. α) $x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 256y^2}}{4y}$. Πρέπει $10.000 - 256y^2 \geq 0$

δηλ. $y^2 \leq \frac{10000}{256}$ και $y < \frac{25}{4}$, οπότε $x = 4$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100x}{2x^2 + 32} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{100}{x}}{2 + \frac{32}{x^2}} = 0$$

$$43. \text{ Υπολογίζουμε το } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{t} + 10}{t^2 + 10} M_0 \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[M_0 \frac{\sqrt{\frac{1}{t^3} + \frac{10}{t^2}}}{1 + \frac{10}{t^2}} \right] = 0.$$

$$44. f(x) = \begin{cases} 75.000x & 0 < x \leq 50 \\ 75.000 \cdot 50 + 70.000(x - 50) & 50 < x \leq 70 \\ 68.000x & 70 < x \leq 100 \end{cases}$$

$$45. \text{ Πρέπει } 2\ln 1 + 2\alpha = -\beta \text{ και } 3 = \alpha + 1, \text{ άρα } \alpha = 2 \text{ και } \beta = -4$$

$$46. \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = \dots + \infty$$

$$47. \lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = \dots 2 \text{ χιλ. ΕΥΡΩ}$$

$$48. \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = M$$

$$49. f(x) = \begin{cases} 9\pi, & 0 \leq x \leq 5 \\ 4\pi, & 5 < x \leq 10 \\ \pi, & 10 < x \leq 15 \end{cases}$$

$$50. f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 + 3(x - 1), & 1 \leq x < 3 \\ 5 + 1(x - 3), & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

51. α)

<i>Αφήγηση</i>	A	B	Γ
<i>Διάγραμμα</i>	I	III	IV

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:

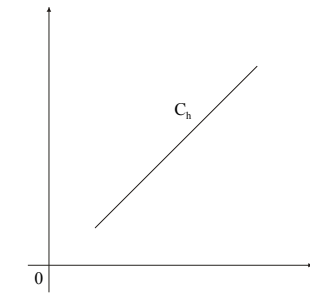
Μαθητής Δ (Διάγραμμα II): Ξεκίνησα βιαστικά όταν όμως κατάλαβα ότι έχω μπροστά μου πολύ χρόνο έκοψα ταχύτητα.

Μαθητής Ε (Διάγραμμα V): Μόλις βγήκα από το σπίτι πρόσεξα ότι είχα ένα λάστιχο κλαταρισμένο. Το επιδιόρθωσα και ξεκίνησα βιαστικά επιταχύνοντας.

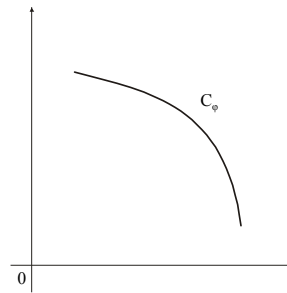
52. α)

Διάγραμμα	I	II	III
Συνάρτηση	$\sigma(x)$	$f(x)$	$g(x)$

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

53. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

