

Κεφάλαιο 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

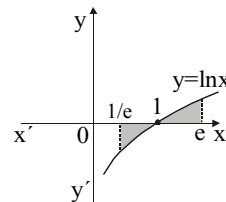
1. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε τα ολοκληρώματα $\int_a^\beta f(x) dx$, $\int_a^\beta f(t) dt$ και $\int_a^\beta f(y) dy$ είναι ίσα μεταξύ τους.

Σ Λ

2. * Ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^a f(x) dx = 0$.

Σ Λ

3. * Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος είναι ίσο με το $\int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx$.



Σ Λ

4. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει ο τύπος:

$$-\int_\gamma^\beta f(x) dx + \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx.$$

Σ Λ

5. * Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$, τότε θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Σ Λ

6. * Ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin e^x dx = [\eta \mu e^x]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

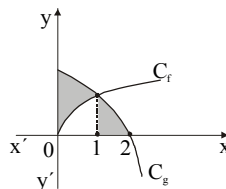
Σ Λ

7. * Ισχύει: $\int_a^\beta f'(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^\beta$.

Σ Λ

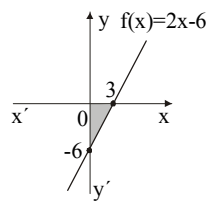
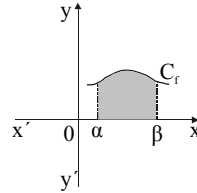
8. * Το σκιασμένο χωρίο του σχήματος έχει εμβαδόν

$$E = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^2 g(x) dx.$$



Σ Λ

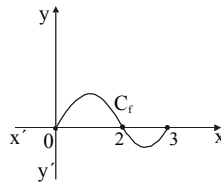
9. * Ισχύει $\int_2^4 c dx = \int_6^8 c dx$, c σταθερά. Σ Λ
10. * Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος είναι ίσο με $\int_a^\beta f(x) dx + c$, c σταθερά, $c \neq 0$. Σ Λ
11. * Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος είναι ίσο με $\int_0^3 |2x - 6| dx$. Σ Λ
12. * Αν ο ρυθμός αύξησης κάποιου πληθυσμού, ως προς χρόνο t , δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 2 + 6\sqrt{t}$, τότε σε χρόνο t ο συνολικός πληθυσμός θα είναι $\int_0^t (2 + 6\sqrt{t}) dt$. Σ Λ
13. * Ισχύει: $\int_a^\beta f(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int_a^\beta f'(x) g(x) dx$. Σ Λ
14. * Αν f συνεχής συνάρτηση με $f(20) = 100$, τότε ισχύει ότι $f(0) + \int_0^{20} f'(x) dx = 100$. Σ Λ
15. * Ισχύει: $\int_0^1 \eta \mu x dx = 1 - \text{συν}1$. Σ Λ
16. * Ισχύει πάντα $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Σ Λ
17. * Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ ισχύει: $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Σ Λ
18. * Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση στο \mathbb{R} , με περίοδο T , τότε ισχύει $\int_0^T f(t) dt = \int_T^{2T} f(t) dt$. Σ Λ
19. * Αν $a < \beta$, τότε $\int_a^\beta (e^x + 1) dx < 0$. Σ Λ
20. * Ισχύει: $\int_a^a f(x) dx = 0$. Σ Λ



21. * Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

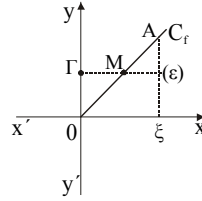
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$
Σ Λ
22. * Ισχύει: $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx .$
Σ Λ
23. * Αν η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, τότε ισχύει ότι

$$\int_1^3 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx .$$
Σ Λ
24. * Ισχύει ότι $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x).$
Σ Λ
25. * Ισχύει ότι $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) g'(x).$
Σ Λ
26. * Ισχύει ότι $\left(\int_x^a f(t) dt \right)' = -f(x).$
Σ Λ
27. * Ισχύει: $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x).$
Σ Λ
28. * Για τη συνάρτηση του σχήματος
ισχύει: $\int_0^2 f(x) dx < \int_0^3 f(x) dx .$
Σ Λ



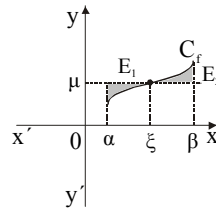
33. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Αν M μέσον του OA και $(\varepsilon) \parallel x'x$, τότε θα ισχύει:

$$\int_0^{\xi} f(x) dx = (O\Gamma) \xi.$$



Σ Λ

34. * Αν $\xi \in (\alpha, \beta)$ και $f(\xi) = \mu$, όπου μ η μέση τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $E_1 = E_2$.



Σ Λ

35. * Για $x > 0$ ισχύει $\int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln x$.

Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Έστω G μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, \beta]$. Τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a έως το β είναι ίσο με

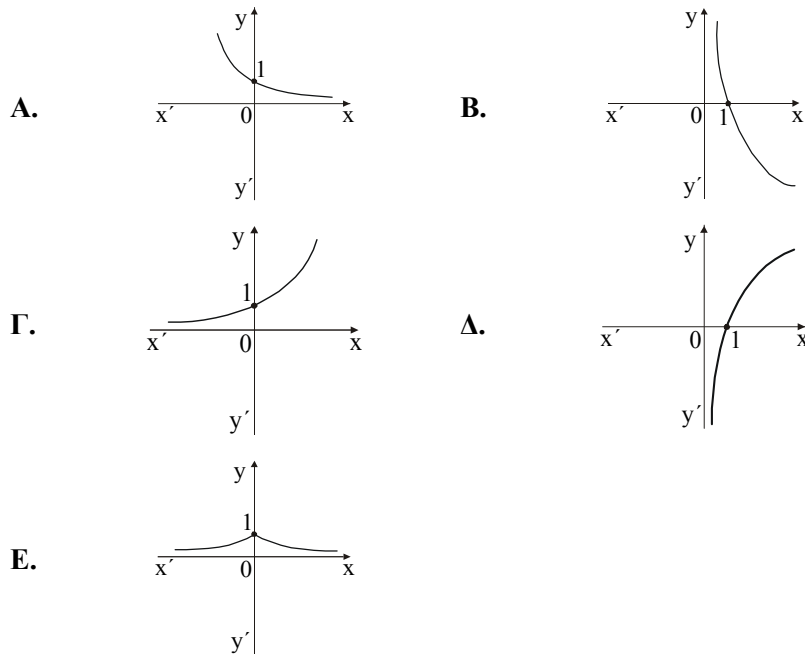
- A.** $\beta - a$ **B.** $G(\alpha) - G(\beta)$ **Γ.** $\frac{G(\beta) - G(\alpha)}{\beta - \alpha}$
Δ. $G(\beta) - G(\alpha)$ **E.** μια σταθερά c

2. * Η $F(x) = \frac{x}{e^x}$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x)$. Τότε το

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ είναι ίσο με}$$

- A.** e **B.** 1 **Γ.** 0 **Δ.** $\frac{1}{e} - 1$ **E.** $\frac{1}{e}$

3. * Αν $F(x) = e^x + 10$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f , τότε η γραφική παράσταση της f είναι

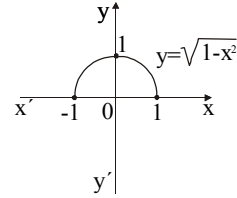


4. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ισχύει

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ B. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ Δ. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi$

E. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi^2$



5. * Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = 0$ ($\alpha \neq \beta$), τότε

A. $f'(\alpha) = f'(\beta)$

B. $f'(\alpha) + f'(\beta) = 0$

Γ. $f(\alpha) = f(\beta)$

Δ. $f(\alpha) + f(\beta) = 0$

E. $\alpha + \beta = 0$

6. * Το σκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα εμβαδόν ίσο με

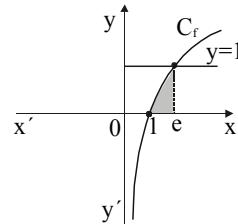
A. 1

B. e^2

Γ. 2

Δ. $\ln \frac{1}{2}$

E. $\ln 2$



όπου μια παράγουσα της f του σχήματος είναι η $F(x) = x \ln x - x$.

7. * Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε η

ιδιότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx$ ισχύει, μόνο όταν

A. $\alpha < \beta < \gamma$

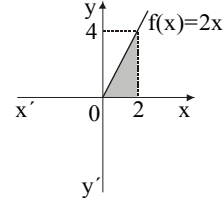
B. $\alpha < \gamma < \beta$

Γ. α, β, γ θετικοί

Δ. για οποιουσδήποτε αριθμούς του διαστήματος Δ

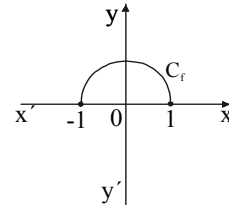
E. δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις

8. * Από τους παρακάτω αριθμούς αυτός που **δεν** μπορεί να παριστάνει το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος είναι ο αριθμός



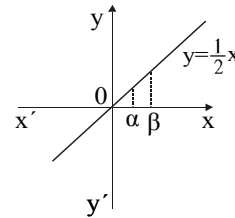
- A. 4 B. $\int_1^2 2x dx$ Γ. $F(2) - F(0)$,
όπου F μία παράγουσα της f
- Δ. $[x^2]_0^2$ E. $\int_0^2 2x dx$

9. * Το σχήμα παριστάνει ημικύκλιο με εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$. Τότε η μέση τιμή μ της συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι ίση με



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 Γ. αριθμό μεγαλύτερο του 1
- Δ. αριθμό μικρότερο του $\frac{1}{2}$ E. αριθμό μεταξύ του $\frac{1}{2}$ και του 1

10. * Η μέση τιμή της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι ο αριθμός



- A. $\frac{\alpha + \beta}{2}$ B. $\frac{\alpha - \beta}{4}$ Γ. $\frac{\alpha - \beta}{2}$
- Δ. $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$ E. $\frac{\alpha + \beta}{4}$

11. * Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta x e^{kx} dx$ είναι ίσο με

- A. $[x e^{kx}]_a^\beta - \frac{1}{k} \int_a^\beta e^{kx} dx$ B. $\frac{1}{k} ([x e^{kx}]_a^\beta - \int_a^\beta e^{kx} dx)$
- Γ. $[k x e^{kx}]_a^\beta - \frac{1}{k} \int_a^\beta e^{kx} dx$ Δ. $\frac{1}{k} [x e^{kx}]_a^\beta - \int_a^\beta e^{kx} dx$
- E. $\frac{1}{k} [x e^{kx}]_a^\beta - k \int_a^\beta e^{kx} dx$

12. * Το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \sin(ax + \beta) dx$ είναι ίσο με

A. $\frac{1}{\alpha} [\eta\mu(ax + \beta)]_0^\pi$ B. $[\eta\mu(ax + \beta)]_0^\pi$

Γ. $\frac{1}{\alpha} [\sigma\upsilon\nu(ax + \beta)]_0^\pi$ Δ. $\frac{1}{\alpha} [\eta\mu(ax)]_0^\pi$

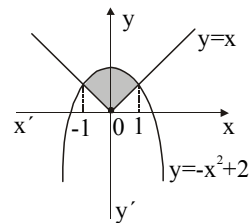
E. $\frac{1}{\beta} [\eta\mu(ax + \beta)]$

13. * Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

A. $2 \int_0^1 (x - f(x)) dx$ B. $2 \int_{-1}^0 (x - f(x)) dx$

Γ. $2 \int_0^1 (f(x) - x) dx$ Δ. $2 \int_0^1 (f(x) + x) dx$

E. $\int_{-1}^1 (f(x) - x) dx$

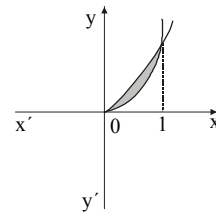


14. * Το εμβαδόν του χωρίου στο διπλανό σχήμα περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x > 0$, είναι ίσο με

A. $\int_0^1 (x^3 - x^2) dx$ B. $\int_0^1 (x^2 - x^3) dx$

Γ. $\int_0^1 (x^2 + x^3) dx$ Δ. $2 \int_0^1 x^2 dx$ E. $3 \int_0^1 x^3 dx$



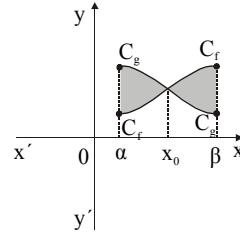
15. * Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

A. $\int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$ B. $\int_a^\beta (g(x) - f(x)) dx$

Γ. $\int_a^{x_0} (f(x) - g(x_0) + x) dx + \int_{x_0}^\beta (f(x) - g(x)) dx$

Δ. $\int_a^{x_0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{x_0}^\beta (f(x) - g(x)) dx$

Ε. $\int_\beta^a (f(x) - g(x)) dx$

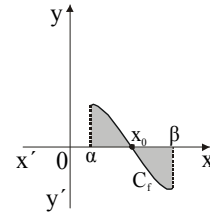


16. * Το σκιασμένο εμβαδόν που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

A. $\int_a^\beta f(x) dx$ B. $\int_a^\beta (-f(x)) dx$

Γ. $\int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^\beta (-f(x)) dx$ Δ. $\int_\beta^a f(x) dx$

Ε. τίποτα από τα παραπάνω

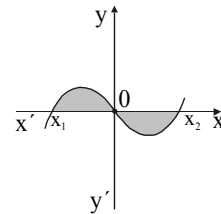


17. * Το εμβαδόν του χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

A. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ B. $\int_{x_1}^{x_2} (-f(x)) dx$

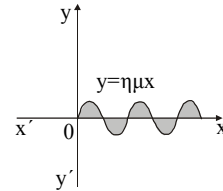
Γ. $\int_{x_2}^{x_1} f(x) dx$ Δ. $\int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_0^{x_2} (-f(x)) dx$

Ε. $\int_0^{x_1} f(x) dx + \int_0^{x_2} f(x) dx$



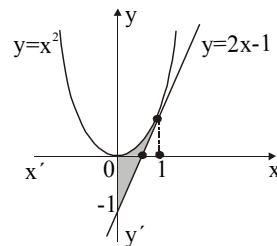
18. * Το σκιασμένο χωρίο έχει εμβαδόν ίσο με

- A. 2,5 B. 5π Γ. 10
 Δ. $\frac{5\pi}{2}$ E. 6



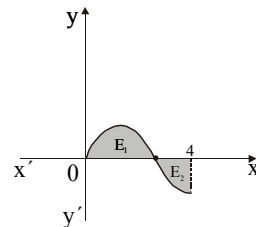
19. * Στο διπλανό σχήμα η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

- A. $\int_0^1 x^2 dx$ B. $\int_0^1 (2x - 1) dx$
 Γ. $\int_0^1 (2x - 1 - x^2) dx$ Δ. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$
 E. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$



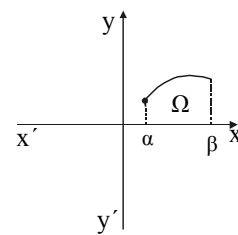
20. * Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Αν ισχύει $E_1 = 2$ και $E_2 = 0,625$, τότε το $\int_0^4 f(x) dx$ θα είναι ίσο με

- A. 2,625 B. 2 Γ. 0,625
 Δ. 1,375 E. κανένα από τα παραπάνω



21. * Το χωρίο Ω του διπλανού σχήματος, περιστρεφόμενο γύρω από τον x' x, παράγει έναν όγκο V. Ο όγκος αυτός υπολογίζεται από τον τύπο

- A. $V = \int_a^\beta (\pi f(x))^2 dx$ B. $V = \int_a^\beta \pi^2 f(x) dx$
 Γ. $V = \int_a^\beta \pi f(x) dx$ Δ. $V = \int_a^\beta \pi f^2(x) dx$
 E. $V = \int_a^\beta f^2(x) dx$



22. * Ο όγκος V του κώνου του διπλανού σχήματος ισούται με

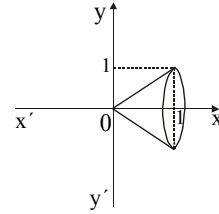
A. $V = \int_0^1 \pi x^2 dx$

B. $V = \int_0^1 \pi^2 x dx$

Γ. $V = \int_0^1 (\pi x)^2 dx$

Δ. $V = \pi \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx$

E. $V = \int_0^1 \pi \frac{x^2}{2} dx$



23. * Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Από τις προτάσεις:

I. Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\gamma)(\beta - \alpha)$

II. $\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\alpha)(\beta - \alpha)$

III. $\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\beta)(\beta - \alpha)$

αληθείς είναι

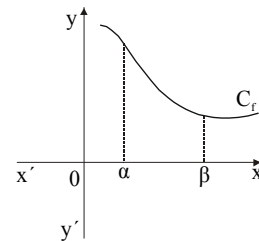
A. μόνο η I

B. μόνο η II

Γ. μόνο η III

Δ. μόνο η I και II

E. οι I, II και III



Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να αντιστοιχίσετε κάθε ολοκλήρωμα της στήλης Α του πίνακα Ι με το αποτέλεσμα που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\int_0^1 e^{3x} dx$	α. $3(\sqrt[3]{e} - 1)$
2. $\int_0^1 \frac{1}{3}e^x dx$	β. $e^4 - e$
3. $\int_0^1 e^{\frac{x}{3}} dx$	γ. $e^4 - e^3$
4. $\int_0^1 e^{x+3} dx$	δ. $3e$
5. $3 \int_0^1 e^{3x+1} dx$	ε. $\frac{1}{3}(e - 1)$
	ζ. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$
	η. $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

2. * Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του πίνακα Ι στο ίσο του που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\int_a^\beta e^{f(x)} f'(x) dx$	α. $\ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$
2. $\int_a^\beta f^{(v)}(x) f'(x) dx$	β. $\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)$
3. $\int_a^\beta \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	γ. $[f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)g'(x) dx$
4. $\int_a^\beta f'(g(x))g'(x) dx$	δ. $e^{f(\beta)} - e^{f(\alpha)}$
5. $\int_a^\beta f'(x)g(x) dx$	ε. $\frac{1}{v+1} ((f(\beta))^v - (f(\alpha))^v)$
	ζ. $\frac{1}{v+1} (f(\beta))^{v+1} - \frac{1}{v+1} (f(\alpha))^{v+1}$
	η. $f(g(\beta)) - f(g(\alpha))$
	θ. $\int_a^\beta f(x)g'(x) dx$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

3. * Να αντιστοιχίσετε το εμβαδόν κάθε χωρίου που φαίνεται στη στήλη Α του πίνακα Ι με τον τύπο που το υπολογίζει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p>	<p>α. $E = \int_{\alpha}^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$</p> <p>β. $E = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$</p>
<p>2.</p>	<p>γ. $E = -2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$</p>
<p>3.</p>	<p>δ. $E = \int_{\alpha}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$</p> <p>ε. $E = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$</p>
<p>4.</p>	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

4. * Αν $\int_a^\beta f(x) dx = \kappa$, τότε σε κάθε ολοκλήρωμα της στήλης A, να αντιστοιχίσετε τον αριθμό με τον οποίο είναι ίσο από τη στήλη B, συμπληρώνοντας τον πίνακα II.

Πίνακας I

Στήλη A	Στήλη B
1. $\int_a^\beta 2f(x) dx$	α. $-\kappa$ β. $2 - \kappa$
2. $\int_\beta^a f(x) dx$	γ. $\frac{\kappa}{2}$ δ. 2κ
3. $\int_a^\beta (2 - f(x)) dx$	ε. $2(\beta - \alpha) - \kappa$

Πίνακας II

1	2	3

5. * Σε κάθε ολοκλήρωμα της στήλης A του πίνακα I να αντιστοιχίσετε τιμή του στη στήλη B, συμπληρώνοντας τον πίνακα II.

Πίνακας I

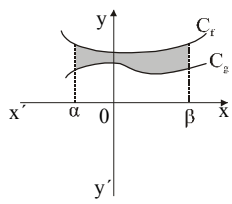
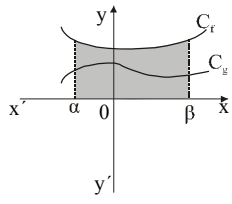
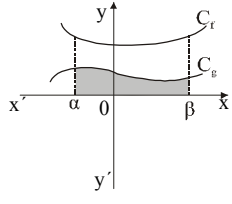
Στήλη A	Στήλη B
1. $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$	α. 0
2. $\int_0^1 \frac{1}{e^x} dx$	β. $\frac{2}{e}$
3. $\int_{-1}^1 x e^x dx$	γ. $e - 1$
	δ. $-1 - \frac{1}{e}$
	ε. $1 - \frac{1}{e}$

Πίνακας II

1	2	3

6. * Να αντιστοιχίσετε τα εμβαδά της στήλης Α του πίνακα Ι με τα ολοκληρώματα της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

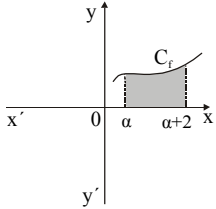
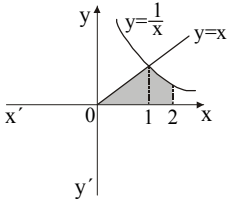
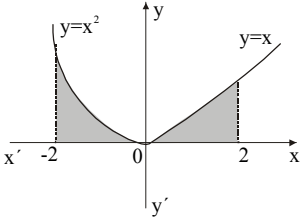
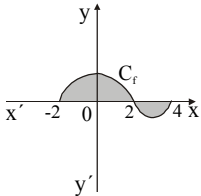
Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p> 	<p>α. $\int_a^b [(f(x) - g(x))] dx$</p> <p>β. $\int_a^b ((f(x) + g(x))) dx$</p>
<p>2.</p> 	<p>γ. $\int_a^b f(x) dx$</p> <p>δ. $\int_a^b g(x) dx$</p>
<p>3.</p> 	<p>ε. $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$</p>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να εκφράσετε με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων καθένα από τα σκιασμένα χωρία της στήλης A, συμπληρώνοντας τη στήλη B:

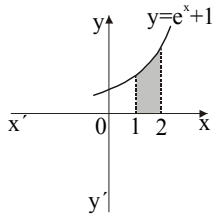
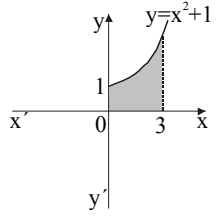
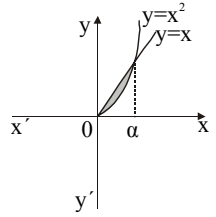
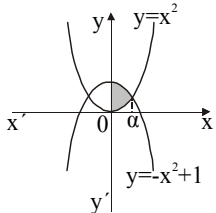
Στήλη A	Στήλη B
 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. The x-axis is labeled with 0, α, and $\alpha+2$. A curve labeled C_f is shown in the first quadrant, starting at $x = \alpha$ and ending at $x = \alpha+2$. The region between the curve and the x-axis is shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. Two curves are shown: $y = \frac{1}{x}$ and $y = x$. They intersect at $x = 1$. The region between the two curves from $x = 1$ to $x = 2$ is shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. Two curves are shown: $y = x^2$ and $y = x$. They intersect at $x = -2$ and $x = 2$. The regions between the curves and the x-axis from $x = -2$ to $x = 2$ are shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A curve labeled C_f is shown, starting at $x = -2$ and ending at $x = 4$. The region between the curve and the x-axis is shaded.</p>	

2. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	Μια παράγουσα της f, F	$\int_a^b f(x) dx$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F = 2\sqrt{x}$	$\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1)$
$f(x) = \eta\mu 2x$		$\int_0^\pi f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = e^{3x}$		$\int_0^1 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$		$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \ln x$		$\int_1^e f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x-1}$		$\int_0^{1/2} f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = x^3 + 1$		$\int_{-2}^3 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$		$\int_1^2 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = c$		$\int_a^b f(x) dx = \dots\dots\dots$

3. * Να συμπληρώσετε στη στήλη Β τα ολοκληρώματα που δίνουν τον όγκο του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή των γραμμικών σχημάτων γύρω από τον άξονα x' .

Πίνακας Ι

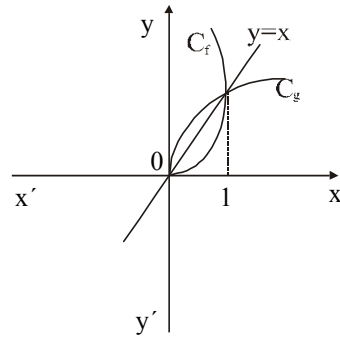
Στήλη Α	Στήλη Β
 <p>A Cartesian coordinate system with a horizontal axis labeled x' and a vertical axis labeled y'. The origin is marked with 0. A curve labeled $y=e^x+1$ is shown in the first quadrant. A vertical dashed line is drawn at $x=1$ and another at $x=2$. The region between the curve and the x-axis from $x=1$ to $x=2$ is shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with a horizontal axis labeled x' and a vertical axis labeled y'. The origin is marked with 0. A curve labeled $y=x^2+1$ is shown in the first quadrant. A vertical dashed line is drawn at $x=3$. The region between the curve and the x-axis from $x=0$ to $x=3$ is shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with a horizontal axis labeled x' and a vertical axis labeled y'. The origin is marked with 0. Two curves are shown: $y=x^2$ and $y=x$. They intersect at the origin and at a point $x=a$. A vertical dashed line is drawn at $x=a$. The region between the two curves from $x=0$ to $x=a$ is shaded.</p>	
 <p>A Cartesian coordinate system with a horizontal axis labeled x' and a vertical axis labeled y'. The origin is marked with 0. Two parabolas are shown: $y=x^2$ opening upwards and $y=-x^2+1$ opening downwards. They intersect at the origin and at a point $x=a$. A vertical dashed line is drawn at $x=a$. The region between the two parabolas from $x=0$ to $x=a$ is shaded.</p>	

Ερωτήσεις διάταξης

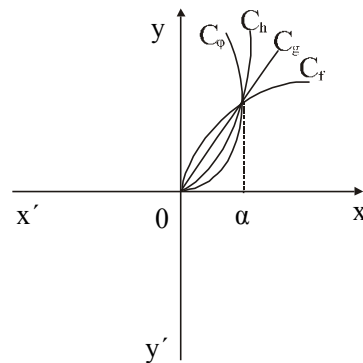
1. * Τα παρακάτω ολοκληρώματα αναφέρονται στις συναρτήσεις του διπλανού σχήματος. Να τα γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

$$E_1 = \int_0^1 x dx \qquad E_2 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$E_3 = \int_0^1 g(x) dx$$



2. * Να διατάξετε τη μέση τιμή των συναρτήσεων f, g, h, φ στο διάστημα [0, α] κατά αύξουσα σειρά.



Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** α) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = [f'(x) \eta_{\mu x}]_a^b - [f(x) \sigma_{\mu x}]_a^b.$$

β) Αν $f(x) = \eta_{\mu x}$, να αποδείξετε ότι $\int_a^b (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = 0$.

γ) Αν $f(x) = \sigma_{\mu x}$, να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sigma_{\mu x} dx = 0$.

2. ** Για να εκτιμήσουν τη δυναμικότητα μιας πετρελαιοπηγής, οι μηχανικοί εκτελούν κάποιες βασικές μετρήσεις στην αρχική άντληση και αφού χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα από παλαιότερες πετρελαιοπηγές, καταλήγουν σε μια συνάρτηση του χρόνου η οποία εκφράζει την αναμενόμενη παραγωγή ανά μήνα. Η συνάρτηση αυτή σε κάποια πετρελαιοπηγή είναι η: $L(t) = 3te^{-0,02t}$ δεκάδες χιλιάδες βαρέλια το μήνα, t μήνες μετά την έναρξη λειτουργίας της πηγής.

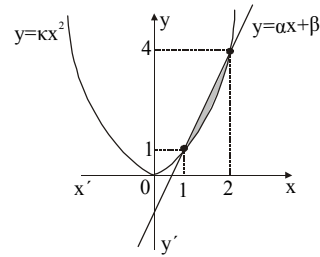
- α) Μετά από πόσα χρόνια η πετρελαιοπηγή θα αποδίδει τη μέγιστη ποσότητα πετρελαίου ανά μήνα;
β) Πόσα βαρέλια αναμένεται να αντληθούν συνολικά κατά τον πρώτο χρόνο λειτουργίας;
γ) Πόσα βαρέλια αναμένεται να αντληθούν συνολικά σε x μήνες λειτουργίας;
δ) Πώς θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε το συνολικό ποσό πετρελαίου που περιέχει η πηγή;

Σημείωση: Το ερώτημα (δ) θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη.

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, η οποία διέρχεται από τα σημεία (2, 4), (5, 7) και (6, 12).
- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- β) Να υπολογίσετε το $\int_2^6 f(x) dx$.
- γ) Να δείξετε ότι $\int_2^6 f(x) dx = \frac{2}{3} (f(2) + 4f(5) + f(6))$.
4. ** Σύμφωνα με στατιστικές μελέτες, το ποσοστό των ασθενών που εξακολουθούν να δέχονται ιατρική φροντίδα σε κάποιο ίδρυμα t μήνες μετά την πρώτη επίσκεψή τους, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = e^{-t/20}$. Αν το ίδρυμα έχει αρχικά 300 ασθενείς και σχεδιάζει να δέχεται καινούριους με ρυθμό 10 το μήνα, να βρείτε μετά από 15 μήνες πόσους ασθενείς θα εξυπηρετεί συνολικά παρέχοντάς τους ιατρική στήριξη. (Το ποσοστό αναφέρεται στο σύνολο των ασθενών, όχι στους 100).
5. ** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και ότι $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta\mu x dx = 0$.
- β) Να εξετάσετε την αλήθεια του ισχυρισμού: για κάθε περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \geq 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, +\infty)$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της C_f στο M .

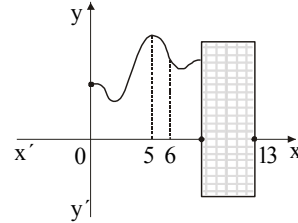
7. ** Ο ρυθμός μεταβολής των εξόδων μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση $E_{\xi}(t) = 3 + 2e^{-t}$ (σε εκατομμύρια δραχμές ανά μήνα). Ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων δίνεται από τη συνάρτηση $E_{\sigma}(t) = \frac{1}{2} t^2$ (σε εκατομμύρια δραχμές ανά μήνα).
- α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ 2ου και 3ου μήνα λειτουργίας ο ρυθμός μεταβολής των εξόδων θα είναι αριθμητικά ίσος με αυτόν των εσόδων.
- β) Να εκτιμήσετε τα συνολικά κέρδη από τη λειτουργία του πρώτου χρόνου.

8. ** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y = kx^2$ και της ευθείας $y = ax + \beta$ με $a > 0$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις της παραβολής και της ευθείας.
- β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



9. ** Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = e^{-x}$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.
10. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2$, $g(x) = ax$, $a > 0$. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων να ισούται με $\frac{1}{3}$.

11. ** Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο $[0, 13]$ και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



α) $\int_5^{12} f'(x) dx$ β) $\int_0^{13} f(x) dx$ γ) $\int_5^6 f''(x) dx$

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση αποτελεί θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη. Τα ερωτήματα θα μπορούσαν να αναφέρονται και σε άλλα σημεία του διαστήματος $[0, 13]$ καθώς και σε ορισμένο ολοκλήρωμα της f''' .

12. ** α) Η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα. Να δικαιολογήσετε γεωμετρικά τη σχέση:

$$(\beta - \alpha) f(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

- β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

γ) Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο διάστημα $(1, 1,21)$.

13. ** Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με

τετμημένη $x = \beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx$.

14. ** Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία T σε βαθμούς C τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0,3t - 0,05t^3$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

β) Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

γ) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

15. ** Αν η συνάρτηση f , που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$\int_a^b f''(x) dx + \int_a^b f'(x) dx$$

16. ** Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t .

17. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς

ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2 < 0. \text{ Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού } f(x) \geq 0.$$

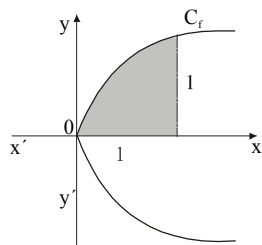
Πού βρίσκεται το λάθος;

18. ** Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}} dx$. Γράφουμε:

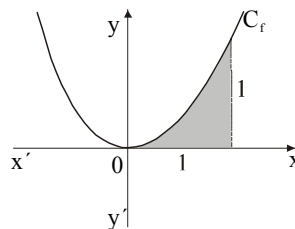
$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}} = \int_0^{\pi} \sin x dx = 0. \text{ Όμως η συνάρτηση } f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}}$$

είναι μη αρνητική στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα δεν μπορεί να μηδενιστεί το I . Πού βρίσκεται το λάθος;

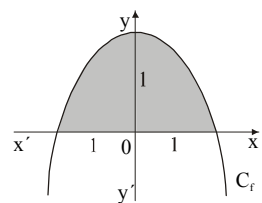
19. ** Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



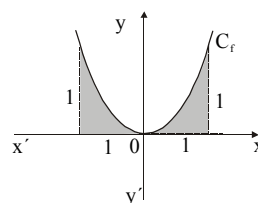
A



B



Γ



Δ

20. ** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_0^{\pi} \eta\mu 2x dx = 0$

β) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9\pi}{2}$

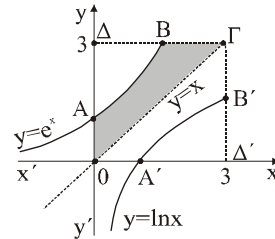
γ) $\int_1^2 (2x+1) dx = 4$

δ) $\int_{1/2}^5 \ln x dx < \int_1^5 \ln x dx$

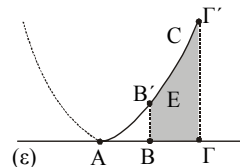
21. ** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $A'B'\Delta'$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Σημείωση: Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 6 στη σελίδα 350 του σχολικού βιβλίου Θετικής Κατεύθυνσης.



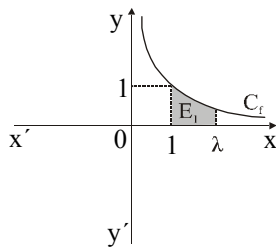
22. ** α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ είναι ίση με $\frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.



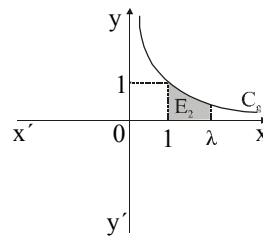
β) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιος ώστε $\xi^2 = \frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.

23. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0.$$



A



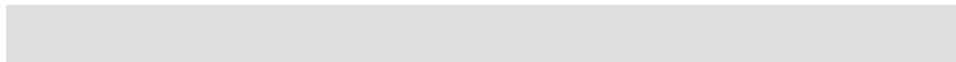
B

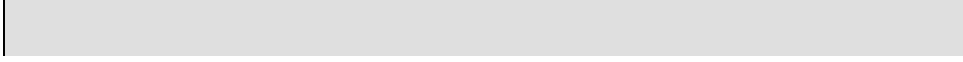
α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2 .

β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda f(x) dx$ και $I_2 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda g(x) dx$.

24. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.
- Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.
 - Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.
 - Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα $x'x$ που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
25. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.
26. ** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.
- Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε $f(x) + g(x) = h(x)$.
 - Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g .
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.
 - Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**





Κεφάλαιο 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Σ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Σ

13.	Λ
14.	Σ
15.	Σ
16.	Λ
17.	Σ
18.	Σ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Σ
23.	Λ
24.	Σ

25.	Σ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Λ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Ε
3.	Γ
4.	Γ
5.	Γ
6.	Α
7.	Δ
8.	Β

9.	Ε
10.	Ε
11.	Β
12.	Α
13.	Γ
14.	Β
15.	Δ
16.	Γ

17.	Δ
18.	Γ
19.	Δ
20.	Δ
21.	Δ
22.	Α
23.	Α

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

7. Η ερώτηση έχει τεθεί για να αρθεί η παρανόηση που υπάρχει σε πολλούς μαθητές ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο όταν $\alpha < \beta < \gamma$. Το σωστό είναι ότι ισχύει πάντα, εφόσον τα α, β, γ ανήκουν σε διάστημα. Έτσι σωστή απάντηση είναι η Δ.

9. Είναι $\mu = \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{(+1) - (-2)} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{2}$, αλλά το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x) dx$

παριστάνει το εμβαδόν του ημικυκλίου, που ισούται με $\frac{\pi}{2}$, άρα με $\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,

οπότε ισχύει το Ε (ας μην περιφρονούμε τη διάταξη των αριθμών).

14. Σκόπιμα δεν δίνονται στο σχήμα ποια είναι η C_f και ποια είναι η C_g . Πρέπει ο μαθητής να μπορεί να διαπιστώσει ότι στο διάστημα $[0, 1]$ είναι $x^2 \geq x^3$, οπότε απαντά εύκολα Β.

20. Δεν πρέπει ο μαθητής να «αθροίσει» τα δύο εμβαδά. Ισχύει $\int_0^{x_0} f(x) dx = E_1$

και $-\int_0^4 f(x) dx = E_2$, άρα $\int_{x_0}^4 f(x) dx = -E_2$, άρα $\int_0^4 f(x) dx = E_1 - E_2 =$

1,375. Σωστή απάντηση η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	η
2	ε
3	α
4	γ
5	β

2.

1	δ
2	ζ
3	β
4	η
5	γ

3.

1	β
2	ε
3	α
4	γ

4.

1	δ
2	α
3	ε

5.

1	γ
2	ε
3	β

6.

1	α
2	γ
3	δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $E_2 < E_1 < E_3$

2. $\mu_\phi < \mu_h < \mu_g < \mu_f$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Παραγοντική ολοκλήρωση

2. α) $L'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 50$ μήνες

β) $\int_0^{12} 3t \cdot e^{-0,02t} dt \approx 184$ δεκάδες χιλιάδες βαρέλια

γ) $\int_0^x 3t \cdot e^{-0,02t} dt$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 3t \cdot e^{-0,02t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left([-150x \cdot e^{-0,02t}]_0^x + [-7500e^{-0,02t}]_0^x \right) = 7.500$ δεκάδες χιλιάδες βαρέλια

3. α) Πρέπει $f(2) = 4, f(5) = 7, f(6, 12)$, άρα $f(x) = x^2 - 6x + 12$

β) $\int_2^6 f(x) dx = 484$

γ) $\frac{2}{3} (f(2) + 4f(5) + f(6)) = 484$

4. Επειδή το ποσοστό των ασθενών μετά από 15 μήνες είναι $f(15)$ και ο ρυθμός μεταβολής των νέων ασθενών που εξακολουθούν να δέχονται ιατρική φροντίδα t μήνες μετά την εισαγωγή τους είναι $10 \cdot f(15 - t)$, άρα μετά από 15 μήνες θα εξυπηρετεί $300 \cdot f(15) + \int_0^{15} f(10 - t) dt = \dots = 247$ ασθενείς

5. α) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta \mu x \, dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

β) $\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{-a}^0 f(x) \, dx = - \int_a^0 f(x) \, dx$ που προκύπτει, αν όπου x θέσουμε $-u$

6. α) Αρκεί $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

β) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

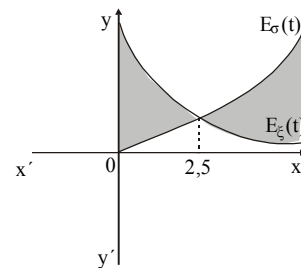
γ) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x > 0$, τότε $f(x) > y$ για κάθε

$x > 0$, άρα $E = \int_0^1 (f(x) - y) \, dx = \dots$

7. α) $E_{\sigma}(2) - E_{\xi}(2) < 0$, ενώ $E_{\sigma}(3) - E_{\xi}(3) > 0$

β) Θεωρούμε σαν σημείο τομής αυτό με τετμημένη 2, 5 (αν και είναι περιττό). Γενικά αν K το συνολικό κέρδος, ισχύει:

$$K = \int_0^{12} [E_{\sigma}(t) - E_{\xi}(t)] \, dt$$



8. α) Η ευθεία περνά από τα σημεία (2, 4) και (1, 1), άρα έχει εξίσωση $y = 3x - 2$ και η παραβολή περνά από το σημείο (1, 1), άρα έχει εξίσωση $y = x^2$

β) $E = \int_1^2 (3x - 2 - x^2) \, dx$

$$9. V = \int_0^1 \pi (e^{-x}) dx \approx 1,36$$

10. Οι συναρτήσεις πρέπει να τέμνονται στα σημεία O (0, 0) και A (1, 1) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, για να υπάρχει περιορισμένο χωρίο.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 (\alpha x - \alpha x^2) dx = \dots = \frac{\alpha}{6}, \text{ άρα } \frac{\alpha}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

11. α) $\int_5^{12} f'(x) dx = f(12) - f(5) < 0$, αφού f(5) η μέγιστη τιμή

β) $\int_0^{13} f(x) dx > 0$, αφού το εμβαδόν της ετικέτας κάτω από τον x'x είναι αρκετά μικρότερο από αυτό που φαίνεται να βρίσκεται πάνω από τον x'x

γ) $\int_5^6 f''(x) dx = f'(6) - f'(5)$ όμως $f'(5) = 0$ και $f'(6) < 0$, αφού στο σημείο αυτό η καμπύλη «κατέρχεται».

12. α) $(\beta - \alpha) f(\alpha) = \text{εμβαδόν ορθογωνίου}$, $(\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \text{εμβαδόν τραπεζίου}$

$$\beta) (\beta - \alpha) \left(\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq (\beta - \alpha) f(\beta)$$

$$\gamma) f \uparrow \text{ και } f''(x) > 0 \text{ άρα } 1 < I < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,207$$

$$13. \int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx = f'(\beta) - f'(\alpha) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$$

14. α) $T'(t) = 0$, άρα $t_0 = \sqrt{2}$

β) $T(\sqrt{2})$

γ) Για διακριτά ποσά η μέση τιμή έχει τη μορφή $\frac{1}{v} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v)$. Για συνεχείς μεταβολές (όπως είναι η μεταβολή του χρόνου) η αντίστοιχη σχέση θα είναι: $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$, άρα στην περίπτωση του προβλήματος

$$\bar{T} = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(t) dt$$

15. $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$, οπότε $f'(\beta) - f'(\alpha) > 0$ και $f'(x) > 0$, άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha) > 0. \text{ (Στα ίδια συμπεράσματα θα μπορούσαμε να}$$

φτάσουμε αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: $f(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0)$$

16. Αν A ο συνολικός πληθυσμός f η ζητούμενη συνάρτηση τότε

$$\frac{df}{dt} = K(A - f(t)) \text{ και } f(t) = A + ce^{-kt}$$

17. Η f δεν είναι συνεχής στο 0.

18. $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$ στο $[0, \pi]$

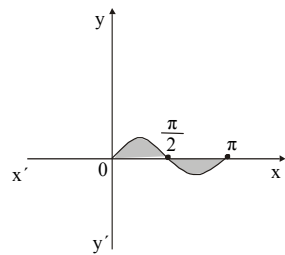
19. Α. $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$

Β. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Γ. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx$

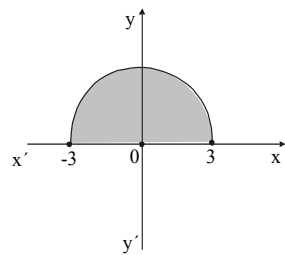
Δ. $\int_{-1}^1 x^2 dx$

20. α)



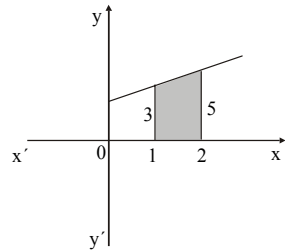
$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = - \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx$$

β)



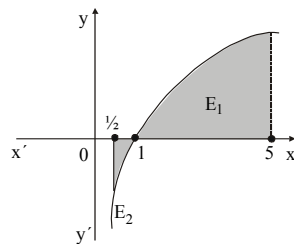
είναι εμβαδόν ημκυκλίου

γ)



εμβαδόν τραπεζίου

δ)



$E_1 > E_2$

21. α) $(A'B'D') = 3\ln 3 - 2$

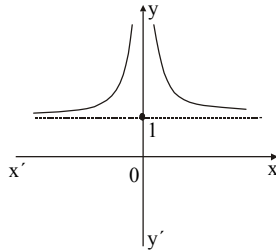
β) $(OΔΓ) = \frac{9}{2}, (AOΓB) = \frac{9}{2} - (3\ln 3 - 2)$ λόγω συμμετρίας

22. α) $\frac{1}{\lambda - \kappa} \int_{\kappa}^{\lambda} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{\lambda^3 - \kappa^3}{\lambda - \kappa} = \frac{1}{3} (\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$

β) Υπάρχει $\xi \in (\kappa, \lambda)$ ώστε $\frac{1}{\lambda - \kappa} \int_{\kappa}^{\lambda} x^2 dx = f(\xi) = \xi^2$

23. α) $E_1 = \ln \lambda, E_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ β) $I_1 = +\infty \quad I_2 = 1$

24. α)



β) Στο $[1, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1)$

γ) $\frac{9}{4}$

δ) $\int_2^a f(x) dx = \frac{9}{8}$

25. α) $[\ln f(x)]' = \left(-\frac{1}{x}\right)' \dots$ β) $2004 \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\right)$

26. α) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ γ) $E(\lambda) = 1 - \frac{1}{e^\lambda}$ δ) 1

