ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο Κεφάλαιο **ΑΝΑΛΥΣΗ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

2. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

Στις παρακάτω ερωτήσεις όλες οι συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του R.

3. * Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

4. * Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ όπου $x, y \in R$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

5. * Η σχέση g με τύπο $g(x) = x^2$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

6. * Η σχέση f με τύπο $f(x) = 20x$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

7. * Η σχέση h με τύπο $h(t) = \pm\sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

8. * Η σχέση f με τύπο $f(t) = \sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

9. * Αν για μια συνάρτηση f, που έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$, τότε $x = y$. **Σ** **Λ**

10. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση S = f + g ορίζεται στο ίδιο σύνολο. **Σ** **Λ**

11. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ ορίζεται πάντοτε στο ίδιο ακριβώς σύνολο. **Σ** **Λ**

12. * Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

13. * Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

14. * Οι συναρτήσεις f (x) = ημx και g (x) = συνx είναι συνεχείς. **Σ** **Λ**

15. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

16. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 0$, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

17. * Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της. **Σ** **Λ**

18. * Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου Α. **Σ** **Λ**

19. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

20. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

21. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός. **Σ** **Λ**

22. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι η παράγωγος της f στο x_0. **Σ** **Λ**

23. * Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$, ως προς x, όταν $x = x_0$. **Σ** **Λ**

24. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με το

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. **Σ** **Λ**

25. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. **Σ** **Λ**

26. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. **Σ** **Λ**

27. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. **Σ** **Λ**

28. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, ισούται με τον συντελεστη διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής. **Σ** **Λ**

29. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **Σ** **Λ**

30. * Η παράγωγος της συνάρτησης $g(\kappa) = \kappa^q$, όπου $q \in Q$, είναι $g'(\kappa) = q\kappa^{q-1}$. **Σ** **Λ**

31. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι αντίστοιχα $f'(x) = (ημx)' = συνx$ και $g'(x) = (συνx)' = -ημx$. **Σ** **Λ**

32. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $E(x) = e^x$ και $L(x) = \ln x$ είναι αντίστοιχα $E'(x) = (e^x)' = e^x$ και $L'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. **Σ** **Λ**

33. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης g είναι η σταθερή συνάρτηση 1, τότε η g είναι της μορφής $g(x) = cx$, $c \in R - \{1\}$. **Σ** **Λ**

34. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι 4ου βαθμού, τότε η g είναι 5ου βαθμού. **Σ** **Λ**

35. * Αν η δεύτερη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι σταθερή, τότε η g είναι το πολύ 2ου βαθμού. **Σ** **Λ**

36. * Η συνάρτηση f΄ με $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, όπου x τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f. **Σ** **Λ**

37. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄ λέγεται πρώτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

38. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄΄ λέγεται τρίτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

39. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5$ είναι $f'(x) = 5x$. **Σ** **Λ**

40. * Η παράγωγος της συνάρτησης $s(t) = t$ είναι $s'(t) = 1$. **Σ** **Λ**

41. ** Θέσεις πιθανών ακροτάτων συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σ' ένα διάστημα Δ είναι μόνο τα σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται. **Σ** **Λ**

42. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0) = 0$. **Σ** **Λ**

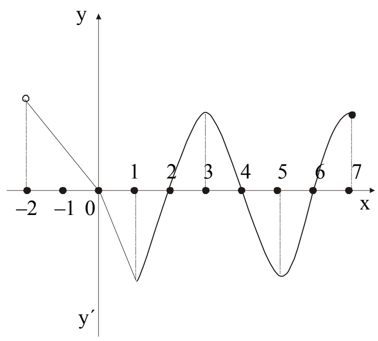
43. ** Αν για συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχή σ' ένα διάστημα Δ, υπάρχει η $f'(x_0)$ και είναι $f'(x_0) \neq 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f. **Σ** **Λ**

44. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος ισούται με μηδέν, είναι θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

45. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία x του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος $f'(x)$ ισούται με μηδέν, αποτελούν πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

46. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

47. ** Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

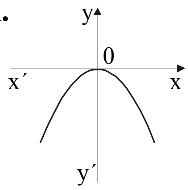


i.	Το πεδίο ορισμού της f είναι [- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
ii.	Το πεδίο ορισμού της f είναι (- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
iii.	Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (2, 4) τοπικό μέγιστο, για x = 3.	**Σ**	**Λ**
iv.	Ισχύει ότι $f'(3) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
v.	Ισχύει $f'(x) > 0$ για $x \in (2, 3)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (3, 4)$.	**Σ**	**Λ**
vi.	Στο διάστημα (2, 3) η συνάρτηση f είναι αύξουσα.	**Σ**	**Λ**
vii.	Ισχύει $f'(5) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
viii.	Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (3, f (3)) και (5, f (5)) είναι παράλληλες μεταξύ τους.	**Σ**	**Λ**
ix.	Στο διάστημα (0, 2) η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 1.	**Σ**	**Λ**
x.	Ορίζεται το $f'(1)$.	**Σ**	**Λ**

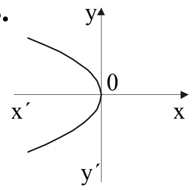
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

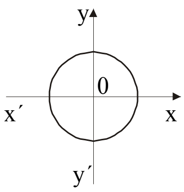
Α.



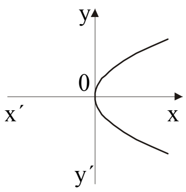
Β.



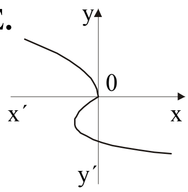
Γ.



Δ.

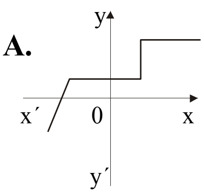


Ε.

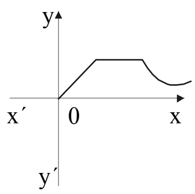


2. * Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

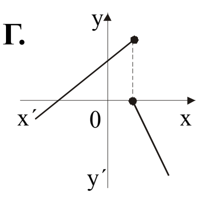
Α.



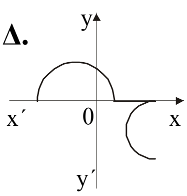
Β.



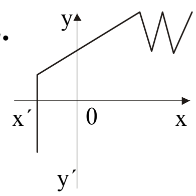
Γ.



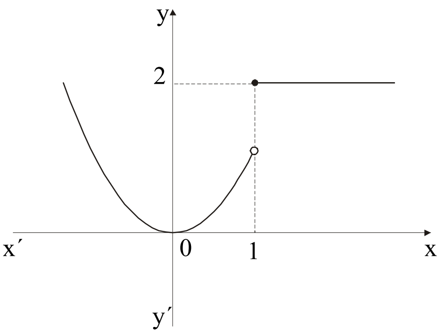
Δ.



Ε.



3. * Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης



Α. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

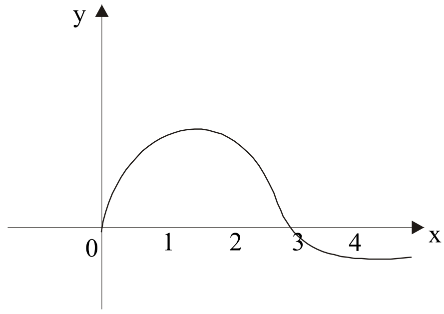
Β. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Δ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

Ε. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

4. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι

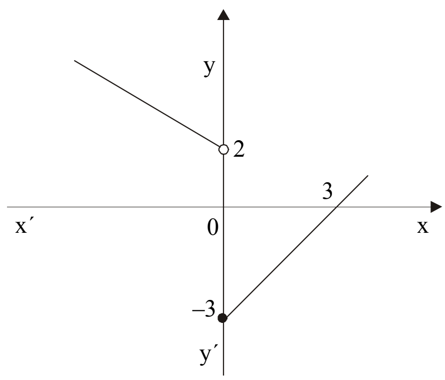


Α. [0, 3] **Β.** [0, ∞)

Γ. (0, 3) **Δ.** (0, + ∞)

Ε. [0, 4]

5. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι



Α. (-∞, 2) **Β.** (-∞, 3]

Γ. (-∞, + ∞) **Δ.** (-∞, 3]

Ε. (0, 3]

6. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι

Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

7. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ είναι

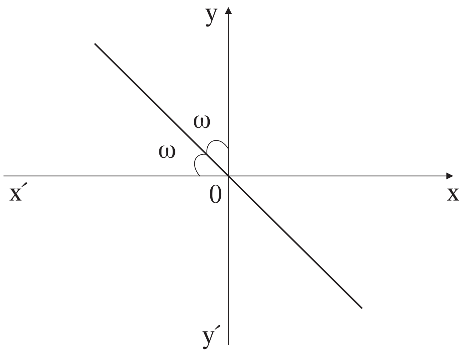
Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

8. * Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = -x$ **Β.** $f(x) = x$

Γ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **Δ.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Ε. $f(x) = -2x$

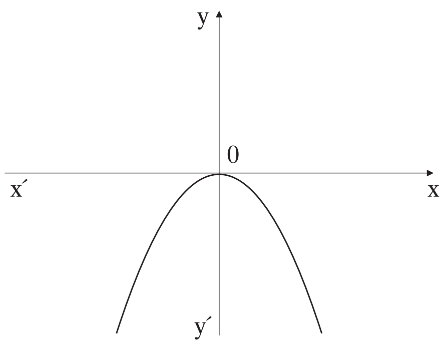


9. * Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = x^2$ **Β.** $f(x) = -x^2$

Γ. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **Δ.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ε. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



10. * Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, τότε η συνάρτηση $h = \dfrac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το σύνολο R **Β.** τα $x \in A$: $f(x) \neq 0$ **Γ.** τα $x \in A$: $g(x) \neq 0$

Δ. τα $x \in A$: $f(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ **Ε.** τα $x \in A$: $f(x) = g(x) = 0$

11. * Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. ισχύει $f(x_0) = 0$

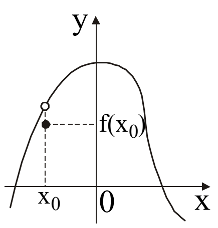
Β. ισχύει $f(x_0) \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

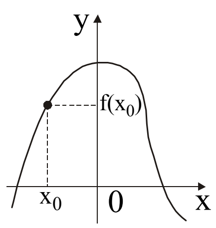
Δ. ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ε. ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

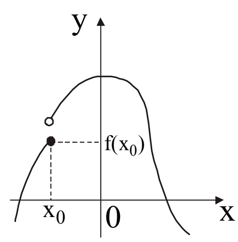
12. *



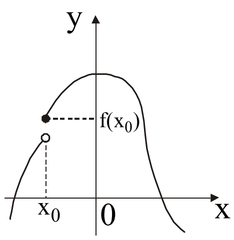
σχ.1



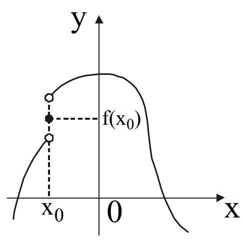
σχ.2



σχ.3



σχ.4



σχ.5

Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζονται πέντε γραφικές παραστάσεις ισάριθμων συναρτήσεων. Στη θέση x_0 συνεχής είναι η συνάρτηση

Α. του σχήματος 1 **Β.** του σχήματος 2 **Γ.** του σχήματος 3

Δ. του σχήματος 4 **Ε.** του σχήματος 5

13. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και είναι πραγματικός αριθμός

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

14. * Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εκφράζει

Α. την τιμή της συνάρτησης στη θέση x_0

Β. την τιμή του κλάσματος $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$

Γ. το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$

Δ. το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς $x - x_0$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

15. * Παράγωγο $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ονομάζουμε

Α. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. το $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

16. * Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε το κλάσμα $\dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R, h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

17. * Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε η τιμή $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R, h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

18. ** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $\Delta \subseteq R$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η f ΄ είναι αρνητική

Α. μόνο σ’ ένα σημείο του Δ

Β. σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ

Γ. στο σημείο μηδέν

Δ. μόνο στα σημεία που μηδενίζουν την f

Ε. κανένα από τα παραπάνω

19. * Αν για συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

20. * Αν για συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

21. * Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ’ ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

22. * Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

23. ** Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο υπάρχει $f''(x_0)$. Το εσωτερικό σημείο x_0, είναι σημείο ακροτάτου της f, αν ισχύει

Α. $f(x_0) = 0$ **Β.** $f'(x_0) \neq 0$ **Γ.** $f''(x_0) = 0$

Δ. $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$

Ε. $f'(x_0) > 0$ και $f(x_0) = 0$

24. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι (για $h \neq 0$)

Α. $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h(2x+h)}{h}$ **Β.** $\lim\limits_{h \to 0} h(2x+h)$ **Γ.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Δ. 2 **Ε.** x

25. * Αν ο μεγιστοβάθμιος όρος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι $αx^α$, όπου $α \neq 0$, $α \neq 1$, τότε η παράγωγός της είναι

Α. σταθερή συνάρτηση

Β. τριγωνομετρική συνάρτηση

Γ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $α^2x^{α-1}$

Δ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $αx^{α-1}$

Ε. δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε χωρίς τον τύπο της συνάρτησης

26. * Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2}$ είναι

Α. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x$

Β. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$

Γ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = x$

Δ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = |x|$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

27. * Η συνάρτηση $f(x) = ημ3x$ είναι

Α. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = 3ημx$

Β. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = συν3x$

Γ. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = 3x$

Δ. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{συν3x}{3}$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

28. * Αν $L(x) = f(g(x))$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

Α. $L'(x) = f'(g(x))$

Β. $L'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

Γ. $L'(x) = f'(x) + g'(x)$

Δ. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot f(x)$

Ε. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

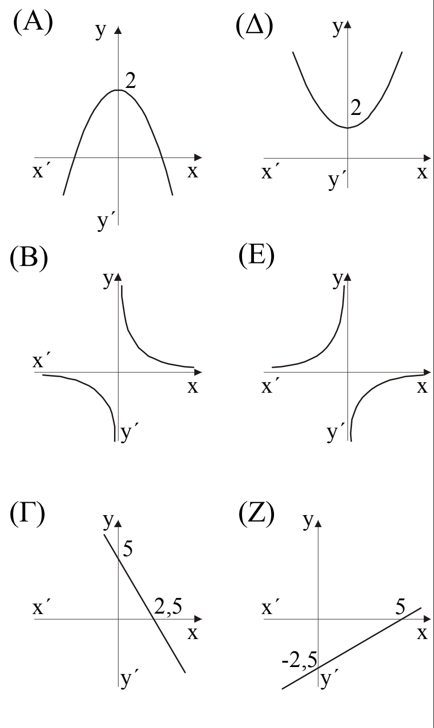
1. * Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f(x) = 2x$	R
$f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	$(0, 1)$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
	$(1, \infty)$
	$[1, \infty)$

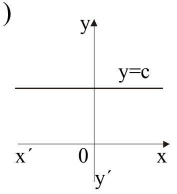
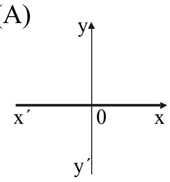
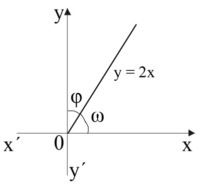
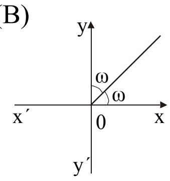
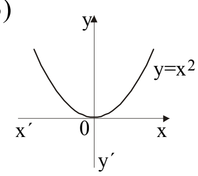
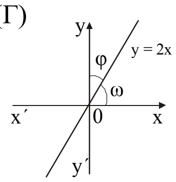
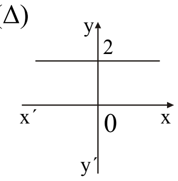
2. ***** Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$[-2, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(-2, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$
	$(0, +\infty)$
	$(-2, 0) \cup (0, \infty)$
	$(-2, +\infty)$

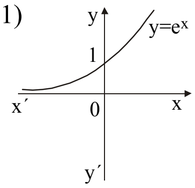
3. * Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο της συνάρτησης της στήλης Α με τη γραφική της παράσταση στη στήλη Β.

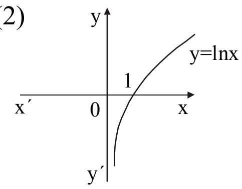
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = -3x^2 + 2$ 2. $\varphi(x) = \dfrac{6}{x}$ 3. $h(x) = -2x + 5$	

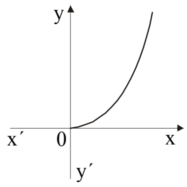
4. * Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

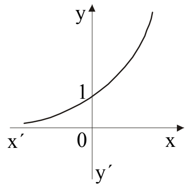
Στήλη Α	Στήλη Β
(1) 	(Α) 
(2) 	(Β) 
(3) 	(Γ) 
	(Δ) 

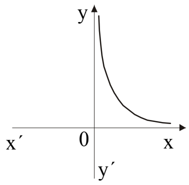
5. * Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr>
<td>
(1)


(2)


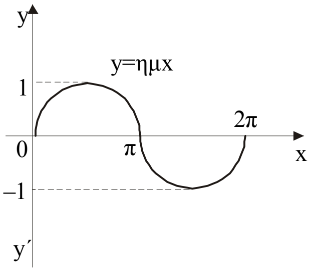
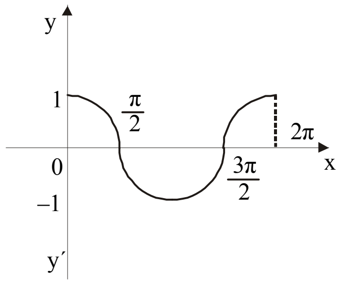
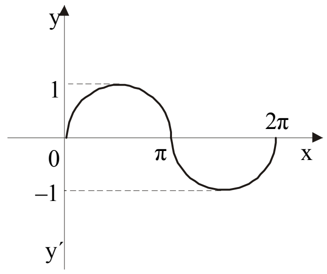
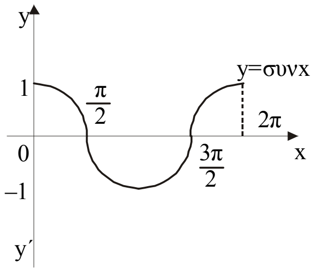
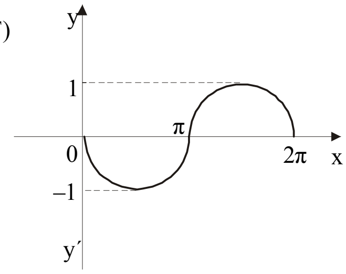
</td>
<td>
(Α)


(Β)


(Γ)


</td>
</tr>
</table>

6. * Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
(1) 	(A) 
	(Β) 
(2) 	(Γ) 

7. ***** Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
$3x^2$	$6x^2 - 1$
	$6x$
$3x$	
	3
$2\,(x^2 - 1)$	$4x$
	$3x - 1$
$(3x)^2$	
	$18x$
$(3x - 1)^2$	$6\,(3x - 1)$
	$6x^2$
$3x^2 - x$	
	$6x - 1$

8. ***** Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
f (x)	***f ΄(x)***
α	0
αx	α
βx + α	β
$αx^2$ + β	αx + β
$βx^2$	2αx
$αx^2$ - βx	2βx + γ
$βx^2$ + αx - γ	2βx
	2αx - β
	2αx + β
	2βx + α
	2α + βx

9. * Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα πρώτα μέλη ισοτήτων, οι οποίες εκφράζουν τους κανόνες παραγώγισης. Στη στήλη Β υπάρχουν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων αυτών. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης Α με εκείνα της στήλης Β ώστε να προκύψουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	$f\,'(x)\,g(x) + f(x)\,g\,'(x)$
$(c\,f(x))' =$	$\dfrac{f\,'(x)\,g(x) - f(x)\,g\,'(x)}{g^2(x)}$
$(f(x) + g(x))' =$	$f\,'(x) + g\,'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$c\,f\,'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$f\,'(x) \cdot g\,'(x)$
$[f(g(x))]' =$	$f\,'(g(x)) \cdot g\,'(x)$
	$\dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. * Να συμπληρώσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ Α = ...

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ A = ...

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ A = ...

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ A = ...

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ A = ...

2. * Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε και να συμπληρώσετε τα $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, όταν:

α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x)-1}{5-3f(x)}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x)+11}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

3. * Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) =$ ....

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} =$ ....

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) =$ ....

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 =$ ....

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [ημx + 3συνx] =$ ....

στ) $\lim\limits_{x \to 0} [2ημx - 4συνx] =$ ....

4. * Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$ ....

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} =$ ....

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x + 1)} =$ ....

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = $ ....

5. * Να συμπληρώσετε τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

α) $f(x) = x^2$ $\quad$ $f'(0) =$...........................

β) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad$ $f'(1) =$...........................

γ) $f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad$ $f'(-1) =$ ....

δ) $f(x) = ημx$ $\quad$ $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$ ....

ε) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ $\quad$ $f'(0) =$...........................

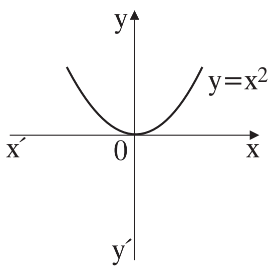
6. * Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

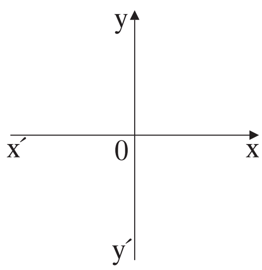
α) $f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $A(0, f(0))$ $\quad$ $y =$ ....

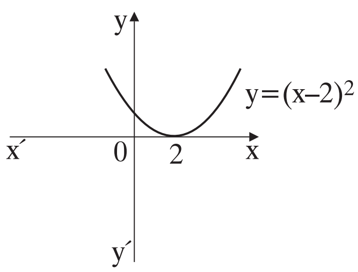
β) $f(x) = 2x^2 - 1$ $\quad$ $A(1, f(1))$ $\quad$ $y =$ ....

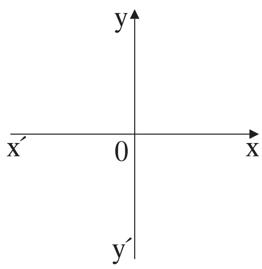
γ) $f(x) = 3x^2 - 2$ $\quad$ $A(-1, f(-1))$ $\quad$ $y =$ ....

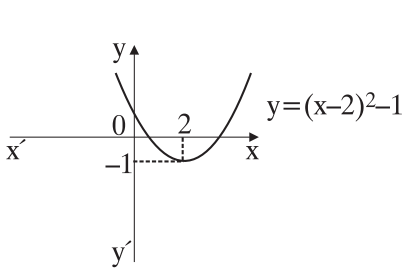
7. * Για κάθε γραφική παράσταση της $y = f(x)$ χαράξτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της.

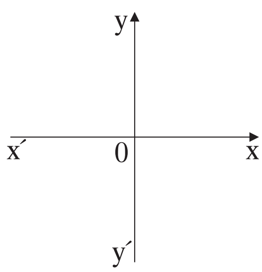

y
y=x2
x´
0
x
y´


y
x´
0
x
y´


y
y=(x–2)2
x´
0
2
x
y´


y
x´
0
x
y´


y
y=(x–2)2–1
0
2
x´
–1
x
y´


y
x´
0
x
y´

8. * Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	
$(x - 1)^2$	
$(x^2 - 1)^2$	
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	
$\dfrac{1}{(x - 1)^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{(x - 1)^3}}$	

9. * Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$\sqrt{\eta\mu x}$	
$\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$	
$x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$	
$\dfrac{x}{\sqrt{\eta\mu x}}$	
$\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$	

10. * Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - \ln x$	
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	
e^{-2x^3+1}	
$\ln \sqrt{x^2 - 2}$	

11. * Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τύποι τεσσάρων συναρτήσεων. Να συμπληρώσετε τη στήλη Β με το αντίστοιχο πεδίο ορισμού τους, τη στήλη Γ με την πρώτη παράγωγό τους και τη στήλη Δ και τη δεύτερη παράγωγό τους.

Στήλη Α	**Στήλη Β** ***πεδίο ορισμού***	**Στήλη Γ** ***πρώτη παράγωγος***	**Στήλη Δ** ***δεύτερη παράγωγος***
$h(x) = \frac{1}{x^2}$			
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$			
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$			
$g(x) = \frac{x - 1}{x^2}$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται η συνάρτηση f με f (x) = x^2 - 3x + 2. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) για ποιες τιμές του x ∈ Α έχουμε f (x) = 0

γ) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

2. ** Δίνεται η συνάρτηση g με g (x) = x^2 + 2.

α) Για ποιες τιμές του x ∈ R έχουμε g (x) = 0;

β) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

ii) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

3. ** Δίνεται η συνάρτηση g με g (x) = x^2 - 1.

α) Για ποιες τιμές του x ∈ R έχουμε g (x) = 0;

β) Για ποιες τιμές του x ∈ R η συνάρτηση g (x) είναι θετική;

γ) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

ii) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

iii) το πεδίο ορισμού Γ της συνάρτησης $\varphi(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4. ** Δίνεται η συνάρτηση g με g (x) = x - 4.

α) Για ποιες τιμές του x ∈ R έχουμε g (x) = 0;

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 4}$

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - 4x - 2$ και $g(x) = 3x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Α

β) τον τύπο της συνάρτησης $3f(x) - 2g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Β

γ) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Γ

δ) τον τύπο της συνάρτησης $\frac{f(x)}{g(x)}$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Δ

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 5x^2 - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

β) το $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)]$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$

γ) το $\lim\limits_{x \to 1} [\varphi(x)]^3$

8. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{6x^2 - 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)$

9. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 6x^3 + 5x - 1$, $g(x) = 2x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) τα $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

β) το $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

10. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, όταν:

α) $\varphi(x) = 3f(x)$

β) $\varphi(x) = 3f(x) - 2$

γ) $\varphi(x) = \dfrac{5f(x)}{f^3(x) - 2}$

δ) $\varphi(x) = \sqrt{2f^2(x) - 1}$

11. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

12. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x)$

13. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

14. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + \alpha}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

15. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x + (\alpha + 2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

16. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 4}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

γ) Να εξετάσετε, αν η $f(x)$ είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

17. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \neq 3 \\ \alpha, & x = 3 \end{cases}$.

α) Για $x \neq 3$ είναι συνεχής η συνάρτηση;

β) Για ποια τιμή του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$;

18. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

β) την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

19. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x + x^2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha \quad , & x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{-x + x^2}{x - 1}$

γ) την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

20. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha \quad , & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

21. ** Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι δ. Να εκφράσετε, ως συνάρτηση της διαγωνίου δ:

α) την περίμετρό του β) το εμβαδό του

22. ** Οι κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) μεταβάλλονται έτσι ώστε το εμβαδό του να παραμένει σταθερό και ίσο με 12 m^2. Να εκφράσετε το μήκος x της πλευράς ΑΒ, ως συνάρτηση του μήκους y της πλευράς ΑΓ.

23. ** Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας r έχει εμβαδό 30 cm^2. Να εκφράσετε την περίμετρό του, ως συνάρτηση της ακτίνας r.

24. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(3)$

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο με x = 3

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

25. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = αx^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(2, f(2))$ να είναι 4.

26. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $x = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

27. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(x)$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

28. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - αx$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $45°$.

29. ** Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η εφαπτομένη της καμπύλης, που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + x - 3$ στο σημείο $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$.

30. ** Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $S(t) = 2t + t^2$, όπου το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 1 sec (1 sec μετά την εκκίνησή του).

31. ** Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $S(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [2, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 3 sec (3 sec μετά την εκκίνησή του).

32. ** Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $υ(t) = 3t^2 - 5$.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = t_0$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν t = 10 sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

33. ** Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + t)^{-1}$.

α) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων (t = 0).

β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν t = 9 ώρες.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν t = 9 ώρες.

34. ** Ο πληθυσμός A μιας περιοχής δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη) από τον τύπο $A(t) = 10 \cdot e^{0{\cdot}04t}$ (σε χιλιάδες). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο, ύστερα από 25 έτη.

35. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$, $g(x) = e^x \cdot x^2$. Να βρείτε:

α) Την πρώτη παράγωγο i) της f και ii) της g.

β) Τις παραγώγους i) $f'(1)$ και ii) $g'(1)$.

36. ** Να βρείτε πολυώνυμο P (x) τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε $P(0) = -1$, $P'(1) = 5$, $P'(0) = 2$, $P''(1) = 2$.

37. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x - x^2$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι: $(1 - x) f''(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

38. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{2x}$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να δείξετε ότι: $2f'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

39. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την $f''(x)$

γ) Τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in R$.

40. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{(x+1)^3}$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το $f'(0)$.

41. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, A

β) Την $f'(x)$.

42. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

43. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1 - ημx}{1 - συνx}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

44. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη 4.

46. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135°.

47. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = α(x + 1)^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τον α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο (1, f (1)) να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

48. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$

β) Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

49. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - αx + β$, $α, β \in R$ και η ευθεία $y = 3x - 1$, $x \in R$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η ευθεία $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.

50. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$.

β) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

51. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f'(α) = -\frac{4}{α^3}$ για κάθε $α \in R$, $α \neq 0$.

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(α, \frac{2}{α^2})$ της γραφικής παράστασης της f.

52. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

53. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ και $g(x) = 4x - x^2 + 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) i) την $f'(x)$ και ii) την $g'(x)$.

β) Τις θέσεις για τις οποίες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν ακρότατο

γ) Τις τιμές των ακροτάτων αυτών.

54. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Για ποιες τιμές του x έχουμε $f'(x) = 0$

γ) Ποιες από τις παραπάνω τιμές των x είναι θέσεις ακροτάτων για την f

δ) Τις τιμές των ακροτάτων.

55. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3$, $x \in R$, $\kappa, \lambda \in R$.

α) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2.

β) Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση $x = 1$;

56. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in R$. Να βρεθούν τα διαστήματα που η f είναι:

α) Αύξουσα

β) Φθίνουσα

57. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

α) Να βρεθούν οι $f'(x)$, $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιοριστούν τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

58. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (2x - x^2)\, e^x$, $x \in R$.

α) Να βρεθούν: i) το πεδίο ορισμού της, ii) η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς: i) τη μονοτονία της,

ii) τα ακρότατά της και να εντοπιστούν αυτά, αν υπάρχουν.

59. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = κx^3 + λx^2 + 3x - 1$, $x \in R$, $κ, λ \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τα κ, λ, ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.

60. ** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με την ίδια περίμετρο, ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό;

61. ** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδό 1600 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

62. ** Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει μεγαλύτερο εμβαδό.

63. ** Να βρεθούν δύο αριθμοί x, y με σταθερό άθροισμα 12, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

64. ** Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1.000 δρχ. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + 250t^{-1}$$

α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος;

β) Πόσο είναι αυτό;

65. ** Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$E(υ) = \frac{1}{υ}\,[2(υ - 35)^2 + 750]$$

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να καταναλώσει τη μικρότερη ενέργεια;

β) Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

66. ** Η ενέργεια W (t), που αποδίδεται από ένα πηνίο, μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης:

$$W(t) = 6t^2 - t^4$$

και μετριέται σε Joules.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο (την ισχύ του πηνίου) τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ;

γ) Πόσα Watt είναι η μέγιστη ισχύς;

67. ** Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων είναι σταθερή τα τελευταία 8 χρόνια στις 100 δρχ. Το κόστος μεταφοράς ανά επιβάτη στη διάρκεια των 8 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + \frac{250}{t}$$

όπου $t \in (0, 8]$ ο χρόνος.

α) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.

β) Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

68. ** Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ' ένα φάρμακο περιγράφεται (δίνεται) από τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = x^2 (\alpha - x)$, $\alpha > 0$ σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου σε mg. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;

69. ** Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου $(\frac{x^2}{4} + 25x + 25)$ δρχ. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι $(1000 - \frac{x}{2})$ δρχ., πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκο πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

2ο Κεφάλαιο	**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1.	* Το χρώμα κάθε αυτοκινήτου είναι ποιοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
2.	* Ο αριθμός των ανθρώπων που παρακολουθούν μια συγκεκριμένη τηλεοπτική εκπομπή είναι διακριτή ποσοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
3.	* Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Γ΄ Λυκείου είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
4.	* Συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής αυτής.	**Σ**	**Λ**
5.	* Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.	**Σ**	**Λ**
6.	* Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός.	**Σ**	**Λ**
7.	* Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i.	**Σ**	**Λ**
8.	* Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.	**Σ**	**Λ**
9.	* Το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), όπου f_i η σχετική συχνότητα της τιμής x_i, αποτελεί την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.	**Σ**	**Λ**
10.	* Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών.	**Σ**	**Λ**
11.	* Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.	**Σ**	**Λ**

12. * Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i. Σ Λ

13. * Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Σ Λ

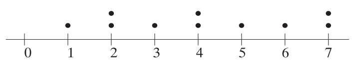
14. * Όταν θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση των τιμών της μεταβλητής Χ: “αριθμός αδελφών μαθητών της Γ΄ Λυκείου” χρησιμοποιούμε το διάγραμμα συχνοτήτων. Σ Λ

15. * Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. Σ Λ

16. * Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά των οποίων είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i. Σ Λ

17. * Το σημειόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης μιας εξεταζόμενης μεταβλητής. Σ Λ

18. * Το διπλανό σχήμα είναι ένα χρονόγραμμα. Σ Λ



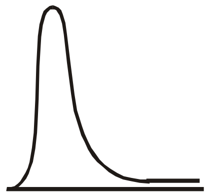
19. * Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν τα δεδομένα σε κλάσεις. Σ Λ

20. * Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατώτερου και του ανώτερου ορίου της κλάσης. Σ Λ

21. * Όταν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μικρός και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μεγάλο τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων. Σ Λ

22. * Η κατανομή συχνοτήτων με “κωδωνοειδή” μορφή λέγεται κανονική κατανομή. Σ Λ

23. * Η διπλανή κατανομή είναι ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία. **Σ** **Λ**



24. * Σε όλες τις περιπτώσεις οι κλάσεις ενός δείγματος έχουν όλες το ίδιο πλάτος. **Σ** **Λ**

25. * Το εύρος του δείγματος χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις. **Σ** **Λ**

26. * Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους. **Σ** **Λ**

27. * Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης. **Σ** **Λ**

28. * Το πλάτος των κεντρικών τιμών ισοπλατών κλάσεων ενός δείγματος ισούται με το πλάτος των κλάσεων αυτών. **Σ** **Λ**

29. * Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων μιας κατανομής με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ιστόγραμμα συχνοτήτων. **Σ** **Λ**

30. * Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν ίσο με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης. **Σ** **Λ**

31. * Ο σταθμικός μέσος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις όπως και ο αριθμητικός μέσος. **Σ** **Λ**

32. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. **Σ** **Λ**

33. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο ν είναι περιττός. **Σ** **Λ**

34. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται η ημιδιαφορά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. **Σ** **Λ**

35. * Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς. **Σ** **Λ**

36. * Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης. **Σ** **Λ**

37. * Επικρατούσα τιμή ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη σχετική συχνότητα. **Σ** **Λ**

38. * Ορίζουμε ως κ εκατοστιαίο σημείο ή $P_κ$ εκατοστημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ κ% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του $P_κ$ και το πολύ (100 - κ) % των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. **Σ** **Λ**

39. * Για το Q_1 τεταρτημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων έχουμε αριστερά το πολύ 75% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων. **Σ** **Λ**

40. * Το Q_2 τεταρτημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων ισούται με τη διάμεσο. **Σ** **Λ**

41. * Έχουμε τις παρατηρήσεις: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5.

i) Η διάμεσος είναι 2. **Σ** **Λ**

ii) Το τεταρτημόριο Q_1 είναι ίσο με 1. **Σ** **Λ**

iii) Το τεταρτημόριο Q_3 είναι ίσο με 4. **Σ** **Λ**

42. * Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων
0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 7 είναι ο αριθμός 7. **Σ** **Λ**

43. * Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης. **Σ** **Λ**

44. * Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής. **Σ** **Λ**

45. * Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς. Σ Λ

46. * Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%. Σ Λ

47. * Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm και η διακύμανση εκφράζεται σε cm. Σ Λ

48. * Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Σ Λ

49. * Το εύρος ή κύμανση (R) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης. Σ Λ

50. * Το εύρος ενός δείγματος βασίζεται στις δύο ακραίες παρατηρήσεις και είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς. Σ Λ

51. * Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3. Σ Λ

52. * Η διακύμανση ή διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή τους $\overline{x}$. Σ Λ

53. * Τα μέτρα θέσης δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον κατακόρυφο άξονα Oy. Σ Λ

54. * Τα μέτρα διασποράς μας δίνουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το “κέντρο” τους. Σ Λ

55. * Τα μέτρα ασυμμετρίας καθορίζουν τη μορφή της κατανομής. Σ Λ

56. * Τα μέτρα ασυμμετρίας εκφράζονται μόνο σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης. Σ Λ

57. * Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων. Σ Λ

58. * Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή X και μια εξαρτημένη μεταβλητή

Y η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση του X. **Σ** **Λ**

59. * Η γραμμική παλινδρόμηση εμφανίζεται μόνο σε πειραματικές μελέτες και όχι σε μη πειραματικές. **Σ** **Λ**

60. * Όταν μας ενδιαφέρει "τι συμβαίνει με το βάρος (Y) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (X)" τότε η Y είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η X η εξαρτημένη. **Σ** **Λ**

61. * Όταν μας ενδιαφέρει "τι συμβαίνει με το βάρος (Y) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (X)" τότε ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του βάρους (Y) πάνω στο ύψος (X). **Σ** **Λ**

62. * Η "μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων" χρησιμοποιείται για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς, που προσαρμόζεται στα δεδομένα. **Σ** **Λ**

63. * Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ καλείται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης της X (πάνω) στη Y. **Σ** **Λ**

64. * Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ διέρχεται από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης το $\hat{\beta}$. **Σ** **Λ**

65. * Στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ η τιμής της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν x = 0. **Σ** **Λ**

66. * Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν $\hat{\alpha} = 0$. **Σ** **Λ**

67. * Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. **Σ** **Λ**

68. * Στην ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, όταν $\hat{\beta} < 0$ και το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες. **Σ** **Λ**

69. * Η συσχέτιση είναι διαδικασία μελέτης πληθυσμού με μια μεταβλητή. **Σ** **Λ**

70. * Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι ένα μέτρο που μας δίνει το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης. **Σ** **Λ**

71. * Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. **Σ** **Λ**

72. * Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y ισχύει πάντοτε ότι $-1 \leq r \leq +1$. **Σ** **Λ**

73. * Αν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r δύο μεταβλητών X και Y πλησιάζει το + 1 τότε τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\hat{\beta} > +1$. **Σ** **Λ**

74. * Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r δύο μεταβλητών X και Y ισχύει $r = +1$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες. **Σ** **Λ**

75. * Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r δύο μεταβλητών X και Y ισχύει $r = 0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Από τις παρακάτω μεταβλητές διακριτή ποσοτική είναι

Α. το βάρος μαθητών.

Β. η μηνιαία κατανάλωση ρεύματος.

Γ. ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών.

Δ. ο αριθμός απουσιών.

Ε. η ποιότητα του περιεχομένου των βιβλίων.

2. * Το ζεύγος που αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων είναι

Α. (x_i, ν_i). **Β.** (x_i, f_i). **Γ.** (ν_i, f_i). **Δ.** $(x_i f_i, \nu x_i)$. **Ε.** $(\nu f_i, x_i)$.

3. * Σε ένα δείγμα μεγέθους ν με συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ η σχετική συχνότητα f_i ισούται με

Α. $f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$. **Β.** $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$. **Γ.** $f_i = \nu_i - \nu$. **Δ.** $f_i = \nu_i \cdot \nu$. **Ε.** $f_i = \dfrac{100}{\nu_i}$.

4. * Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε αν στην τιμή x_i αντιστοιχίσουμε τη συχνότητα ν_i ισχύει

Α. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = 100$. **Β.** $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$.

Γ. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \kappa$. **Δ.** $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu\kappa$.

Ε. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = 100\nu$.

5. * Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \leq \nu$, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ ισχύει

Α. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 100$. **Β.** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \kappa^2$.

Γ. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$. **Δ.** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 100\kappa$.

Ε. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \kappa$.

6. * Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με $α_i$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το $α_i$ ισούται με

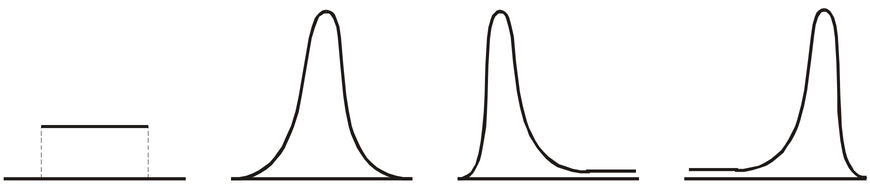
Α. $360°\ ν_i$. **Β.** $360°\ f_i$. **Γ.** $90°\ f_i$.

Δ. $180°\ ν_i$. **Ε.** $180°\ f_i$.

7. * Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, αν R είναι το εύρος του δείγματος και κ ο αριθμός των κλάσεων, το πλάτος των κλάσεων c θα είναι

Α. $c \approx \frac{R}{κ}$. **Β.** $c \approx \frac{κ}{R}$. **Γ.** $c \approx κ \cdot R$. **Δ.** $c \approx κ - R$. **Ε.** $c \approx R - κ$.

8. * Από τις παρακάτω κατανομές συχνοτήτων



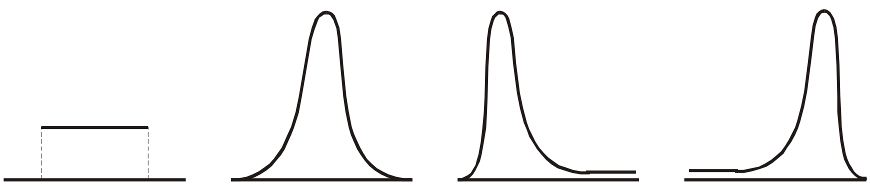
(1) (2) (3) (4)

αυτή που προσεγγίζει καλύτερα την κανονική είναι η

Α. (1). **Β.** (2). **Γ.** (3).

Δ. (4). **Ε.** καμία από τις παραπάνω.

9. * Από τις παρακάτω κατανομές συχνοτήτων



(1) (2) (3) (4)

ομοιόμορφη είναι η

Α. (1). **Β.** (2). **Γ.** (3).

Δ. (4). **Ε.** καμία από τις παραπάνω.

10. * Αν α, β είναι τα άκρα των κλάσεων σε μια ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις είναι της μορφής

Α. (α, β). **Β.** [α, β). **Γ.** (α, β]. **Δ.** [α, β].

Ε. όλα τα παραπάνω.

11. * Σε ένα δείγμα μεγέθους ν αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$. Τότε η μέση τιμή $\overline{x}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} t_i$. **Β.** $\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i$. **Γ.** $\frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$.

Δ. $\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$. **Ε.** $\frac{1}{\nu - 1} \sum_{i=1}^{\nu} t_i$.

12. * Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο

Α. $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\nu}$. **Β.** $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i}$.

Γ. $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$. **Δ.** $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$.

Ε. $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i^2}$.

13. * Στις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6 η επικρατούσα τιμή είναι

Α. 1. **Β.** 2. **Γ.** 3. **Δ.** 4. **Ε.** 6.

14. * Στις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 3, 4, 5 η επικρατούσα τιμή είναι

Α. 0. **Β.** 1. **Γ.** 2. **Δ.** 3.

Ε. καμία από τις παραπάνω.

15. * Μέτρο θέσης είναι

Α. το εύρος. **Β.** το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
Γ. η διάμεσος. **Δ.** η διακύμανση. **Ε.** η τυπική απόκλιση.

16. * Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με
Α. 2 τυπικές αποκλίσεις. **Β.** 3 τυπικές αποκλίσεις.
Γ. 4 τυπικές αποκλίσεις. **Δ.** 5 τυπικές αποκλίσεις.
Ε. 6 τυπικές αποκλίσεις.

17. * Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
Α. $(\bar{x}+s, \bar{x}+2s)$. **Β.** $(\bar{x}-s, \bar{x}+2s)$. **Γ.** $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$.
Δ. $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$. **Ε.** $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$.

18. * Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
Α. $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$. **Β.** $(\bar{x}-2s, \bar{x}+s)$. **Γ.** $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$.
Δ. $(\bar{x}-s, \bar{x}+3s)$. **Ε.** $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$.

19. * Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 25 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 20 και 30 είναι περίπου
Α. 34%. **Β.** 65%.**Γ.** 68% . **Δ.** 95%. **Ε.** 99,7%.

20. * Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 14 και 26 είναι περίπου
Α. 34%. **Β.** 47,5%. **Γ.** 68% . **Δ.** 95%. **Ε.** 99,7%.

21. * Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 30 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 30 και 33 είναι περίπου

Α. 34%. **Β.** 47,5%. **Γ.** 68%. **Δ.** 95%. **Ε.** 99,7%.

22. * Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικούς δίσκους για τη λειτουργία μιας μηχανής. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς τη διάμετρό τους είναι κανονική με μέση τιμή (διάμετρο) 32 cm και τυπική απόκλιση 0,2 cm.

i) Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο η διάμετρός του είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ

Α. 33,5 cm και 35,2 cm. **Β.** 31,4 cm και 32,6 cm.
Γ. 29,2 cm και 31,4 cm. **Δ.** 32,6 cm και 35,5 cm.
Ε. 20,7 cm και 22,3 cm.

ii) Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη, πρέπει να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη, όταν η διάμετρός του είναι

Α. 31,5 cm. **Β.** 31,7 cm. **Γ.** 31,2 cm.
Δ. 31,9 cm. **Ε.** 32,5 cm.

23. * Σε ένα δείγμα μεγέθους ν, αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες αντίστοιχα $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ και αν f_i είναι οι σχετικές συχνότητες, ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω σχέσεις **δεν** ορίζει τη μέση τιμή $\overline{x}$ του δείγματος

Α. $\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$. **Β.** $\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i$.

Γ. $\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$. **Δ.** οι σχέσεις Α και Γ.

24. * Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = 15 + 2x$, με $0 \leq x \leq 11$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για x = 25 είναι

Α. 15. **Β.** 25. **Γ.** 65. **Δ.** 11.
Ε. δεν μπορούμε να ξέρουμε.

25. * Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται από το λόγο

Α. $\frac{s^2}{\overline{x}}$ 100%. **Β.** $\frac{s}{\overline{x}}$ 100%. **Γ.** $\frac{\overline{x}}{s}$ 100%.

Δ. $\frac{\overline{x}}{s^2}$ 100%. **Ε.** $\frac{\overline{x}^2}{s}$ 100%.

26. * Στις περιπτώσεις που δίνεται έμφαση (διαφορετική βαρύτητα) στις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων σαν μέτρο θέσης χρησιμοποιούμε

Α. τη διάμεσο. **Β.** τον αριθμητικό μέσο.

Γ. τον σταθμικό μέσο. **Δ.** τα εκατοστημόρια.

Ε. την επικρατούσα τιμή.

27. * Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά

Α. μία μονάδα. **Β.** δύο μονάδες. **Γ.** τρεις μονάδες.

Δ. $\hat{\alpha}$ μονάδες. **Ε.** $\hat{\beta}$ μονάδες.

28. * Στην ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, αν $\hat{\beta} > 0$ και το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά

Α. μία μονάδα. **Β.** δύο μονάδες. **Γ.** τρεις μονάδες.

Δ. $\hat{\alpha}$ μονάδες. **Ε.** $\hat{\beta}$ μονάδες.

29. * Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = -15 + 2{,}25x$, με $0 \leq x \leq 15$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για x = 10 είναι

Α. 2,25. **Β.** - 15. **Γ.** 7,5.

Δ. 10. **Ε.** δεν μπορούμε να ξέρουμε.

30. * Αν r = - 1 είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X, Y, τότε

Α. οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

Β. οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

31. * Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X, Y και - 1 < r < 0, τότε

Α. οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

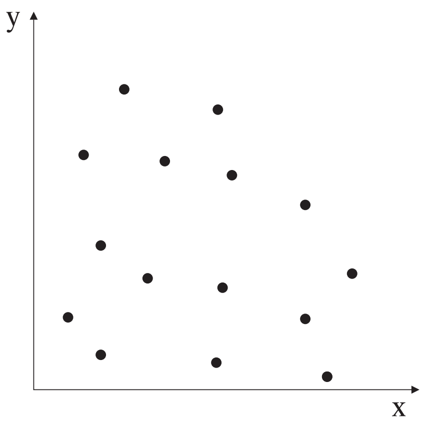
Β. οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

32. * Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών X και Y. Στην περίπτωση αυτή



Α. οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

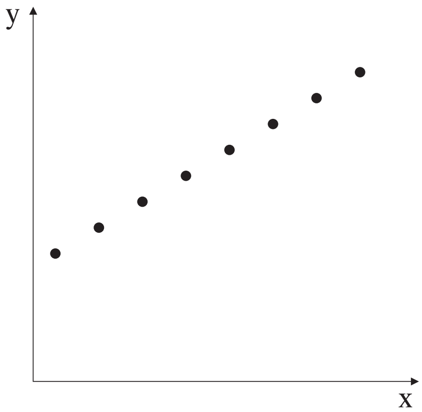
Β. οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

33. * Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών Χ και Υ. Στην περίπτωση αυτή



Α. οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

Β. οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

34. * Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ τότε ισχύει πάντοτε

Α. $-1 < r \leq +1$. **Β.** $-1 \leq r \leq +1$. **Γ.** $-1 \leq r < 1$.

Δ. $-2 \leq r < -1$. **Ε.** $1 \leq r \leq 2$.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Αντιστοιχίστε καθένα μέτρο της στήλης Α με το σύμβολό του στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Μέτρο	***Σύμβολο***
Α. εύρος **Β.** ενδοτεταρτημοριακό εύρος **Γ.** διακύμανση **Δ.** τυπική απόκλιση **Ε.** συντελεστής μεταβολής	**1.** s^2 **2.** Q **3.** R **4.** s **5.** f **6.** CV **7.** $\overline{x}$

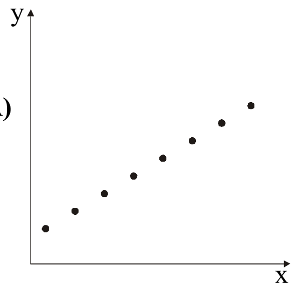
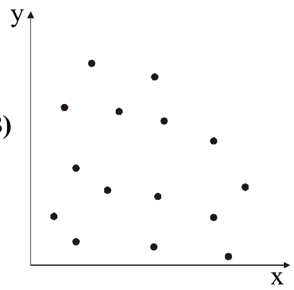
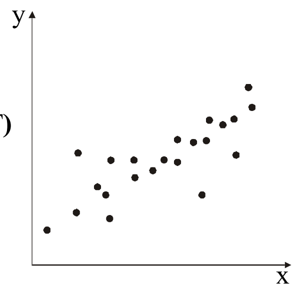
2. * Αντιστοιχίστε κάθε ποσοστό των παρατηρήσεων μιας κανονικής ή περίπου κανονικής καμπύλης της στήλης Α με το διάστημά του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Ποσοστό	***Διάστημα***
	1. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
Α. 68%	**2.** $(2\bar{x} - s, 2\bar{x} + s)$
Β. 95%	**3.** $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
Γ. 99,7%	**4.** $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
	5. $(3\bar{x} - s, 3\bar{x} + s)$

3. * Αντιστοιχίστε κάθε μέτρο που βρίσκεται στη στήλη Α με την αντίστοιχη παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Μέτρο	***Παράσταση***
	1. $Q_3 - Q_1$
Α. μέση τιμή ($\bar{x}$)	**2.** $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$
Β. ενδοτεταρτημοριακό εύρος (Q)	**3.** $\frac{1}{\nu}\sum(t_i - \bar{x})^2$
Γ. διακύμανση (s^2)	**4.** $\sqrt{s^2}$
Δ. τυπική απόκλιση (s)	**5.** $\frac{s}{\bar{x}}100\%$
Ε. συντελεστής μεταβολής (CV)	**6.** $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

4. * Αντιστοιχίστε κάθε διάγραμμα διασποράς της στήλης Α με το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών X, Y	***Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r***
(Α)  **(Β)**  **(Γ)** 	**1.** $r \approx 0$ **2.** $r \approx -0{,}2$ **3.** $r \approx +0{,}8$ **4.** $r = +1$ **5.** $r \approx -0{,}8$ **6.** $r \approx +0{,}2$

5. * Αντιστοιχίστε κάθε συντελεστή γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ της στήλης Α με τη γραμμική συσχέτιση των μεταβλητών Χ, Υ της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r	***Γραμμική συσχέτιση των Χ, Υ***
Α. $r = 0$	**1.** οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες
Β. $r = +1$	**2.** οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες
Γ. $0 < r < +1$	**3.** έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση
	4. οι Χ, Υ είναι γραμμικά ασυσχέτιστες

Ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. * Ένα σύνολο στο οποίο εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά του λέγεται ………………………

2. * Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται ………………………

3. * Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται ……………

4. * Διακρίνουμε τις μεταβλητές σε:
α).., των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί και
β) ...., των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται σε:
i) ...., που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές και
ii) ...., που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών.

5. * Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων ονομάζεται ………………………

6. * Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της ……………………… που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

7. * Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών ………………………………, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων.

8. * Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \leq \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η ………………………, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων.

9. * Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται ……………………… ή απλά …………………… .

10. * Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την ……………………… και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την …………………… .

11. * Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες ……………………… ……………………… και οι …………………… ……………………… ……………………… οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

12. * Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η ……………………… της τιμής x_i.

13. * Το ……………………… χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή χρησιμοποιείται το διάγραμμα…………………… .

14. * Το ……………………… διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

15. * Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ……………………… . Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το ....
....

16. * Να συμπληρωθεί ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α΄ Λυκείου:

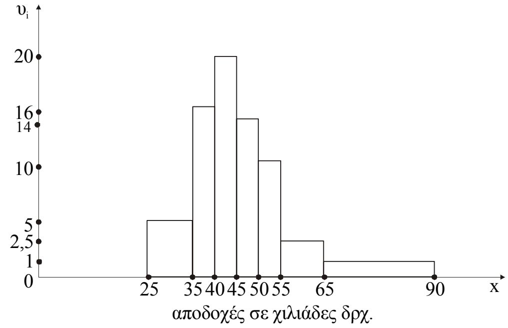
Μαθήματα x_i	ν_i	f_i %
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

17. * Μερικά από τα αποτελέσματα των εκλογών σ' ένα εκλογικό τμήμα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κόμματα	**Συχνότητα ν_i (ψήφοι)**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
Α	3.000	
Β		50
Γ		
Δ	2.010	10
		100

Πόσους ψήφους πήρε καθένα από τα κόμματα Α, Β, Γ και Δ;

18. * Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ιστόγραμμα των εβδομαδιαίων αποδοχών ενός δείγματος από τους υπαλλήλους ενός οργανισμού. Να συμπληρώσετε τον αντίστοιχο πίνακα:



α) Συχνοτήτων ν_i. β) Σχετικών συχνοτήτων f_i%.

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	ν_i	f_i %
[25, 35)		
[35, 40)		
[40, 45)		
[45, 50)		
[50, 55)		
[55, 65)		
[65, 90)		
	400	

19. * Τα ……………………… μας δίνουν τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα ……………………… ή ……………………… μας δείχνουν πόσο οι παρατηρήσεις εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους.

20. * Ειδική περίπτωση εκατοστημορίων είναι τα P_{25}, P_{50}, P_{75} τα οποία καλούνται ……………………… και συμβολίζονται με ……………………, αντίστοιχα.

21. * Τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα Οx είναι:

α) ……………………… β) ………………………

γ) ……………………… δ) ………………………

ε) ………………………

22. * Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας είναι:

α) ……………………… β) ………………………

γ) ……………………… δ) ………………………

23. * Το μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο ……………………………… .

24. * Σε μια έρευνα μεταξύ 500 ανέργων για το χρόνο σε μήνες που είναι άνεργοι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος ανεργίας	$\boldsymbol{\nu_i}$	$\boldsymbol{f_i}$ **%**	$\boldsymbol{F_i}$ **%**
[0, 3)		19	
[3, 6)		38,6	
[6, 12)		24,4	
[12, 24)		13,6	
[24, 36)		4,4	
		100	

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να εκτιμήσετε τη διάμεσο από το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και τα Q_1, Q_3.

25. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\,\%$	$F_i\,\%$
1	8	0,4				
2			10			
3	5	0,25	15			
4						0,9
5					10	
Σύνολο						

26. * Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται με την ονομασία ……………………… .

27. * Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση, κατά την οποία υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή …………………… και η εξαρτημένη μεταβλητή …………………, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση του Χ.

28. * Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το "τι συμβαίνει με το βάρος (Υ) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (Χ)" τότε ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του ……………………… .

29. * Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β μιας ευθείας άρα και για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας γραμμής σ' ένα διάγραμμα διασποράς, που προσαρμόζεται στα δεδομένα, είναι η ……………………… .

30. * Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ καλείται ……………………… ή ………………… της Υ πάνω στη Χ.

31. * Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης είναι ο λεγόμενος ……………………… .

32. * Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι ……………………… των χρησιμοποιούμενων μονάδων μέτρησης των μεταβλητών Χ και Υ.

33. * Έστω r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ και Υ. Αν

i) $0 < r < +1$, τότε οι Χ, Υ είναι ………………… .

ii) $-1 < r < 0$, τότε οι Χ, Υ είναι ………………… .

iii) $r = +1$, τότε έχουμε ………………… και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση ………………… .

iv) $r = -1$, τότε έχουμε ………………… και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση ………………… .

v) $r = 0$, τότε ……………… και οι μεταβλητές Χ, Υ είναι ……………… .

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Έγινε μια δειγματοληπτική έρευνα για το βάρος των εμπορευμάτων μιας αποθήκης λαχανικών. Βρήκαμε ότι τα βάρη 10 κιβωτίων είναι σε κιλά 17, 12, 12, 15, 18, 22, 24, 25, 19, 20. Να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός.

β) Ποιες είναι οι μονάδες.

γ) Ποιο είναι το δείγμα.

δ) Ποια είναι η μεταβλητή και ποιες οι τιμές της.

2. ** Σ’ ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στη Στατιστική στο τέλος του β΄ τριμήνου. Πήραμε τις επόμενες βαθμολογίες 15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17. Να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός.

β) Ποια είναι τα άτομα.

γ) Ποια είναι η μεταβλητή.

δ) Το είδος της μεταβλητής είναι i) ποιοτική ή ποσοτική,
ii) συνεχής ή διακριτή.

ε) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις.

3. ** Σε μια δειγματοληπτική έρευνα του βάρους των μαθητών της τρίτης τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου 15 μαθητές είχαν τα επόμενα βάρη σε κιλά: 23, 25, 25, 26, 27, 30, 28, 28, 29, 24, 26, 26, 23, 27, 30. Να βρείτε:

α) Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής Χ (όπου Χ είναι το βάρος των μαθητών).

β) Τη συχνότητα των τιμών της μεταβλητής Χ.

4. ** Μελετάμε τους μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου ως προς το βαθμό απολυτηρίου τους, τη διαγωγή τους, τον αριθμό απουσιών, την κατεύθυνση που παρακολουθούν, το βάρος τους. Να βρείτε:

α) Ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι i) ποιοτικές, ii) ποσοτικές.

β) Από τις ποσοτικές μεταβλητές, ποιες είναι i) διακριτές, ii) συνεχείς.

5. ** Οι παρακάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

Να κατασκευάσετε πίνακα:

α) Συχνοτήτων.

β) Αθροιστικών συχνοτήτων.

6. ** Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε βαθμούς Κελσίου):

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν: i) Μικρότερη από 23° C;
ii) Μεγαλύτερη από 24° C;
iii) Τουλάχιστον 24° C;

7. ** Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι:

31	27	28	30	29	31	31	27
29	29	28	28	30	29	27	29

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Σχετικών συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Να κάνετε το διάγραμμα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να κάνετε το πολύγωνο των συχνοτήτων.

8. ** Οι αποστάσεις (σε km) των 26 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι:

5	10	8	8	13	10	4	2	0	16	5	15	9
6	4	7	5	4	6	7	7	5	8	10	3	9

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.

β) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km;

9. ** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή (%) του πληθυσμού της Ελλάδας κατά τις απογραφές των ετών 1951, 1961, 1971. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Έτος απογραφής	**Αστικός πληθυσμός %**	**Ημιαστικός πληθυσμός %**	**Αγροτικός πληθυσμός %**
1951	37,7	14,8	47,5
1961	43,3	12,9	43,8
1971	53,2	11,6	35,2

10. ** Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας αξίας 97.000.000.000 δρχ. κατά το έτος 1980 ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς "θαλασσίως" είναι 180°. Το 13,917% της αξίας των εξαγωγών έγινε "σιδηροδρομικώς". Οι μεταφορές που έγιναν "οδικώς" ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν "αεροπορικώς". Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

11. ** α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Ήπειρος	**Έκταση**	**f_i %**
Αμερική	20,8	
Ασία	44	
Αφρική	30,5	
Ευρώπη	10,5	
Ωκεανία	9	
	114,8	

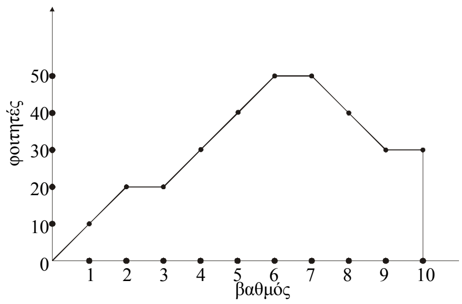
β) Να σχεδιάσετε το κυκλικό διάγραμμα.

12. ** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις εξαγωγές της χώρας μας κατά το 1977, ανάλογα με το μέσο μεταφοράς.

Μέσο μεταφοράς	***Θαλασσίως***	***Σιδηροδρομικώς***	***Οδικώς***	***Αεροπορικώς***
Αξία σε εκατ. δρχ.	51.000	11.000	33.000	7.000

Να κάνετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

13. ** Το διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζει τους βαθμούς των φοιτητών μιας σχολής στο μάθημα της Στατιστικής. Να κατασκευάσετε πίνακα:



α) Συχνοτήτων που αντιστοιχούν στο πολύγωνο αυτό.

β) Σχετικών συχνοτήτων για το ίδιο πολύγωνο.

14. ** Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων που δίνει την κατανομή συχνοτήτων 50 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν

α) τουλάχιστον 1 παιδί, β) πάνω από 3 παιδιά,
γ) από 3 έως και 5 παιδιά, δ) το πολύ 6 παιδιά,
ε) ακριβώς 6 παιδιά.

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός οικογενειών (v_i)**
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3
	50

15. ** Το βάρος ενός ζώου κατά τους πρώτους 10 μήνες της ζωής του φαίνεται στον πίνακα:

Μήνες	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Βάρος σε κιλά	2	3	4,5	5,3	6	7	9	10,5	13	15	19

Να γράψετε το χρονόγραμμα της εξέλιξης του βάρους του.

16. ** Στα διόδια Σχηματαρίου η τροχαία σημείωνε στο χρονικό διάστημα μιας ώρας το συνολικό αριθμό αυτοκινήτων που είχαν περάσει. Έτσι, από το μεσημέρι ως τις 8 μ.μ., προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος (ώρες)	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00
Συν. αριθμ. αυτοκ.	400	200	300	350	350	400	600	900

Να γράψετε το αντίστοιχο χρονόγραμμα.

17. ** Εξετάστηκε ένα δείγμα 400 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός (ν_i) οικογενειών**	f_i	f_i %	$\nu_i x_i$	N_i
0	135				
1	220				
2	8				
3	15				
4	12				
5	10				
	400				

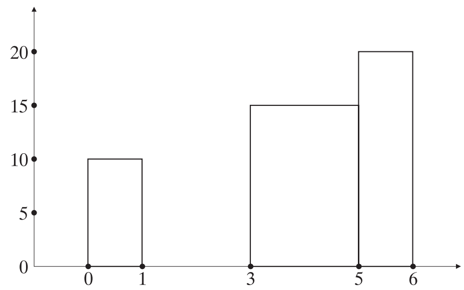
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων.

γ) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διάμεσο της κατανομής.

18. ** Στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [1, 3). Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.



19. ** Οι παρακάτω αριθμοί δίνουν (σε cm) τα αναστήματα ενός δείγματος 41 μαθητών ενός σχολείου.

159	168	162	183	180	179	153	168	170	170	
172	175	175	181	165	166	171	185	169	180	
180	182	160	157	175	167	162	174	174	187	
192	166	172	167	187	177	178	174	171	177	172

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

β) Να ομαδοποιήσετε τα αναστήματα σε κλάσεις πλάτους 5 cm και να προσδιορίσετε γραφικά τη διάμεσο από το διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

20. ** Οι υπάλληλοι μιας εταιρείας έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

28	36	22	41	27	50	32	29	42	29
25	38	36	45	27	29	32	39	47	33
53	33	31	40	20	34	37	29	33	27
39	37	44	26	43	26	36	34	49	36
26	31	28	59	30	28	30	34	28	24

α) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες αυτές σε 8 κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι είναι: i) Μεγαλύτεροι των 44 χρόνων.

ii) Μικρότεροι των 35 χρόνων.

γ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων των ηλικιών.

21. ** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής 400 οθονών τηλεόρασης από την παραγωγή ενός εργοστασίου.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας	ν_i	f_i %	N_i	F_i %
[400, 500)	15			
[500, 600)	45			
[600, 700)	60			
[700, 800)	75			
[800, 900)	70			
[900, 1000)	60			
[1000, 1100)	50			
[1100, 1200)	25			
	400			

β) Να κατασκευάσετε: i) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

ii) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

iii) Το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

22. ** Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι:

31, 27, 28, 30, 29, 31, 21, 27, 29, 29, 28, 28, 30, 29, 27, 29.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής “αριθμός μαθητών ανά τμήμα”.

23. ** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής του παρακάτω πίνακα:

Ηλικία σε χρόνια	ν_i
[0, 4)	3
[4, 8)	5
[8, 12)	6
[12, 16)	6
[16, 20)	2
	22

24. ** Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 3, 4, 5, 6, 11. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν γνωρίζουμε ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

25. ** Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης (μπάσκετ μπωλ) είναι (σε cm): 172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195.

α) Να βρείτε: i) Το μέσο ύψος των αθλητών.
ii) Τη διάμεσο των υψών.
iii) Το εύρος (R) των υψών.

β) Επίσης, σε καθεμιά από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις, να βρείτε:
i) Το μέσο ύψος των αθλητών.
ii) Τη διάμεσο των υψών.
iii) Το εύρος (R) των υψών.

Περίπτωση 1: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 172 cm.
Περίπτωση 2: Έρχεται ακόμα ένας αθλητής με ύψος 197 cm.
Περίπτωση 3: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 195 cm και έρχεται ένας αθλητής με ύψος 198 cm.

26. ** Η βαθμολογία ενός μαθητή στα τέσσερα τεστ ενός μαθήματος ήταν (σε εκατονταβάθμια κλίμακα): 38, 67, 43, 72. Η βαρύτητα σε καθένα ήταν αντίστοιχα 1, 2, 2 και 3. Να βρείτε τη μέση επίδοση του μαθητή στα τεστ.

27. ** Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	**Συχνότητα**
[60, 80)	5
[80, 100)	20
[100, 120)	26
[120, 140)	30
[140, 160)	15
[160, 180)	4
	100

α) Να κατασκευάσετε: i) Το ιστόγραμμα.

ii) Το πολύγωνο των συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

28. ** Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι:
13, 9, 6, 10, 15, 12, 11, 0, 20, 14. Να υπολογίσετε:

α) Τη μέση τιμή.
β) Τη διακύμανση.

γ) Την τυπική απόκλιση.
δ) Τη διάμεσο.

ε) Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

στ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών.

ζ) Το εύρος (R).

η) Το συντελεστή μεταβολής (CV).

29. ** Δίνεται ο πίνακας:

Κλάσεις	**Κέντρο κλάσης (x_i)**	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
[4, 6)		7				
[6, 8)		13				
[8, 10)		17				
[10, 12)		18				
[12, 14)		29				
[14, 16)		11				
[16, 18)		5				
	ΣΥΝΟΛΑ	100				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διακύμανση.

iii) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv) Το συντελεστή μεταβολής.

γ) Να κάνετε το ιστόγραμμα.

δ) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

30. ** Οι μηνιαίες αποδοχές ενός δείγματος 70 υπαλλήλων ενός οργανισμού δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	**Κεντρικές τιμές x_i**	ν_i	x_i^2	$x_i \nu_i$	$x_i^2 \nu_i$
[30, 35)		8			
[35, 40)		10			
[40, 45)		16			
[45, 50)		15			
[50, 55)		10			
[55, 60)		8			
[60, 65)		3			
ΣΥΝΟΛΑ		70			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διακύμανση.

iii) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv) Το συντελεστή μεταβολής.

31. ** Η αντοχή 100 ηλεκτρικών συσκευών δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

Χρόνος αντοχής σε ώρες	**Αριθμός συσκευών**	**f_i%**	**F_i%**
[1000, 1200)	8		
[1200, 1400)	16		
[1400, 1600)	28		
[1600, 1800)	32		
[1800, 2000)	12		
[2000, 2200)	4		
[2200, 2400)	0		
ΣΥΝΟΛΑ	100		

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) i) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

ii) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

γ) i) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

ii) Να βρείτε τη διάμεσο.

iii) Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

δ) Πόσες συσκευές έχουν διάρκεια αντοχής μικρότερη από τη μέγιστη συχνότητα;

32. ** α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στον οποίο παρουσιάζονται οι απουσίες 75 μαθητών μιας τάξης ενός Λυκείου, αν γνωρίζουμε ότι ο μέσος όρος των απουσιών είναι 12.

Απουσίες x_i	**Μαθητές** ν_i
10	x
20	y
30	5
	75

β) Να υπολογίσετε: i) Τη διακύμανση s^2.

ii) Το συντελεστή μεταβλητότητας ($CV = \frac{s}{\bar{x}}$).

33. ** Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές της X και $\bar{x}$ η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = \bar{x}$.

34. ** Αν είναι $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 10)$ β) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)^2$

35. ** Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σ' ένα διαγώνισμα. Έστω $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

α) Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η νέα τυπική απόκλιση όταν η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξηθεί κατά: i) 2 μονάδες

ii) C μονάδες;

β) Τι συμπεραίνετε από τα παραπάνω για τη μέση τιμή και τη διακύμανση;

36. ** Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν είναι $\overline{x}$. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων:

α) $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \ldots, t_\nu + \lambda$

β) $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \ldots, t_\nu - \lambda$

γ) $\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_\nu$

δ) $\frac{t_1}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}, \ldots, \frac{t_\nu}{\lambda}$ για $\lambda \neq 0$

ε) $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \ldots, \lambda t_\nu + \kappa$

37. ** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί 10 μαθητών σε δύο εξετάσεις ενός μαθήματος.

Πρώτη εξέταση (x)	**Δεύτερη εξέταση (y)**
6	8
5	7
8	7
8	10
7	5
6	8
10	10
4	6
9	8
7	6

α) Παραστήστε τα σημεία σ' ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

β) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x.

γ) Παραστήστε γραφικά την ευθεία αυτή.

38. ** α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x	**y**	$\mathbf{x^2}$	**xy**	$\mathbf{y^2}$
1	1			
3	2			
4	4			
6	4			
8	5			
9	7			
11	8			
14	9			
Σx =	Σy =	Σx^2 =	Σxy =	Σy^2 =

β) Προσαρμόστε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα παίρνοντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

γ) Σχεδιάστε την ευθεία.

δ) Εκτιμήστε την τιμή του y όταν x = 12.

39. ** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τελικοί βαθμοί (σε εκατονταβάθμια κλίμακα) στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία 10 μαθητών που διαλέχθηκαν τυχαία από μια μεγάλη ομάδα μαθητών ενός Λυκείου.

Άλγεβρα (x)	**Γεωμετρία (y)**
75	82
80	78
93	86
65	72
87	91
71	80
98	95
68	72
84	89
77	74

α) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x και σχεδιάστε την.

β) Ένας μαθητής πήρε 72 μονάδες στην Άλγεβρα. Τι βαθμό αναμένεται να έχει στη Γεωμετρία;

40. ** Για οκτώ ζεύγη παρατηρήσεων (x, y) έχουμε $\Sigma x = 56$, $\Sigma y = 40$, $\Sigma xy = 364$, $\Sigma x^2 = 524$, $\Sigma y^2 = 256$.

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

41. ** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι μέσες τιμές χρεογράφων και ομολογιών στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης για τα έτη 1950-1959 (σε δολάρια).

Έτος	**1950**	**1951**	**1952**	**1953**	**1954**	**1955**	**1956**	**1957**	**1958**	**1959**
Μέση τιμή των χρεογράφων	35	39	41	43	40	53	50	49	40	50
Μέση τιμή των ομολογιών	102	100	97	97	98	100	97	91	94	94

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

γ) Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας.

Σημείωση: Το έτος χρησιμεύει μόνο για να καθοριστεί η αντιστοιχία μεταξύ των x και y.

42. ** α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών x και y του παρακάτω πίνακα:

x	2	4	5	6	8	11
y	18	12	10	8	7	5

β) Πολλαπλασιάστε κάθε x επί 2 και προσθέστε 6. Πολλαπλασιάστε κάθε y επί 3 και αφαιρέστε 15. Υπολογίστε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των νέων τιμών.

43. ** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

Ηλικία (x) σε έτη	56	42	72	36	63	47	55	49	38	60
Πίεση αίματος (y)*	17	12	14	10	13	09	11	08	11	15

**** σε ακέραια προσέγγιση cm Hg***

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των x και y.

β) Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της y ως προς x.

γ) Εκτιμήστε την πίεση μιας γυναίκας ηλικίας 45 ετών.

44. ** α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
	1	2,5					
	1	4,0					
	2	-					
	3	4,5					
	-	4,0					
	4	3,5					
	7	6,5	4	2,5			
Σύνολα							

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

45. ** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί 10 φοιτητών σε δύο εξετάσεις ενός μαθήματος.

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	x^2	**xy**	y^2
6	8			
5	7			
8	7			
8	10			
7	5			
6	8			
10	10			
4	6			
9	8			
7	6			
Σx = ……	Σy = ……	Σx^2 = ……	Σxy = ……	Σy^2 = ……

α) Να συμπληρώστε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

Η παρακάτω ερώτηση είναι ανοικτό πρόβλημα και συνίσταται μόνο για ομαδική εργασία.

- Υπάρχει γραμμική συσχέτιση των ωρών που ένας μαθητής βλέπει τηλεόραση και της επίδοσής του στα Νέα Ελληνικά;

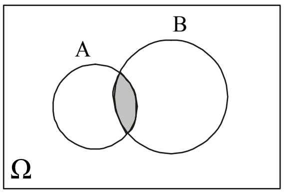
3ο Κεφάλαιο	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

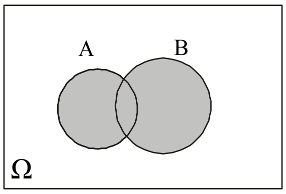
1. * Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε $P(\Omega) = 1$.	**Σ**	**Λ**
2. * Αν Α είναι ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης τότε, $0 \le P(A) \le 1$.	**Σ**	**Λ**
3. * Για το αδύνατο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ισχύει $P(\varnothing) = 0$.	**Σ**	**Λ**
4. * Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.	**Σ**	**Λ**
5. * Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου του πειράματος.	**Σ**	**Λ**
6. * Ένα αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγεται απλό ενδεχόμενο ή γεγονός.	**Σ**	**Λ**
7. * Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι βέβαιο ενδεχόμενο.	**Σ**	**Λ**
8. * Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε ονομάζουμε ενδεχόμενο του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω.	**Σ**	**Λ**
9. * Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι και αυτός ένα ενδεχόμενο.	**Σ**	**Λ**
10. * Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης είναι στοιχεία του δειγματικού του χώρου.	**Σ**	**Λ**
11. * Με $N(A)$ συμβολίζουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός ενδεχομένου Α.	**Σ**	**Λ**
12. * Το συμπλήρωμα Α΄ οποιουδήποτε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του		

πειράματος. Σ Λ

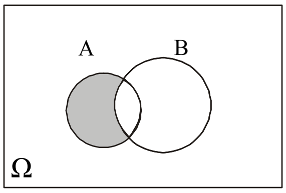
13. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Α ∪ Β. Σ Λ



14. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Α ∪ Β. Σ Λ



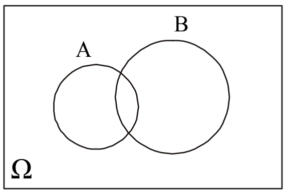
15. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Β - Α . Σ Λ



16. * Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω, τότε ισχύει η ισότητα Α - Β = Α ∩ Β΄. Σ Λ

17. * Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω τότε ισχύει η ισότητα Β ∪Α = (Β-Α) ∪ (Α-Β). Σ Λ

18. * Στο διπλανό σχήμα τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Σ Λ



19. * Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα όταν Α ∩ Β = Α. Σ Λ

20. * Τα ενδεχόμενα Α = {1, 4, 7}, Β = {4, 7, 11} είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

21. * Αν το ενδεχόμενο Β = {2, 4, 6}, τότε Ν (Β) = 3. Σ Λ

22. * Αν Α είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε μια ντάμα από μια τράπουλα, τότε Ν (Α) = 2. **Σ** **Λ**

23. * Οι εκφράσεις: **«πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α ή το Β»** και **«πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β»** είναι ισοδύναμες. **Σ** **Λ**

24. * Το κενό σύνολο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης. **Σ** **Λ**

25. * Το κενό σύνολο είναι βέβαιο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης. **Σ** **Λ**

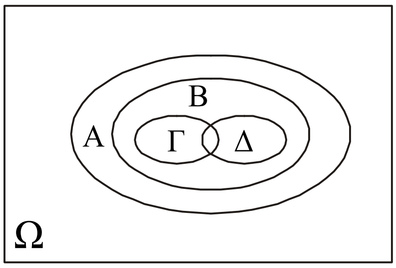
26. * Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν τουλάχιστον δύο αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγονται σύνθετα. **Σ** **Λ**

27. * Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν ένα μόνο αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγονται απλά ενδεχόμενα. **Σ** **Λ**

28. * Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $f_A = \frac{κ}{ν}$ λέγεται σχετική συχνότητα.του ενδεχομένου. **Σ** **Λ**

29. * Για τη σχετική συχνότητα f_A ενός ενδεχομένου Α ισχύει $f_A > 1$. **Σ** **Λ**

30. * Οι σχέσεις από (i) μέχρι (xv) αναφέρονται στο διπλανό διάγραμμα του Venn. Βάλτε σε κύκλο το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν η σχέση είναι σωστή ή λάθος.



i)	$A \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
ii)	$B \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
iii)	$\Gamma \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
iv)	$\Delta \subseteq \Gamma$	**Σ**	**Λ**
v)	$\Gamma \cup \Delta \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
vi)	$\Gamma \cup \Delta \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
vii)	$\Gamma \cap \Delta \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
viii)	$B \cup \Gamma = B$	**Σ**	**Λ**
ix)	$B \cup \Gamma \cup \Delta = A$	**Σ**	**Λ**
x)	$A \cup B = B$	**Σ**	**Λ**
xi)	$A \cap B = B$	**Σ**	**Λ**
xii)	$(\Gamma \cap \Delta) \cup A = A$	**Σ**	**Λ**
xiii)	$(\Gamma \cap \Delta) \cap A = B$	**Σ**	**Λ**
xiv)	$B \cap \Delta = \Delta$	**Σ**	**Λ**
xv)	$(\Gamma \cap B) \cap A = \Gamma$	**Σ**	**Λ**

31. * Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και δειγματικό χώρο Ω η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι ο αριθμός $P\,(A) = \dfrac{N\,(A)}{N\,(\Omega)}$. **Σ** **Λ**

32. * Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ στοιχείων ενός συνόλου Α δίνεται από τον τύπο:

$\Delta^{\nu}_{\kappa} = \nu\,(\nu - 1)\,(\nu - 2)\,\ldots\,(\nu - \kappa + 1)$. **Σ** **Λ**

33. * Δύο διατάξεις των ν ανά κ στοιχείων ενός συνόλου Α είναι ίσες αν διαφέρουν μόνο ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία τους. **Σ** **Λ**

34. * Μια διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά ν λέγεται μετάθεση. **Σ** **Λ**

35. * Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων ενός συνόλου Α συμβολίζεται με $Μ_ν$ και δίνεται από τον τύπο:
$Μ_ν = ν\,(ν - 1)\,(ν - 2) \ldots 3.2.1.$ **Σ** **Λ**

36. * Το πλήθος $Μ_ν$ των μεταθέξεων ν στοιχείων ενός συνόλου Α είναι ίσο με ν!. **Σ** **Λ**

37. * Στον τύπο $Δ^{ν}_{κ} = \dfrac{ν!}{(ν - κ)!}$ το κ είναι πάντα διάφορο του ν. **Σ** **Λ**

38. * Για το σύμβολο ν! ισχύουν οι ισότητες:
$ν! = (ν - 1)!\,ν = (ν - 2)!\,(ν - 1)\,ν = (ν - 3)!\,(ν - 2)\,(ν - 1)\,ν.$ **Σ** **Λ**

39. * Για το σύμβολο (ν + κ)! , ($κ \in N^*$) ισχύει η ισότητα:
$(ν + κ)! = ν!\,(ν + 1)\,(ν + 2) \ldots (ν + κ).$ **Σ** **Λ**

40. * Δύο μεταθέσεις είναι διαφορετικές όταν διαφέρουν ως προς τη θέση ενός τουλάχιστον στοιχείου τους. **Σ** **Λ**

41. * Το 0! δεν ορίζεται. **Σ** **Λ**

42. * Δύο διατάξεις οι οποίες αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία αλλά διαφέρουν ως προς τη σειρά που αυτά είναι τοποθετημένα είναι διαφορετικές. **Σ** **Λ**

43. * Το 1! είναι ίσο με 1. **Σ** **Λ**

44. * Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία. **Σ** **Λ**

45. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι ίσοι αν αποτελούνται από διαφορετικά στοιχεία. **Σ** **Λ**

46. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι ίσοι αν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία. **Σ** **Λ**

47. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο. **Σ** **Λ**

48. * Σε ένα συνδυασμό ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ ισχύει ο περιορισμός $\nu \leq \kappa$. **Σ** **Λ**

49. * Ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων είναι: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)$ **Σ** **Λ**

50. * Ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι εκείνα για τα οποία η πραγματοποίηση ή μη του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης ή μη του άλλου. **Σ** **Λ**

51. * Δυο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται αμοιβαίως αποκλειόμενα. **Σ** **Λ**

52. * Δυο συμβιβαστά ενδεχόμενα είναι πάντα εξαρτημένα. **Σ** **Λ**

53. * Δυο ενδεχόμενα Α, Β (με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$) για τα οποία ισχύει $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$ λέγονται ανεξάρτητα. **Σ** **Λ**

54. * Δυο ενδεχόμενα Α, Β για τα οποία ισχύει $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ λέγονται εξαρτημένα. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Ρίχνουμε μια φορά έναν κύβο ο οποίος έχει καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 γραμμένους αντίστοιχα ανά δύο έδρες του και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι

Α. $\Omega = \{3\}$. **Β.** $\Omega = \{1, 2, 3\}$. **Γ.** $\Omega = \{1{,}1, 2{,}2, 3{,}3\}$.

Δ. $\Omega = \{1{,}1, 1{,}2, 1{,}3, 2{,}1, 2{,}2, 2{,}3, 3{,}3\}$. **Ε.** $\{1{,}2, 2{,}1, 1{,}3, 3{,}1\}$.

2. * Ρίχνουμε ένα νόμισμα δυο φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι

Α. Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. **Β.** Ω = {ΚΓ, ΓΚ}.

Γ. Ω = {ΓΚ, ΚΓ}. **Δ.** Ω = {ΚΚ, ΓΓ}.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

3. * Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο (Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα (Σ). Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι

Α. Ω = {Κ, Σ}. **Β.** Ω = {ΚΚ, ΚΣ}.

Γ. Ω = {ΚΚ, ΣΣ}. **Δ.** Ω = {Κ, ΣΚ, ΣΣ}. **Ε.** {Κ,ΣΣ}.

4. * Έστω Α = {1, 3, 5} και Β = {2, 4, 6} δύο ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού μια φορά. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 3 τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο

Α. $A \cup B$. **Β.** A'. **Γ.** B. **Δ.** $A \cap B$. **Ε.** $B' \cap A'$.

5. * Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και α ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η φράση **«το Α πραγματοποιείται»** διατυπωμένη σε γλώσσα συνόλων είναι ισοδύναμη με την

Α. $\alpha \in A'$. **Β.** $\alpha \in A' - B$. **Γ.** $\alpha \in A' \cup B$. **Δ.** $\alpha \in A$.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

6. * Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει

Α. $P(A) + P(A') = 0$. **Β.** $P(A) + P(A') = 2$.

Γ. $P(A) + P(A') = 1$. **Δ.** $P(A) = -P(A')$.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

7. * Το ενδεχόμενο Α να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 6 κατά τη ρίψη ενός συνήθους ζαριού μια φορά είναι

Α. $A = \{1,3,5\}$. **Β.** $A = \{x: x \geq 6\}$. **Γ.** $A = \{2,4,6\}$.

Δ. $A = \{x: x > 6\}$. **Ε.** $A = \varnothing$.

8. * Αν f_A η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α τότε

Α. $1 < f_A < 2$. **Β.** $f_A > 1$. **Γ.** $f_A < 0$.

Δ. $0 \leq f_A \leq 1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

9. * Από τις παρακάτω ισότητες **σωστή** είναι η

Α. $A \cap \varnothing = A$. **Β.** $A' \cap A = \Omega$. **Γ.** $A \cap B = A \cup B$.

Δ. $\Omega' = \Omega$. **Ε.** $(A')' = A$.

10. * Αν Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό στις ρίψεις ενός αμερόληπτου ζαριού, τότε η συχνότητα εμφάνισής του αναμένεται να είναι

Α. $\frac{2}{3}$. **Β.** $\frac{1}{6}$. **Γ.** $\frac{1}{2}$. **Δ.** $\frac{1}{3}$. **Ε.** 1.

11. * Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\kappa\}$ με ισοπίθανα ενδεχόμενα. Η πιθανότητα $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$, ενός στοιχείου του Ω είναι

Α. $\frac{1}{2}$. **Β.** $\frac{1}{\kappa}$. **Γ.** κ. **Δ.** 1. **Ε.** $\frac{1}{2\kappa}$.

12. * Για την πιθανότητα P (A) κάθε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης ισχύει

Α. $1 < P(A) < 2$. **Β.** $P(A) > 1$. **Γ.** $P(A) < 0$.

Δ. $0 \leq P(A) < 1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

13. * Ο απλός προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β είναι

Α. $P(A) + P(B) = P(A \cap B)$. **Β.** $P(A) + P(B') = P(A \cup B)$.

Γ. $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. **Δ.** $P(A) - P(B) = P(A \cup B)$.

Ε. $P(A)\, P(B) = P(A \cup B)$.

14. * Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοδύναμος με την ισότητα

Α. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Β. $P(A \cup B) = P(A) - [P(B) + P(A \cap B)]$.

Γ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A' \cap B')$.

Δ. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Ε. κανένα από τα παραπάνω.

15. * Η έκφραση: **«η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β»** διατυπωμένη στη γλώσσα των συνόλων είναι ισοδύναμη με την σχέση

Α. $B \subseteq A$. **Β.** $N (A) \geq N (B)$. **Γ.** $P (A) + P (B) = 2$.

Δ. $A \cup B = \varnothing$. **Ε.** $A \cap B = A$.

16. * Αν δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ικανοποιούν την συνολοθεωρητική σχέση $A \subseteq B$, τότε

Α. $P (A) > P (B)$. **Β.** $\dfrac{P (A)}{P (B)} < 0$. **Γ.** $P (A) \leq P (B)$.

Δ. $P (A) + P (B) = - 1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

17. * Αν Α, Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με $P (A) = 0,4$ και $P (B) = 0,6$ τότε ισχύει

Α. $P (A \cap B) = 1$. **Β.** $P (A \cup B) = 1$. **Γ.** $P (A \cap B) = 0,2$.

Δ. $P (A \cup B) = 0,4$. **Ε.** $P (A \cup B) = 0,6$.

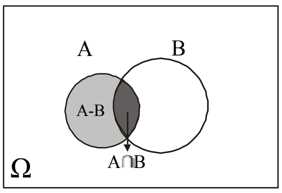
18. * Αν $A \subseteq B$ (Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω), τότε **<u>δεν</u>** ισχύει

Α. $P (A) = 0,3$ και $P (B) = 0,7$. **Β.** $P (B') + P (B) = 1$.

Γ. $P (A) = 0,6$ και $P (B) = 0,4$. **Δ.** $P (A) + P (A') = 1$.

Ε. $P (A) = 0,5$ και $P (B) = 0,5$.

19. * Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω (βλ. σχήμα) ισχύει



Α. $P (A - B) = P (A) + P (A \cup B)$.

Β. $P (A - B) = P (A) - P (A \cup B)$.

Γ. $P (A - B) = P (B) + P (A)$.

Δ. $P (A - B) = P (A) - P (B)$.

Ε. $P (A - B) + P (A \cap B)= P (A)$.

20. * Το πλήθος των μεταθέσεων M_3 ενός κόκκινου, ενός λευκού και ενός γαλάζιου τετραδίου είναι

Α. 3 (3 - 1) (3 - 2) (3 - 3). **Β.** (3 - 3) (3 - 2) (3 - 1) .

Γ. 3. **Δ.** 3!. **Ε.** 2·3!.

21. * Το πλήθος των διατάξεων 5 διαφορετικών μαθητών σε δυάδες ισούται με

Α. $\dfrac{(5-2)!}{5!}$. **Β.** $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$. **Γ.** $\dfrac{5!}{2!}$.

Δ. 2·5 = 10. **Ε.** 5^2.

22. * Το 0! ισούται με

Α. 0. **Β.** 1.

Γ. (1 - 0)! + (2- 0)!. **Δ.** (0 + 1)! +(1 - 0)!. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.

23. * Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν 3 δρομείς σε τρία σημεία αφετηρίας του στίβου είναι

Α. 9 . **Β.** 3. **Γ.** 1·2·3·2·1. **Δ.** 1·2·1. **Ε.** 1·2·3.

24. * Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ δίνεται από τον τύπο

Α. $\dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\nu\,(\nu-\kappa)!}$. **Β.** $\dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa+1)!}$.

Γ. $\dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\kappa!}{\nu\,(\nu-\kappa)!}$. **Δ.** $\dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$.

Ε. $\dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(\nu-2)\,(\nu-1)\,\nu}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$.

25. * Από τους παρακάτω συνδυασμούς των στοιχείων του Σ = {α, β, γ, δ} ανά 3 διαφορετικοί μεταξύ τους είναι οι

Α. {α, β, γ}, {α, δ, γ}. **Β.** {α, β, γ}, {β, α, γ}.

Γ. {γ, α, δ}, {δ, α, γ}. **Δ.** {α, δ, β}, {β, δ, α}.

Ε. κανένα από τους παραπάνω.

26. * Από τις παρακάτω διατάξεις των στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ανά 2 ίσες είναι

Α. (α, β), (β, α). **Β.** (α, γ), (γ, α). **Γ.** (β, γ), (γ, β).

Δ. (β, γ), (β, α). **Ε.** (β, α), (β, α).

27. * Για το 1! ισχύει

Α. δεν ορίζεται. **Β.** $1! = \frac{1}{2!}$. **Γ.** $1! = 0\cdot 1$.

Δ. $1! = 1$. **Ε.** ισχύουν άλλοτε το (Β) και άλλοτε το (Γ).

28. * Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης (P(A),P (B) > 0) τότε ισχύει

Α. $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$. **Β.** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Γ. $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$. **Δ.** $P(A|B) = \frac{P(A - B)}{P(B)}$.

Ε. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

29. * Ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων είναι ισοδύναμος με τη σχέση ($A \cap B \neq \varnothing$)

Α. $P(A \cup B) = P(A)\, P(B|A)$. **Β.** $P(A \cup B) = P(B)\, P(A|B)$.

Γ. $P(A \cap B) = P(B)\, P(B|A)$. **Δ.** $P(A \cap B) = P(A)\, P(A|B)$.

Ε. $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)}$.

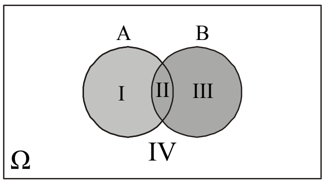
Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Στη στήλη Α του πίνακα γράφονται ισχυρισμοί για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος. Στη στήλη Β γράφονται ισοδύναμοι ισχυρισμοί διατυπωμένοι στη γλώσσα των συνόλων (w ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού). Αντιστοιχίστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) Το Α δεν πραγματοποιείται.	i) $w \in A$
2) Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται.	ii) $w \in (A \cup B')$
3) Πραγματοποιούνται συγχρόνως και το Α και το Β.	iii) $w \in (A' - A)$
4) Το Α πραγματοποιείται.	iv) $w \in (A \cap B)$
5) Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται.	v) $w \in (A \cup B)$
6) Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β.	vi) $w \in A'$
7) Το Β πραγματοποιείται	vii) $w \in (A \cup B)'$
8) Πραγματοποιείται μόνο το Α.	viii) $w \in (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
9) Πραγματοποιείται μόνο το Β.	ix) $w \in B$
	x) $w \in (A \cap B')$
	xi) $w \in (B \cap A')$
	xii) $w \in (B \cap A)'$
	xiii) $w \in (A \cap B)'$
	xiv) $w \in (A' \cup B)$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Με βάση το διπλανό σχήμα συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί (Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω).



Γραφή σε γλώσσα συνόλου	*Γραφή σε φυσική γλώσσα*	*Μέρος του σχήματος*
$A \cap B$	Α τομή Β	II
B'		
$A \cup B$		
A'		
$A - B$		
$B - A$		
$A \cap B'$		
$A' \cap B$		

Τι παρατηρείτε από τις τέσσερις τελευταίες γραμμές του πίνακα;

2. * Συμπληρώστε τον πίνακα βάζοντας στη στήλη Β τον χαρακτηρισμό Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου βάλατε Λ (λάθος) συμπληρώστε στη στήλη Γ τη σωστή σχέση διορθώντας το δεξιό μέλος της αντίστοιχης ισότητας.

Α	**Β**	**Γ**
$A \cup A = A$		
$A \cup \varnothing = A$		
$A \cap A = \varnothing$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = A$		
$A' \cap A = \Omega$		
$A' \cup A = \varnothing$		
$\Omega' = \Omega$		
$(A')' = \Omega$		
$A \cap B = B \cap A$		
$A \cap B = B \cup A$		
$\varnothing' = \Omega$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$		
$A' \cup A = \Omega$		
$A' \cap A = \varnothing$		
$(A')' = A$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$		

3. * α) Βρείτε τον αριθμό των μεταθέσεων των στοιχείων του Α = {α, β, γ}.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις μεταθέσεις αυτές.

Μεταθέσεις των α, β, γ

4. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολισμός**	**Ισότητα**
Μεταθέσεις των ν πραγμάτων.		…… = ……
	Δ_{κ}^{ν}	…… = ……
		$\ldots\ldots = \dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

5. * Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν προτάσεις που χρησιμοποιούνται στις πιθανότητες. Συμπληρώστε στη Β στήλη τις αντίστοιχες αρνήσεις των προτάσεων αυτών.

Α	**Β**
Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π (χ) αληθεύει.	
Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π(χ) αληθεύει.	
«…το πολύ ν φορές »	
«…τουλάχιστον ν φορές »	

6. * Έστω ότι έχουμε τα τρία σχήματα **Ο**, **Δ**, ☐ (κύκλος τρίγωνο τετράγωνο). Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αναγράφοντας σε κάθε στήλη όλες τις περιπτώσεις που υπάρχουν.

Α	**Β**	**Γ**
Μεταθέσεις των 3 σχημάτων	***Συνδυασμοί των 3 σχημάτων ανά 2***	***Διατάξεις των 3 σχημάτων ανά 2***

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα μετά ένα ζάρι και καταγράφουμε τα αποτελέσματα. Περιγράψτε ένα δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. ** Δύο χάρτινες σακούλες περιέχουν φρούτα. Η πρώτη περιέχει 1 μήλο (Μ), 1 πορτοκάλι (Π) και 1 αχλάδι (Α). Η δεύτερη περιέχει 1 μήλο και 1 αχλάδι. Επιλέγουμε στην τύχη μία σακούλα και στη συνέχεια ένα φρούτο από αυτή. Να γραφούν: α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
β) Το ενδεχόμενο το φρούτο να είναι μήλο.
γ) Το ενδεχόμενο το φρούτο να είναι πορτοκάλι .

3. ** Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 ομοιόμορφα μολύβια 1 κόκκινο (Κ), 1 πράσινο (Π), 1 μαύρο (Μ), 1 λευκό (Λ). Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος στις ακόλουθες περιπτώσεις: (μας ενδιαφέρει το χρώμα)
α) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι.
β) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι, το τοποθετούμε ξανά στο κουτί και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (επανατοποθέτηση).
γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (χωρίς επανατοποθέτηση).

4. ** Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α , $(B \cap A')$ είναι ασυμβίβαστα.

5. ** Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα compact disks (CD) που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρείτε: α) Το δειγματικό χώρο Ω.
β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς 2 ελαττωματικά CD,
ii) τουλάχιστον 2 ελαττωματικά CD,
iii) το πολύ 2 ελαττωματικά CD.

6. ** Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:

α) Το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.

β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1,

ii) καμία νίκη της ομάδας O_1,

iii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1.

γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση;

δ) Τι παρατηρείτε για τα ενδεχόμενα β(ii) και β(iii);

7. ** Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

Α = {να παρουσιαστεί Κ (κεφαλή) στην πρώτη ρίψη},

Β = {να παρουσιαστεί Κ στη δεύτερη ρίψη},

Γ = {να παρουσιαστεί Κ σε μία μόνο από τις δύο ρίψεις}.

γ) Είναι τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ανά δύο ασυμβίβαστα; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

8. ** Ρίχνοντας ένα ζάρι ποια πιθανότητα είναι μεγαλύτερη να φέρουμε 5 ή να μη φέρουμε 5;

9. ** Θεωρούμε ενδεχόμενα Α, Β ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις:

α) P (A).   β) P (B).

10. ** **I)** Αποδείξτε με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn ότι:

α) $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$,

β) $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \varnothing$,

γ) $P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A)$.

II) Αν $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B')$ και $P(A' \cap B)$.

11. ** Ρίχνουμε ένα ζάρι και κατόπιν παίρνουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Ποια είναι η πιθανότητα το ζάρι να δείξει τον αριθμό 5 και το τραπουλόχαρτο να είναι α) 5 σπαθί; β) 5 οποιουδήποτε είδους;

Σημείωση: *Η άσκηση λύνεται με στοιχειώδη τρόπο, αλλά και με τον πολλαπλασιαστικό νόμο. Άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα κατά την κρίση του διδάσκοντος.*

12. ** Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς του συνόλου $A = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Ποια η πιθανότητα οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας φ;

13. ** Υψώνουμε ένα τυχαίο μονοψήφιο ακέραιο αριθμό (διάφορο του 0) στο τετράγωνο. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο:

α) Το 1, β) το 4,

γ) το 1 ή το 4, δ) το 2.

14. ** Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$ και

$P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$. Υπολογίστε

τις πιθανότητες:

α) $P(A \cap (A' \cap B))$. β) $P(A \cup (A' \cap B))$

Σημείωση: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διάγραμμα Venn.*

15. ** Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: (θεωρούμε τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα)

α) Ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1.

β) Καμία νίκη της ομάδας O_1.

γ) Τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1.

Σημείωση: *Η άσκηση αυτή σχετίζεται με την άσκηση ανάπτυξης 6.*

16. ** Η πιθανότητα να κρυολογήσουμε το χειμώνα είναι 3-πλάσια από του να μην κρυολογήσουμε. Μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα να κρυολογήσουμε το χειμώνα;

17. ** Μια μέρα με πολύ άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30%, η πιθανότητα να μη λειτουργήσουν τα τραίνα είναι 40% και η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο από τα προηγούμενα είναι 90%. Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως και τα δύο;

18. ** Σ’ ένα συρτάρι της ντουλάπας μας υπάρχουν δύο ζευγάρια ίδιες μαύρες κάλτσες και ένα ζευγάρι λευκές. Επιλέγουμε ταυτόχρονα τρεις κάλτσες χωρίς να βλέπουμε το χρώμα τους. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε έτσι επιλέξει ένα ζευγάρι του ίδιου χρώματος;

19. ** Το σύνολο $A = \{20°, 60°, 80°, 100°\}$ περιέχει σαν στοιχεία μέτρα γωνιών. Επιλέγουμε τυχαία και ταυτόχρονα τρία στοιχεία του Α. Ποια η πιθανότητα αυτά να είναι μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου.

20. ** Έστω Α , Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει:

α) Αν $P(A) = P(B)$, τότε $A = B$.

β) Αν $P(A) \neq P(B)$, τότε $A \neq B$.

γ) Αν $A = B$, τότε $P(A) = P(B)$.

δ) Αν $A \neq B$, τότε $P(A) \neq P(B)$.

ε) Αν $P(A) + P(B) = 1$, τότε $B = A'$.

Εξετάστε ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

21. ** Σε μια τάξη της Β΄ Λυκείου υπάρχουν 20 αγόρια και 9 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{4}$ και από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ είναι άριστοι στα Μαθηματικά. Καλούμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια η πιθανότητα:

α) Να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

β) Να είναι κορίτσι.

γ) Να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά.

δ) Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

22. ** Ρίχνουμε ένα ζάρι (ειδικής κατασκευής) για το οποίο έχουμε την πληροφορία ότι φέρνει ζυγά νούμερα δύο φορές συχνότερα απ' ότι μονά. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μονό νούμερο; (*Μη ισοπίθανα ενδεχόμενα*).

23. ** Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν δέκα μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι σε δέκα αριθμημένες καρέκλες;

24. ** Επιλέγοντας ψηφία από το σύνολο Α = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} σχηματίζουμε ακέραιους τριψήφιους αριθμούς γραμμένους στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

α) Πόσους συνολικά μπορούμε να σχηματίσουμε;

β) Πόσοι από αυτούς θα έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά; (π.χ. 123)

25. ** Στο γνωστό τυχερό παιχνίδι ΛΟΤΤΟ:

α) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε εξάρι παίζοντας μία μόνο εξάδα (6 αριθμούς);

β) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε εξάρι παίζοντας 10 διαφορετικές εξάδες;

γ) Πόσες διαφορετικές εξάδες πρέπει να παίξουμε για να είμαστε βέβαιοι ότι θα κερδίσουμε εξάρι;

26. ** Πόσες ευθείες ορίζονται από ν σημεία (ανά τρία μη συνευθειακά);

27. ** Πόσα τρίγωνα ορίζονται από ν σημεία (ανά τρία μη συνευθειακά);

28. ** Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές.

29. ** Σε μια διεθνή διοργάνωση αγώνων μπάσκετ συμμετέχουν δέκα ισοδύναμες ομάδες εκ των οποίων δυο είναι ελληνικές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα:

α) Οι ομάδες στις δύο πρώτες θέσεις της τελικής κατάταξης να είναι ελληνικές.

β) Οι ομάδες στις δύο πρώτες θέσεις της τελικής κατάταξης να είναι ξένες.

γ) Μία τουλάχιστον ομάδα στις δύο πρώτες θέσεις να είναι ελληνική.

30. ** Υπολογίστε τους συνδυασμούς:

α) $\binom{\nu}{\nu}$. β) $\binom{\nu}{0}$. γ) $\binom{\nu}{1}$.

31. ** Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε κατά μάθημα σ' ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης 4 βιβλία Αρχαίων Ελληνικών, 2 βιβλία Μαθηματικών και 3 βιβλία Φυσικής;

32. ** Πόσοι θετικοί ακέραιοι υπάρχουν, γραμμένοι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, με πλήθος ψηφίων ένα έως και εννέα (μονοψήφιοι,διψήφιοι κ.λπ) **και με όλα τα ψηφία τους διάφορα του μηδενός;**

33. ** Παίρνουμε συγχρόνως δυο χαρτιά από μια τράπουλα (52 φύλλων). Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο ντάμες;

34. ** Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς του συνόλου Α = $\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Ποια η πιθανότητα οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι αντίστοιχα ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας φ;

Σημείωση: *Προτείνεται η λύση της με χρήση συνδυασμών ενώ η παρόμοια άσκηση 12 λύνεται εύκολα και με στοιχειώδη τρόπο.*

35. ** Πέντε παντρεμένα ζευγάρια βρίσκονται σε μία αίθουσα. Επιλέγουμε τυχαία δύο άτομα απ' αυτά.

α) Ποια η πιθανότητα να είναι άνδρας - γυναίκα παντρεμένοι μεταξύ τους;

β) Ποια η πιθανότητα να είναι μεν άνδρας - γυναίκα αλλά όχι παντρεμένοι μεταξύ τους;

γ) Ποια η πιθανότητα να είναι του ιδίου φύλου;

36. ** Δύο αδιαφανείς σακούλες περιέχουν ομοιόμορφα μπαλάκια.. Η πρώτη περιέχει ένα μπαλάκι μαύρο (Μ), ένα μπαλάκι πράσινο (Π) και ένα μπαλάκι άσπρο (Α). Η δεύτερη περιέχει περιέχει ένα μπαλάκι μαύρο (Μ) και ένα μπαλάκι άσπρο (Α). Επιλέγουμε τυχαία μία σακούλα και στη συνέχεια ένα μπαλάκι από αυτή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: *(δεσμευμένη πιθανότητα)*

α) Το μπαλάκι να είναι μαύρο.

β) Το μπαλάκι να είναι άσπρο.

γ) Το μπαλάκι να είναι πράσινο.

37. ** Σ' ένα ζευγάρι η πιθανότητα να ζει ο σύζυγος το 2010 είναι 70%, ενώ η πιθανότητα να ζει η σύζυγος το 2010 είναι 80%. Ποια είναι η πιθανότητα να ζει μόνο η σύζυγος το 2010;

38. ** Να δειχθεί ότι δύο ασυμβίβαστα και μη αδύνατα ενδεχόμενα **δεν** είναι ανεξάρτητα.

39. ** Να δειχθεί ότι για δυο ενδεχόμενα Α , Β (P (A) > 0) ισχύει:

α) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(B|A) = 1$.

β) Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$.

40. ** Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο κάπνισμα και τα προβλήματα υγείας 200 ατόμων.

	Καπνιστές	***Μη καπνιστές***	ΣΥΝΟΛΟ
με προβλήματα υγείας	20	20	40
χωρίς προβλήματα υγείας	30	130	160
ΣΥΝΟΛΟ	50	150	200

Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρεθεί η πιθανότητα

α) Να είναι καπνιστής.

β) Να έχει προβλήματα υγείας.

γ) Να είναι καπνιστής χωρίς προβλήματα υγείας.

δ) Να είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας.

ε) Να έχει προβλήματα υγείας, **αν γνωρίζουμε ότι είναι καπνιστής.**

Σημείωση: *Το ερώτημα (ε) είναι δυνατόν να απαντηθεί με τη βοήθεια του πίνακα αλλά και με τη χρήση δεσμευμένης πιθανότητας, άρα είναι ενδεχομένως κατάλληλο για την εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας.*

41. *** Η πιθανότητα βροχής για οποιαδήποτε μέρα του Μαρτίου είναι $\frac{2}{3}$. Αν σήμερα είναι 25 Μαρτίου ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει τις επόμενες τρεις μέρες;

α) Ακριβώς μια φορά. β) Το πολύ μια φορά. γ) Τουλάχιστον μια φορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1ο Κεφάλαιο	**ΑΝΑΛΥΣΗ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**
2.	**Λ**
3.	**Σ**
4.	**Λ**
5.	**Σ**
6.	**Σ**
7.	**Λ**
8.	**Σ**
9.	**Λ**
10.	**Σ**
11.	**Λ**
12.	**Λ**
13.	**Σ**
14.	**Σ**
15.	**Σ**
16.	**Σ**
17.	**Σ**
18.	**Σ**
19.	**Λ**

20.	**Σ**
21.	**Σ**
22.	**Σ**
23.	**Σ**
24.	**Σ**
25.	**Λ**
26.	**Λ**
27.	**Σ**
28.	**Σ**
29.	**Σ**
30.	**Σ**
31.	**Σ**
32.	**Σ**
33.	**Λ**
34.	**Σ**
35.	**Σ**
36.	**Σ**
37.	**Λ**
38.	**Σ**

39.	**Λ**
40.	**Σ**
41.	**Λ**
42.	**Σ**
43.	**Λ**
44.	**Σ**
45.	**Λ**
46.	**Σ**
47. i)	**Λ**
ii)	**Σ**
iii)	**Σ**
iv)	**Λ**
v)	**Λ**
vi)	**Σ**
vii)	**Λ**
viii)	**Σ**
ix)	**Σ**
x)	**Λ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Α
2.	Β
3.	Β
4.	Β
5.	Γ
6.	Α
7.	Γ
8.	Α
9.	Β
10.	Γ

11.	Δ
12.	Β
13.	Γ
14.	Γ
15.	Γ
16.	Β
17.	Α
18.	Ε
19.	Γ

20.	Α
21.	Γ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	Γ
28.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = 2x$	R
$f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$[1, \infty)$
$f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$[-2, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2, +\infty)$

3.	1	Α
	2	Β
	3	Γ

4.	1	Α
	2	Δ
	3	Γ

5.	1	Β
	2	Γ

6.	1	Α
	2	Γ

7.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
$3x^2$	$6x$
$3x$	3
$2\,(x^2 - 1)$	$4x$
$(3x)^2$	$18x$
$(3x - 1)^2$	$6\,(3x - 1)$
$3x^2 - x$	$6x - 1$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
α	0
αx	Α
$\beta x + \alpha$	Β
$\alpha x^2 + \beta$	$2\alpha x$
βx^2	$2\beta x$
$\alpha x^2 - \beta x$	$2\alpha x - \beta$
$\beta x^2 + \alpha x + \gamma$	$2\beta x + \alpha$

9.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$(c\,f(x))' =$	$c\,f'(x)$
$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$\dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(g(x))]' =$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\qquad A = R$

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad A = R - \{0\}$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad A = R$

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad A = R$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad A = R$

2. α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -7$

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 10$

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 16$

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x)-1}{5-3f(x)}$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\dfrac{5}{11}$

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x)+11}$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 3$

3. α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) = 7$

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} = \dfrac{5}{6}$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) = 5\sqrt{17}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 = 64$

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x] = 1$

στ) $\lim\limits_{x \to 0} [2\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x] = -4$

4. α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = - \dfrac{8}{3}$

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x + 1)} = \dfrac{1}{2}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = - \dfrac{1}{2}$

5. α) $f'(0) = 0$

β) $f'(1) = 2$

γ) $f'(-1) = -4$

δ) $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

ε) $f'(0) = 0$

6. α) $y = -1$

β) $y = 4x - 3$

γ) $y = -6x - 5$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	1
$(x - 1)^2$	$2(x - 1)$
$(x^2 - 1)^2$	$4x(x^2 - 1)$
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{-2}{(x-1)^3}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$	$-\frac{1}{2}(x - 1)^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$	$-\frac{3}{2}(x - 1)^{-\frac{5}{2}}$

9.

Στήλη Α $f\ (x)$	**Στήλη Β** $f\,'\,(x)$
$\sqrt{\eta\mu x}$	$\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}$
$\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$	$\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{2\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}}$
$x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$	$1 + \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$
$\dfrac{x}{\sqrt{\eta\mu x}}$	$\dfrac{2\sqrt{\eta\mu^2 x} - x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu^3 x}}$
$\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{2\sqrt{x^2}\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{2\sqrt{x^3}}$

10.

Στήλη Α $f\ (x)$	**Στήλη Β** $f\,'\,(x)$
$x - \ln x$	$1 - \dfrac{1}{x}$
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$e^{\frac{1}{x}}\ (1 - \dfrac{1}{x})$
e^{-2x^3+1}	$- 6x^2 \cdot e^{-2x^3+1}$
$\ln \sqrt{x^2 - 2}$	$\dfrac{x}{x^2 - 2}$

11.

Στήλη Α	**Στήλη Β** *πεδίο ορισμού*	**Στήλη Γ** *α΄ παράγωγος*	**Στήλη Δ** *β΄ παράγωγος*
$h(x) = \frac{1}{x^2}$	$R - \{0\}$	$- \frac{2}{x^3}$	$\frac{6}{x^4}$
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	$R - \{-1, 1\}$	$- \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$	$\frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	R	$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$	$\frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3}$
$g(x) = \frac{x - 1}{x^2}$	$R - \{0\}$	$\frac{2 - x}{x^3}$	$\frac{2(x - 3)}{x^4}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $A = R$ **β)** $x = 1, x = 2$ **γ)** $B = R - \{1, 2\}$

2. **α)** Δεν υπάρχουν $x \in R : g(x) = 0$

β) $A = R$ **γ)** $B = R$

3. **α)** $x = \pm 1$ **β)** $g(x) > 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

γ) **i)** Με $x^2 - 1 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-1, 1\}$

ii) Με $x^2 - 1 \geq 0$ έχουμε $B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

iii) Με $x^2 - 1 > 0$ έχουμε $\Gamma = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. **α)** $x = 4$ **β)** Με $x - 4 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{4\}$

5. **α)** $f(x) + g(x) = x^2 - x - 4$ $A = R$

β) $3f(x) - 2g(x) = 3x^2 - 18x - 2$ $B = R$

γ) $f(x) \cdot g(x) = 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4$ $\Gamma = R$

δ) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{3x - 2}$ Με $3x - 2 \neq 0$ έχουμε $\Delta = R - \{\dfrac{2}{3}\}$

6. **α)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$ **β)** $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)] = -1$

7. **α)** Με $2x + 3 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-\frac{3}{2}\}$

β) $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \frac{1}{5}$

γ) $\lim\limits_{x \to 1} [\varphi(x)]^3 = \frac{1}{125}$

8. **α)** Με $6x^2 - 2 \geq 0$ έχουμε $A = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

β) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = 0$

9. **α)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -12$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -3$ **β)** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 4$

10. **α)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -6$ **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -8$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ **δ)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \sqrt{7}$

11. **α)** Με $x + 2 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-2\}$

β) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x + 2) = -4$

12. **α)** Με $3x + 1 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-\frac{1}{3}\}$

β) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x + 1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{(3x+1)(3x-1)}{3x+1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} (3x - 1) = -2$

13. **α)** Με $x - 3 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{3\}$

β) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{3}^2} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} =$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

14. Πρέπει $x^2 + \alpha \neq 0$ άρα η διακρίνουσα $\Delta < 0$

δηλ. $-4\alpha < 0$, άρα $\alpha > 0$ ή $\alpha \in (0, +\infty)$

15. Πρέπει $x^2 - 4x + (\alpha + 2) \neq 0$ άρα πρέπει $\Delta < 0$

δηλ. $16 - 4(\alpha + 2) < 0$, ..., άρα $\alpha > 2$

16. **α)** Με $x + 4 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-4\}$

β) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{5}$

γ) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 2}{x + 4} = \frac{-1}{5} = f(1)$. Άρα η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

17. **α)** Για $x \neq 3$ η συνάρτηση f (x) είναι συνεχής, ως πολυωνυμική.

β) Πρέπει $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, δηλ. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2) = f(3) = \alpha$, άρα $\alpha = 2$

18. **α)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$

β) Πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = α$, άρα $α = 3$

19. **α)** $A = R$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)}{x-1} = 1$

γ) Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = α$, άρα $α = 1$

20. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = α$ (1)

Όμως $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-3)(x-2)}{x-2} = -1$ (2)

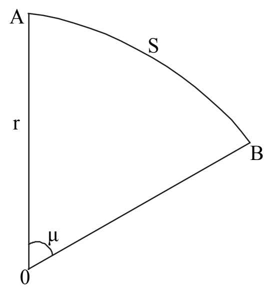
Άρα από (1) και (2) έχουμε $α = -1$

21. **α)** $Π(δ) = 2\sqrt{2}\,δ$ **β)** $E(δ) = \dfrac{δ^2}{2}$

22. Αν x, y οι κάθετες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τότε $E_{ΑΒΓ} = \dfrac{x\cdot y}{2} = 12$.

Άρα $x(y) = \dfrac{24}{y}$.

23. Έστω Π (r) η περίμετρος του κυκλικού τομέα, τότε Π (r) = 2 r + S (1)



Όμως $E_{0AB} = \dfrac{\pi r^2 \mu}{360°} = 30$. Άρα $\mu = \dfrac{30 \cdot 360°}{\pi r^2}$ (2)

Αλλά $S = \dfrac{2\pi r \mu}{360°}$. Άρα από (2) έχουμε

$$S = \frac{2\pi r \dfrac{30 \cdot 360°}{\pi r^2}}{360°} = \frac{2 \cdot 30}{r} = \frac{60}{r} \qquad (3)$$

Από (1) και (3) έχουμε Π (r) = 2 r + $\dfrac{60}{r}$

24. **α)** f ΄ (3) = 2

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με x = 3 ισούται με το f ΄ (3), δηλ. είναι 2

γ) Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης θα είναι της μορφής y = αx + β, άρα y = 2x + β. Το σημείο (3, f (3)) = (3, 3) είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της εφαπτομένης, άρα έχουμε: 3 = 2 · 3 + β, άρα β = -3 και η ζητούμενη εξίσωση είναι y = 2x - 3

25. **α)** f ΄ (2) = 4α **β)** Πρέπει f ΄ (2) = 4 , δηλ. f ΄ (2) = 4α = 4 , άρα α = 1

26. **α)** f ΄ (0) = 0

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με x = 0 ισούται με το f ΄ (0) , δηλ. f ΄ (0) = 0

γ) Με όμοιο τρόπο, με τη λύση της άσκησης 24 (γ) βρίσκουμε y = 1

27. **α)** $f'(x) = 2x - 5$

β) Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = αx + β$ (1)

Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη του άξονα των $x'x$ θα είναι $α = 0$ και άρα η (1) γίνεται $y = β$ (2)

Η ευθεία (2) εφάπτεται της καμπύλης της f στο σημείο της κορυφής της δηλ. στο σημείο $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Το σημείο αυτό ανήκει και στην ευθεία $y = β$, άρα έχουμε $-\frac{1}{4} = β$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -\frac{1}{4}$

28. **α)** $f'(2) = 8 - α$

β) Πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (2, f (2)) να ισούται με την εφαπτομένη 45°, δηλ. με 1, άρα $f'(2) = 8 - α = 1$, άρα $α = 7$

29. Έστω $\hat{ω}$ η ζητούμενη γωνία, τότε $εφω = f'(\frac{1}{4})$. Άρα $εφω = -4\frac{1}{4} + 1 = 0$.

Άρα $\hat{ω} = 0°$

30. **α)** Η μέση ταχύτητα $\overline{υ}(t) = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(4) - S(0)}{4 - 0} =$

$\frac{S(4)}{4} = \frac{24}{4} = 6$ m/sec

β) Η στιγμιαία ταχύτητα $υ(t) = S'(t) = 2 + 2t$. Άρα η στιγμιαία ταχύτητα για $t = 1$ είναι $S'(1) = 2 + 2\cdot 1 = 4$ m/sec.

31. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση 30 βρίσκουμε:

α) $\overline{\upsilon} = 17$ m/sec **β)** $\upsilon = 17$ m/sec, όταν $t = 3$ sec

32. **α)** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ (t) ως προς t όταν $t = t_0$ είναι

$\gamma(t_0) = \upsilon'(t_0) = 6t_0$ m/sec^2

β) Όταν t = 10 sec τότε $\gamma(10) = 6 \cdot 10 = 60$ m/sec^2

33. **α)** $P(0) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+0)^{-1} = 1000 - 500 = 500$ μονάδες μικροβίων

β) $P(9) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+9)^{-1} = 1000 - 500 \dfrac{1}{10} = 950$ μονάδες μικροβίων

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο όταν t = 9 h ,είναι $P'(9) = 5$ μονάδες ανά ώρα

34. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ύστερα από 25 χρόνια θα είναι $A'(25) = 1.080$ κάτοικοι ανά έτος. ($e \approx 2,7$)

35. **α)** i) $f'(x) = e^{-x} \cdot x^2 (3 - x)$ ii) $g'(x) = e^x \cdot x(2 + x)$

β) i) $f'(1) = \dfrac{2}{e}$ ii) $g'(1) = 3e$

36. Έστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$P(0) = \delta = -1$ (1)

$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

άρα $P'(1) = 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 + \gamma = 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5$ (2)

$P'(0) = \gamma = 2$ (3)

$P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ άρα $P''(1) = 6\alpha + 2\beta = 2$ (4)

Από το σύστημα των (1) (2) (3) (4) προκύπτει $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\dfrac{1}{3}, 2, 2, -1)$

δηλ. $P(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

37. **α) i)** $f'(x) = 2 - 2x$ **ii)** $f''(x) = -2$

38. **α) i)** $f'(x) = 2e^{2x}$ **ii)** $f''(x) = 4e^{2x}$

39. **α)** $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ **β)** $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ **γ)** $\alpha = -3,\ \alpha = 1$

40. **α)** $f'(x) = 3\sqrt{x+1}\left[\,|x+1| + \dfrac{3x-2}{2}\right]$ **β)** $f'(0) = 0$

41. **α)** Είναι $e^x + 1 \neq 0$, για όλες τις πραγματικές τιμές του x, άρα $A = R$

β) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

42. **α)** Πρέπει $e^x - 1 \neq 0$, άρα $x \neq 0$, άρα $A = R - \{0\}$

β) $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

43. **α)** Πρέπει $1 - συνx \neq 0$,άρα $συνx \neq 1$, άρα $x \neq 2κπ$

Άρα $A = \{x \,/\, x \neq 2κπ,\ κ \in Z\}$

β) $f'(x) = \dfrac{1 - συνx - ημx}{(1 - συνx)^2}$

44. α) $f'(x) = x^2 + 4x + 3$

β) Οι εφαπτόμενες της καμπύλης της f στα ζητούμενα σημεία είναι παράλληλες προς τον xx΄, άρα σχηματίζουν γωνία 0° με αυτόν.

Άρα εφ0° = 0 = $f'(x)$.Δηλαδή $f'(x)= x^2 + 2x + 3 = 0$, από όπου $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι **Α** $(-1, -\frac{1}{3})$, **Β** $(-3, 1)$

45. α) $f'(x) = 2(x + 1)$

β) $\lambda = f'(4)$, άρα $\lambda = 10$

46. α) $f'(x) = -2x + 3$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = \alpha x + \beta$ (1)

Πρέπει να βρεθούν τα α, β.

$\alpha = εφ135° = -εφ45° = -1$ (2)

Άρα έχουμε: $\alpha = -1 = f'(x) = -2x + 3$, άρα $x = 2$.

Το σημείο επαφής έχει συντεταγμένες $(2, f(2)) = (2, 1)$ (3)

Άρα η (1) λόγω των (2) (3) γίνεται: $1 = -1 \cdot 2 + \beta$, άρα $\beta = 3$.

Άρα $y = -x + 3$

47. α) $f'(x) = 2\alpha(x + 1)$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(1) = 4$, άρα $f'(1) = 2\alpha 2 = 4$, άρα $\alpha = 1$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \kappa x + \lambda$. Αλλά από (β) ερώτημα έχουμε $\kappa = 4$, άρα πρέπει να βρεθεί το λ.

Το σημείο $(1, f'(1)) = (1, 4)$ είναι κοινό σημείο της f και της εφαπτομένης $y = \kappa x + \lambda$ (1).

Άρα από (1) έχουμε: $4 = 4 \cdot 1 + \lambda$, άρα $\lambda = 0$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 4x$

48. α) $f'(x) = 2x - 4$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α (x, y) ισούται με 1 (εφ45° = 1). Άρα $f'(x) = 1$

Δηλαδή έχουμε $f'(x) = 2x - 4 = 1$, άρα $x = \frac{5}{2}$ και $f(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{4}$.

Άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(x, y) = (\frac{5}{2}, -\frac{7}{4})$

49. Για να είναι η ευθεία $y = 3x - 1$ εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο (2, f (2)), πρέπει:

1) $f'(2) = 3$, δηλαδή

$4 \cdot 2 - \alpha = 3$

$\alpha = 5$

2) Το σημείο (2, f (2)) να είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της εφαπτομένης ευθείας $y = 3x - 1$, δηλαδή:

$f(2) = 3 \cdot 2 - 1$

$2 \cdot 2^2 - \alpha \cdot 2 + \beta = 3 \cdot 2 - 1$

$8 - 5 \cdot 2 + \beta = 3 \cdot 2 - 1$

$-2 + \beta = 5$

$\beta = 7$

50. α) $f'(x) = x^2 + 2x - 2$

β) Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$ θα είναι $y = x + \beta$ και $y = x + \gamma$. Αρκεί να βρεθούν οι παράμετροι β, γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης των $y = x + \beta$ και

$y = x + \gamma$ είναι ίσος με $1 = f'(x)$. Δηλαδή $f'(x) = x^2 + 2x - 2 = 1$ απ' όπου $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Τα σημεία (1, f (1)), (- 3, f (- 3)) είναι κοινά σημεία επαφής της καμπύλης της f και των αντιστοίχων εφαπτόμενων.

Άρα: $f(1) = 1 + \beta$ και $\quad f(-3) = -3 + \gamma$

$\frac{1}{3} = 1 + \beta \qquad 7 = -3 + \gamma$, άρα

$\beta = -\frac{2}{3} \qquad \gamma = 10$

Άρα οι ζητούμενες εξισώσεις είναι $y = x - \frac{2}{3}$, $y = x + 10$

51. **α)** $f'(x) = -\frac{4}{x^3}$ άρα $f'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3}$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ είναι της μορφής

$y = \kappa x + \lambda$ (1), όπου ο κ ισούται με $f'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3}$ (2)

Το σημείο $(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της

$y = \kappa x + \lambda$. Άρα από (1), (2) έχουμε $\frac{2}{\alpha^2} = -\frac{4}{\alpha^3} \cdot \alpha + \lambda$.

Άρα $\frac{2}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^2} = \lambda$. Άρα $\frac{6}{\alpha^2} = \lambda$ (3)

Από (1), (2), (3) έχουμε $y = -\frac{4}{\alpha^3}x + \frac{6}{\alpha^2}$

52. α) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x - 5)(x - 1)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της συνάρτησης)

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

προκύπτει ότι η f είναι στο $(-\infty, 1]$ αύξουσα, στο $[1, 5]$ φθίνουσα και στο $[5, +\infty)$ αύξουσα

γ) Για $x = 1$, η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή $f_{max} = 4$ και για $x = 5$ η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $f_{min} = -28$

53. α) i) $f'(x) = 4x - 4$ ii) $g'(x) = -2x + 4$

β) Από τους παρακάτω πίνακες (μεταβολών των συναρτήσεων)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο και η συνάρτηση g για $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο.

γ) Για $x = 1$, το $f(1) = -3$ είναι ελάχιστο

Για $x = 2$, το $g(2) = 6$ είναι μέγιστο

54. α) $f'(x) = x^2 - 4x - 5$ **β)** $x_1 = 5$, $x_2 = -1$

γ) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της συνάρτησης)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

έχουμε ότι για $x = -1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο και για $x = 5$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο

δ) Για $x = -1$, το $f(-1) = \frac{2}{3}$ είναι μέγιστο

Για $x = 5$, το $f(5) = -\frac{106}{3}$ είναι ελάχιστο

55. α) Για να έχει η συνάρτηση f τοπικό ακρότατο για x = 1,

θα πρέπει f ΄ (1) = 0.

f ΄ (x) = 2κx + λ. Άρα f ΄ (1) = 2κ + λ =0 (1)

Επίσης το f (1) = -2 δηλαδή f (1) = κ + λ + 3 = - 2 (2)

Από (1) και (2) σχέσεις έχουμε κ = 5, λ = - 10. Άρα f (x) = $5x^2$ - 10x + 3

και f ΄ (x) = 10x - 10

β) Η συνάρτηση f για x = 1 παρουσιάζει ελάχιστο, αφού για x < 1

η f ΄ (x) < 0 και για x > 1 η f ΄ (x) > 0.

56. Από τη συνάρτηση f έχουμε f ΄ (x) = $3x^2$ - 3 = 3 (x - 1) (x + 1)

Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f ΄(x)		+	0	−	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	

α) Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στα διαστήματα (- ∞, - 1], [1, + ∞)

β) Η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα [-1, 1]

57. α) f ΄ (x) = $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$ f ΄΄ (x) = $e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f ΄(x)		−	0	+	0	−	
f (x)		↘		↗		↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (- ∞, 0], [2, + ∞)

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 2]

γ) Για x = 0 παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με f (0)

Για x = 2 παρουσιάζει μέγιστο ίσο με f (2)

58. α) i) $A = R$ **ii)** $f\,'(x) = e^x(-x^2 + 2)$, $f\,''(x) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}\,]$, $[\sqrt{2}, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,]$

ii) Για $x = \sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο με τιμή μεγίστου την $f(\sqrt{2}) = 3,4$

Για $x = -\sqrt{2}$ έχουμε ελάχιστο με τιμή ελαχίστου την $f(-\sqrt{2}) = -1,174$

59. α) $f\,'(x) = 3\kappa x^2 + 2\lambda x + 3$

β) Για να έχει η συνάρτηση f τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ πρέπει $f\,'(2) = 0$, $f\,'(-2) = 0$

Άρα $3\kappa \cdot 2^2 + 2\lambda \cdot 2 + 3 = 0$ και $3\kappa(-2)^2 + 2\lambda(-2) + 3 = 0$ ή

$12\kappa + 4\lambda + 3 = 0 \qquad (1)$

$12\kappa - 4\lambda + 3 = 0 \qquad (2)$

Από (1) και (2) προκύπτει $\kappa = -\dfrac{1}{4}$, $\lambda = 0$

γ) Η συνάρτηση f μετά τον προσδιορισμό των κ, λ γίνεται

$f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + 3x - 1$

Για $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2) = 3$

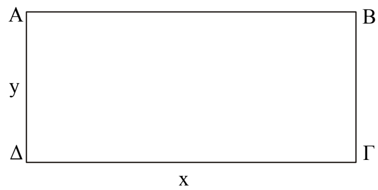
Για $x = -2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = -5$

60. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με σταθερή περίμετρο Π και διαστάσεις

x, y. Άρα 2x + 2y = Π ή 2y = Π - 2x ή $y = \dfrac{Π - 2x}{2}$ (1) x, y > 0

Το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζεται συναρτήσει του x από τη συνάρτηση

$$E(x) = x\left(\frac{Π - 2x}{2}\right) = \frac{xΠ}{2} - x^2,$$



$0 < x < \dfrac{Π}{2}$.

Θα υπολογίσουμε την τιμή του x, ώστε η E (x) να έχει μέγιστο. Η E (x) είναι παραγωγίσιμη με $E'(x) = \dfrac{Π}{2} - 2x$. Η $E'(x)$ μηδενίζεται όταν $x = \dfrac{Π}{4}$.

Από τον πίνακα:

x	0		$\frac{Π}{4}$		$\frac{Π}{2}$
E ΄(x)		+	0	−	
E (x)		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση E (x) έχει μέγιστη τιμή όταν $x = \dfrac{Π}{4}$. Άρα από την (1) για $x = \dfrac{Π}{4}$, έχουμε $y = \dfrac{Π}{4}$.

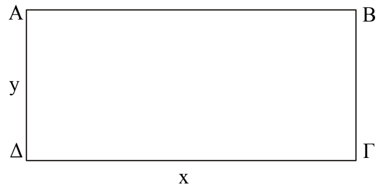
Άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει μέγιστο εμβαδόν, όταν $x = y = \dfrac{Π}{4}$, δηλαδή όταν είναι τετράγωνο.

61. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x, y και εμβαδό 1600 m^2.

Δηλαδή $x \cdot y = 1600\ m^2$ ή $y = \dfrac{1600}{x}$ (1) $x, y > 0$

Η περίμετρος του γράφεται $2\,(x + y)$ και εκφράζεται συναρτήσει του x ως εξής:

$\Pi\,(x) = 2\,(x + \dfrac{1600}{x}),\ x > 0$



Θα υπολογίσουμε την τιμή του x, ώστε η Π (x) να έχει ελάχιστο. Η συνάρτηση Π (x) είναι παραγωγίσιμη με $\Pi\,'(x) = \dfrac{x^2 - 1600}{x^2}$ και με $\Pi\,'(x) =$

0

έχουμε $x = 40$ $(x > 0)$

Από τον πίνακα:

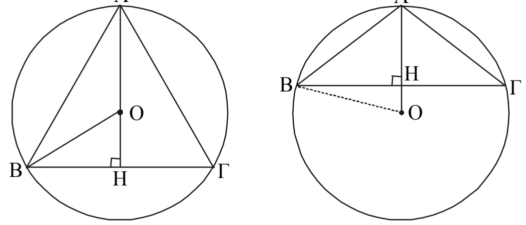
x	0		40		$+\infty$
Π ΄(x)		−	0	+	
Π (x)		↘	min	↗	

έχουμε ότι η Π (x) έχει για $x = 40$ ελάχιστη τιμή ίση με Π (40).

Αν $x = 40$, από την (1) έχουμε $y = 40$, δηλαδή το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο με πλευρά $x = y = 40$ m.

62. Έστω ΑΒΓ το ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΗ το ύψος του.

Το περίκεντρο του ΑΒΓ βρίσκεται στην ευθεία ΑΗ. Αν θέσουμε ΑΗ = x με $0 < x < 2R$, τότε $OH = x - R$ ή $OH = R - x$, δηλαδή $OH = |x - R|$



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΗΒ έχουμε

$BH^2 = OB^2 - OH^2$

Δηλαδή ΒΗ = $\sqrt{R^2 - |x - R|^2} = \sqrt{R^2 - x^2 - R^2 + 2Rx} = \sqrt{2Rx - x^2}$, οπότε

το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι Ε (x) = $\frac{1}{2}$ ΒΓ · ΑΗ = $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2Rx - x^2} \cdot x$

Άρα Ε (x) = x· $\sqrt{2Rx - x^2}$ (1). Η (1) είναι παραγωγίσιμη με

$E\,'(x) = (x\cdot \sqrt{2Rx - x^2})\,' = \dfrac{3Rx - 2x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$ και με Ε ΄ (x) = 0 έχουμε

$3Rx - 2x^2 = 0$ άρα x = 0, x = $\frac{3R}{2}$ και με $x \in (0, 2R)$ και $x \neq 0$ έχουμε

$x = \dfrac{3R}{2}$

Από τον πίνακα:

x	0		$\frac{3R}{2}$		2R
Ε ΄(x)		+	0	−	
Ε (x)		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση Ε (x) παρουσιάζει μέγιστο για x = $\frac{3R}{2}$.

Το εμβαδόν λοιπόν γίνεται μέγιστο για x = $\frac{3R}{2}$. Τότε ΟΗ= $\left|\frac{3R}{2} - R\right| = \frac{R}{2}$. Το απόστημα της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{R}{2}$, άρα είναι ισόπλευρο τρίγωνο, του οποίου το εμβαδόν είναι $E\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

63. Οι δύο αριθμοί x, y έχουν σταθερό άθροισμα 12, άρα x + y = 12 και y = 12 - x (1)

Το γινόμενό τους συναρτήσει του x είναι Γ (x) = x · (12 - x) = 12x - x^2.

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη, με Γ ΄ (x) = 12 - 2x . Αν Γ ΄ (x) = 0 έχουμε x = 6.

Από τον πίνακα

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$Γ΄(x)$		$+$	0	$-$	
$Γ(x)$		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση Γ (x) παρουσιάζει μέγιστο για $x = 6$ και η τιμή του είναι $Γ(6) = 36$. Για $x = 6$ από την (1) έχουμε $y = 6$. Άρα οι δύο αριθμοί είναι $x = y = 6$.

64. **α)** Η συνάρτηση κόστους $K(t) = t^2 + 250t^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $K΄(t) = 2t - 250t^{-2}$. Η πραγματοποίηση μεγίστου κέρδους συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής.

Από $K΄(t) = 0$ έχουμε:

$$2t - 250t^{-2} = 0 \text{ ή } \frac{2t^3 - 250}{t^2} = 0 \text{ ή } t^3 = 125 \text{ ή } t = 5.$$

Από τον πίνακα

t	0		5		$+\infty$
$K΄(t)$		$-$	0	$+$	
$K(t)$		↘	min	↗	

προκύπτει ότι η συνάρτηση K (t) παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $t = 5$ h και αυτή είναι $K(5) = 75$ δρχ.

Άρα το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται για $t = 5$ h.

β) Το μέγιστο κέρδος είναι $1000 - 75 = 925$ δρχ.

65. α) Η συνάρτηση $E(\upsilon) = \dfrac{1}{\upsilon}\left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right]$

είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο

$$E'(\upsilon) = \frac{\left[2(\upsilon-35)^2+750\right]' \cdot \upsilon - \left[2(\upsilon-35)^2+750\right] \cdot \upsilon'}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{4(\upsilon-35)\cdot\upsilon - \left[2(\upsilon-35)^2+750\right]}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{4\upsilon^2 - 140\upsilon - \left[2(\upsilon^2 - 70\upsilon + 1225) + 750\right]}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{2\upsilon^2 - 3200}{\upsilon^2}.$$

Αν $E'(\upsilon) = 0$ έχουμε $\upsilon = 40$.

Από τον πίνακα

υ	0		40		$+\infty$
$E'(\upsilon)$		$-$	0	$+$	
$E(\upsilon)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

έχουμε ότι η συνάρτηση Ε (υ) παρουσιάζει ελάχιστο για την τιμή $\upsilon = 40$ μονάδες ταχύτητας.

β) Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι:

$E_{min}(40) = 20$ μονάδες ενέργειας

66. α) $P(t_0) = W'(t_0) = 12t_0 - 4t_0^3$.

β) Η συνάρτηση P (t) εκφράζει την ισχύ του πηνίου και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $P'(t) = 12 - 12t^2$.

Αν $P'(t) = 0$ έχουμε $t = \pm 1$.

Απορρίπτουμε την αρνητική τιμή του χρόνου $t = -1$ και με $t = 1$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα

t	0		1		$+\infty$
P ′(t)		+	0	−	
P (t)		↗	max	↘	

απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση ισχύος του πηνίου P (t) παρουσιάζει μέγιστο για t = 1 h.

γ) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης P (t) που εκφράζει τη μέγιστη ισχύ του πηνίου είναι P (1) = 8 Watt.

67. α) Η συνάρτηση κέρδους είναι $A(t) = 100 - t^2 - \dfrac{250}{t}$, $t \in (0, 8]$

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$A'(t) = -2t + \frac{250}{t^2}.$$

Αν $A'(t) = 0$ έχουμε $\dfrac{-2t^3 + 250}{t^2} = 0$ ή $2t^3 = 250$ ή $t^3 = 125$ ή $t = 5$.

Από τον παρακάτω πίνακα

t	0		5		8
A ′(t)		+	0	−	
A (t)		↗	max	↘	

έχουμε ότι για t = 5 χρόνια η συνάρτηση A (t) παρουσιάζει μέγιστο.

β) Το μέγιστο κέρδος ανά επιβάτη είναι A (5) = 25 δρχ.

68. Η συνάρτηση f (x) = x^2 (α - x), με α θετική σταθερά, είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2\alpha x - 3x^2$. Αν $f'(x) = 0$ έχουμε $2\alpha x - 3x^2 = 0$ ή $x = 0$, $x = \frac{2\alpha}{3}$.

Η ρίζα x = 0 απορρίπτεται γιατί αναφέρεται σε μηδενική ποσότητα φαρμάκου.

Από τον παρακάτω πίνακα

x	0		$\frac{2\alpha}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	max	↘	

έχουμε ότι για $x = \frac{2\alpha}{3}$ η συνάρτηση f (x) παρουσιάζει μέγιστο.

Άρα για $x = \frac{2\alpha}{3}$ ποσότητα φαρμάκου έχουμε τη μέγιστη θετική αντίδραση του οργανισμού.

69. Η συνάρτηση κόστους των x ταψιών είναι $K(x) = \frac{x^2}{4} + 25x + 25$.

Η συνάρτηση εσόδων από την πώληση των x ταψιών είναι

$\Pi(x) = x\left(1000 - \frac{x}{2}\right)$.

Άρα η συνάρτηση κέρδους των x ταψιών είναι

$A(x) = x\left(1000 - \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{4} + 25x + 25\right)$ ή $A(x) = -\frac{3x^2}{4} + 975x - 25$

Η συνάρτηση A (x) είναι παραγωγίσιμη με $A'(x) = -\frac{6x}{4} + 975$.

Αν $A'(x) = 0$ έχουμε x = 650.

Από τον παρακάτω πίνακα

x	0		650		$+\infty$
$A'(x)$		+	0	−	
$A(x)$		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση A (x) παρουσιάζει μέγιστο για x = 650.

Άρα έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος όταν παραχθούν 650 ταψάκια.

2ο Κεφάλαιο **ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Λ
7.	Σ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Λ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Λ
21.	Λ
22.	Σ
23.	Λ
24.	Λ
25.	Σ
26.	Σ

27.	Λ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Λ
32.	Σ
33.	Σ
34.	Λ
35.	Λ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ
39.	Λ
40.	Σ
41. i)	Σ
ii)	Σ
iii)	Λ
42.	Λ
43.	Σ
44.	Σ
45.	Λ
46.	Λ
47.	Λ
48.	Σ
49.	Λ
50.	Λ

51.	Σ
52.	Σ
53.	Λ
54.	Σ
55.	Σ
56.	Λ
57.	Σ
58.	Σ
59.	Λ
60.	Λ
61.	Σ
62.	Σ
63.	Λ
64.	Σ
65.	Σ
66.	Λ
67.	Σ
68.	Λ
69.	Λ
70.	Σ
71.	Λ
72.	Σ
73.	Λ
74.	Σ
75.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**		**13.**	**Β**		**24.**	**Ε**
2.	**Α**		**14.**	**Ε**		**25.**	**Β**
3.	**Β**		**15.**	**Γ**		**26.**	**Γ**
4.	**Β**		**16.**	**Ε**		**27.**	**Α**
5.	**Γ**		**17.**	**Γ**		**28.**	**Ε**
6.	**Β**		**18.**	**Γ**		**29.**	**Γ**
7.	**Α**		**19.**	**Γ**		**30.**	**Δ**
8.	**Β**		**20.**	**Δ**		**31.**	**Β**
9.	**Α**		**21.**	**Α**		**32.**	**Ε**
10.	**Β**		**22. i)**	**Β**		**33.**	**Γ**
11.	**Β**		**ii)**	**Γ**		**34.**	**Β**
12.	**Γ**		**23.**	**Β**			

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.	Α	3
	Β	2
	Γ	1
	Δ	4
	Ε	6

2.	Α	1
	Β	3
	Γ	4

3.	Α	2
	Β	1
	Γ	3
	Δ	4
	Ε	5

4.	Α	4
	Β	2
	Γ	3

5.	Α	4
	Β	3
	Γ	1

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. πληθυσμός

2. μεταβλητές

3. τιμές της μεταβλητής

4. **α)** ποιοτικές ή κατηγορικές
β) ποσοτικές, **i)** διακριτές, **ii)** συνεχείς

5. απογραφή (census)

6. της Δειγματοληψίας

7. πινάκων

8. συχνότητα ν_i

9. πίνακας κατανομής συχνοτήτων - πίνακας συχνοτήτων

10. κατανομή συχνοτήτων - κατανομή σχετικών συχνοτήτων

11. αθροιστικές συχνότητες N_i - αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i

12. σχετική συχνότητα f_i

13. ραβδόγραμμα - συχνοτήτων

14. κυκλικό

15. ιστόγραμμα - εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής

16. Αν ν είναι όλοι οι ανεξεταστέοι τότε η σχετική συχνότητα της Φυσικής είναι $\frac{10}{\nu}$. Έχουμε λοιπόν την ισότητα $\frac{10}{\nu} = \frac{25}{100}$ ή ν = 40. Οι σχετικές συχνότητες είναι:

Αρχαία Ελληνικά: $\frac{6}{40} = 0{,}15$ ή 15%

Αγγλικά: $\frac{8}{40} = 0{,}2$ ή 20%

Μαθηματικά: 20%

Αν ν_E είναι η συχνότητα των Νέων Ελληνικών, τότε $\frac{\nu_E}{40} = \frac{5}{100}$ ή $\nu_E = 2$

Η συχνότητα της Χημείας είναι: 40 - (6 + 2 + 8 + 8 + 10) = 6. Οπότε η σχετική συχνότητά της είναι $\frac{6}{40} = 0{,}15$ ή 15%

Μαθήματα x_i	ν_i	f_i %
Αρχαία Ελληνικά	6	15
Νέα Ελληνικά	2	5
Αγγλικά	8	20
Μαθηματικά	8	20
Φυσική	10	25
Χημεία	6	15
	40	100

17. Αν ν είναι το σύνολο όλων των ψήφων τότε το Δ κόμμα παρουσιάζει σχετική συχνότητα $\frac{2010}{\nu} = \frac{10}{100}$ ή ν = 20.100. Έτσι η σχετική συχνότητα για το κόμμα Α θα είναι $\frac{3000}{20100} \cdot 100 = 14{,}92\%$.

Η συχνότητα για το κόμμα Β είναι $\frac{x}{20100} = \frac{50}{100}$ ή x = 10.050.

Το κόμμα Γ πήρε: 20100 - (3000 + 10050 + 2010) = 5040 ψήφους με σχετική συχνότητα 100 - (14,92 + 50 + 10) = 25,08%.

Κόμματα	**Συχνότητα ν_i (ψήφοι)**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
Α	3.000	14,92
Β	10.050	50
Γ	5.040	25,08
Δ	2.010	10
	20.100	100

18.

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	**πλάτος κλάσης c_i**	**ν_i**	**f_i %**
[25, 35)	10	50	12,5
[35, 40)	5	80	20
[40, 45)	5	100	25
[45, 50)	5	70	17,5
[50, 55)	5	50	12,5
[55, 65)	10	25	6,25
[65, 90)	25	25	6,25
		400	100

c_i είναι το πλάτος της κλάσης i με συχνότητα ν_i, υ_i είναι το ύψος του ορθογωνίου του ιστογράμματος, όπου το εμβαδό κάθε ορθογωνίου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης και $\upsilon_i = \frac{\nu_i}{c_i}$.

19. μέτρα θέσης - μέτρα διασποράς - μέτρα μεταβλητότητας

20. τεταρτημόρια - Q_1, Q_2, Q_3

21. α) ο αριθμητικός μέσος ή η μέση τιμή β) η διάμεσος
γ) η κορυφή ή η επικρατούσα τιμή δ) ο σταθμικός μέσος
ε) τα εκατοστημόρια ($P_κ$)

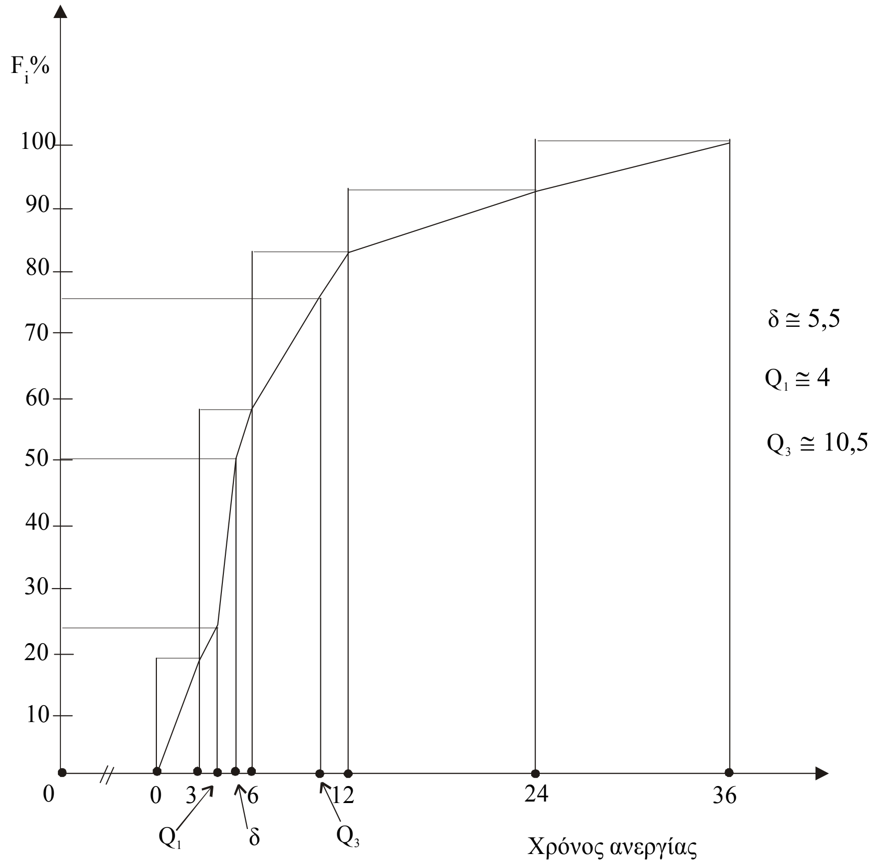
22. α) το εύρος β) η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση
γ) η διακύμανση δ) η τυπική απόκλιση

23. συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας

24. α) Αν νi είναι η συχνότητα της κλάσης [0, 3) τότε έχουμε $\frac{ν_i}{500} = \frac{19}{100}$ ή $ν_i = 95$. Όμοια προκύπτουν και οι συχνότητες των άλλων κλάσεων.

Χρόνος ανεργίας	**$ν_I$**	**f_i %**	**$F_ι$ %**
[0, 3)	95	19	19
[3, 6)	193	38,6	57,6
[6, 12)	122	24,4	82
[12, 24)	68	13,6	95,6
[24, 36)	22	4,4	100
	500	100	

β)
γ)



Παρατήρηση: *Το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων σε ιστόγραμμα που έχει ανισοπλατείς κλάσεις γίνεται όπως και σε ιστόγραμμα ίσου πλάτους γιατί θεωρούμε ότι υπάρχει ομοιογένεια μέσα στις κλάσεις.*

25.

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	f_I %	F_i %
1	8	0,4	8	0,4	40	40
2	2	0,1	10	0,5	10	50
3	5	0,25	15	0,75	25	75
4	3	0,15	18	0,9	15	90
5	2	0,1	20	1	10	100
Σύνολο	20	1			100	

26. ανάλυση παλινδρόμησης

27. X - Y

28. παλινδρόμηση του βάρους (Y) πάνω στο ύψος (X)

29. μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

30. ευθεία ελαχίστων τετραγώνων - ευθεία παλινδρόμησης

31. συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

32. ανεξάρτητος

33. i) θετικά γραμμικά συσχετισμένες
ii) αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες
iii) τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση - θετική
iv) τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση - αρνητική
v) δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση - γραμμικά ασυσχέτιστες

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Πληθυσμός είναι το σύνολο Κ των κιβωτίων της αποθήκης.

β) Αν συμβολίσουμε με $κ_1$, $κ_2$, …, $κ_{10}$ τα κιβώτια που ζυγίσαμε, τότε οι μονάδες είναι τα στοιχεία $κ_1$, $κ_2$, …, $κ_{10}$.

γ) Δείγμα είναι το σύνολο $Δ = \{κ_1, κ_2, …, κ_{10}\}$.

δ) Μεταβλητή είναι το βάρος των κιβωτίων και το σύνολο τιμών της είναι $Σ = \{12, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25\}$.

2. α) Ο πληθυσμός Μ είναι οι 10 μαθητές.

β) Κάθε μαθητής είναι ένα άτομο.

γ) Μεταβλητή είναι ο βαθμός στη Στατιστική.

δ) Η μεταβλητή είναι ποσοτική γιατί το σύνολο Σ των τιμών της μεταβλητής, δηλαδή το σύνολο $Σ = \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ είναι υποσύνολο του R. Η μεταβλητή είναι διακριτή.

ε) Οι παρατηρήσεις είναι οι βαθμοί στη Στατιστική 15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17.

3. α) Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής Χ είναι το σύνολο $Σ = \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$.

β) Οι συχνότητες των τιμών 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 είναι: 2, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 2 αντίστοιχα.

4. α) i) Ποιοτικές μεταβλητές είναι η διαγωγή και η κατεύθυνση.

ii) Ποσοτικές μεταβλητές είναι ο βαθμός απολυτηρίου, ο αριθμός απουσιών και το βάρος.

β) Από τις ποσοτικές μεταβλητές:

i) Διακριτές είναι ο βαθμός απολυτηρίου και ο αριθμός απουσιών.

ii) Συνεχής μεταβλητή είναι το βάρος.

5.

ενδείξεις ζαριού	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**
1	5	5
2	6	11
3	4	15
4	5	20
5	6	26
6	4	30
	30	

6.

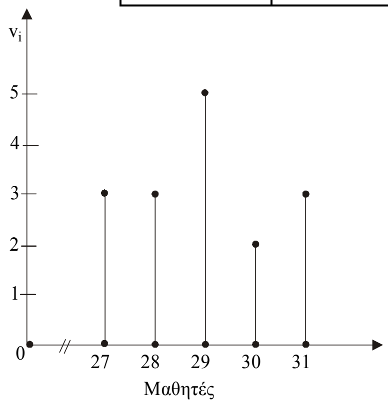
°C	**ν_i**	**N_i**
21	4	4
22	5	9
23	6	15
24	4	19
25	3	22
26	6	28
27	2	30
	30	

β) i) 9 ημέρες, ii) 11 ημέρες, iii) 15 ημέρες.

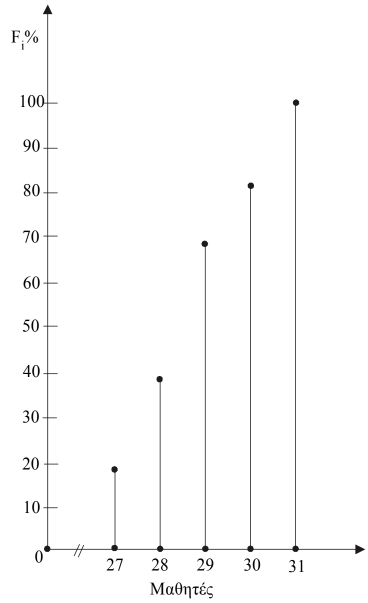
7. α)

Μαθητές	**ν_i**	**f_i %**	**F_i %**
27	3	19	19
28	3	19	38
29	5	31	69
30	2	12	81
31	3	19	100
	16	100	

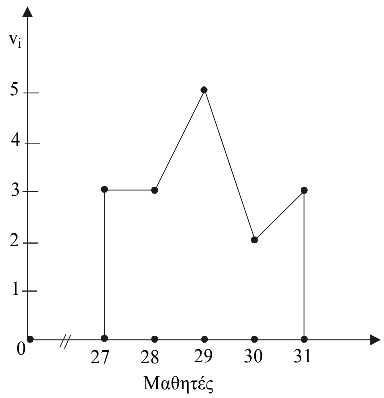
β) i)



ii)



γ)



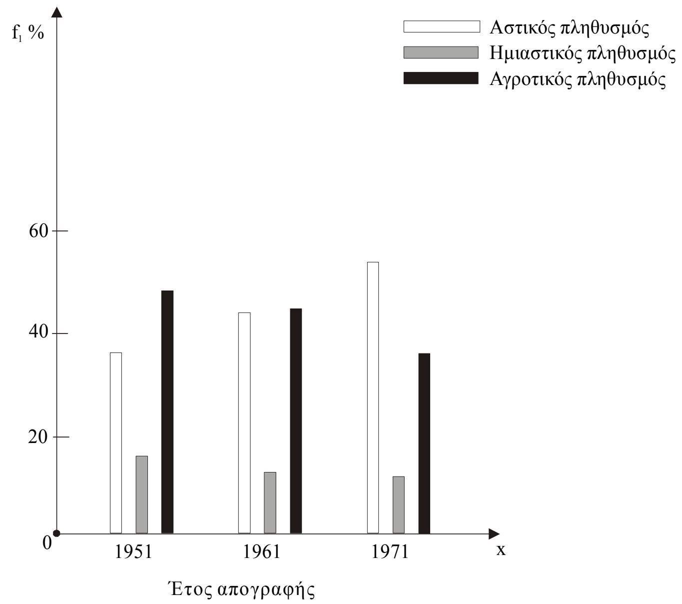
Παρατήρηση: *Το πολύγωνο των συχνοτήτων είναι πάντα κλειστό.*

8. α)

x_i	Διαλογή	ν_i	N_i
0	I	1	1
2	I	1	2
3	I	1	3
4	I I I	3	6
5	I I I I	4	10
6	I I	2	12
7	I I I	3	15
8	I I I	3	18
9	I I	2	20
10	I I I	3	23
13	I	1	24
15	I	1	25
16	I	1	26
		26	

β) 3 κοινότητες.

9.



10. Αν x δρχ. είναι η αξία των εξαγωγών που έγιναν «θαλασσίως» κατά το έτος 1980 έχουμε: $360^\circ \dfrac{x}{97.000.000.000} = 180^\circ$ ή x = 48.500.000.000 δρχ. Η αξία των εξαγωγών που έγιναν «σιδηροδρομικώς» ήταν:

$$\frac{13{,}917}{100} \cdot 97.000.000.000 = 13.499.490.000 \approx 13.500.000.000 \text{ δρχ.}$$

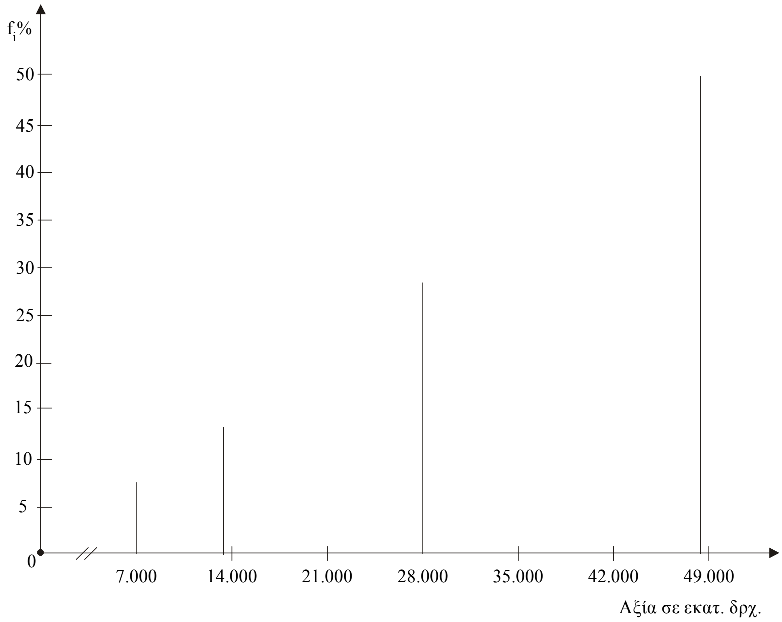
Αν y δρχ. ήταν η αξία των εξαγωγών που έγιναν «αεροπορικώς» τότε η αξία αυτών που έγιναν «οδικώς» ήταν 4y. Άρα:

y + 4y + 48.500.000.000 + 13.500.000.000 = 97.000.000.000 και

y = 7.000.000.000 δρχ.

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

Μέσο Μεταφοράς	***Θαλασσίως***	***Σιδηροδρομικώς***	***Οδικώς***	***Αεροπορικώς***	
Αξία σε εκατ. δρχ.	48.500	13.500	28.000	7.000	97.000
Σχετική συχνότητα f_i %	50	13,9	28,8	7,3	100



11.

Ήπειρος	**Έκταση**	**f_i %**
Αμερική	20,8	18
Ασία	44	38
Αφρική	30,5	27
Ευρώπη	10,5	9
Ωκεανία	9	8
	114,8	100

α) Για το κυκλικό διάγραμμα έχουμε

Αμερική: $360° \dfrac{20{,}8}{114{,}8} \approx 65°$

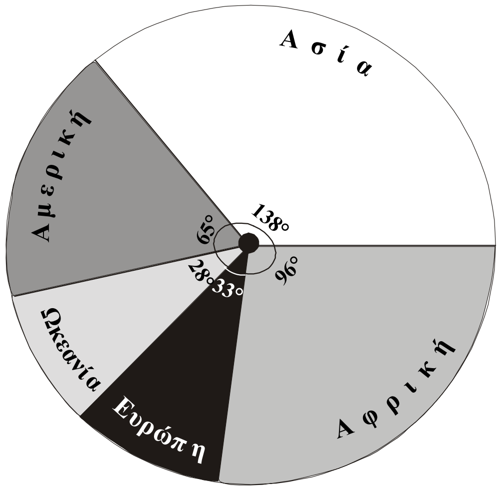
Ασία: $360° \dfrac{44}{114{,}8} \approx 138°$

Αφρική: $360° \dfrac{30{,}5}{114{,}8} \approx 96°$

Ευρώπη: $360° \dfrac{10{,}5}{114{,}8} \approx 33°$

Ωκεανία: $360° \cdot \dfrac{9}{114,8} \approx 28°$

β)

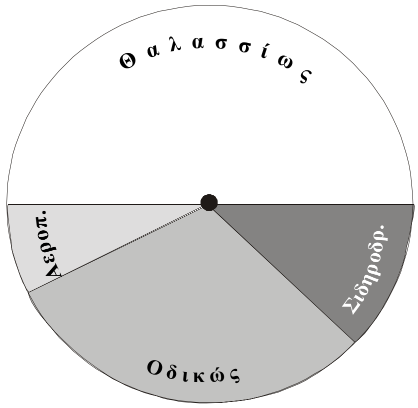


12. *Θαλασσίως:* $360° \cdot \dfrac{51.000}{102.000} = 180°$

Σιδηροδρομικώς: $360° \cdot \dfrac{11.000}{102.000} = 38,8°$

Οδικώς: $360° \cdot \dfrac{33.000}{102.000} = 116,5°$

Αεροπορικώς: $360° \cdot \dfrac{7.000}{102.000} = 24,7°$



13.

Βαθμός	ν_i	f_i %
0	0	0
1	10	3
2	20	6
3	20	6
4	30	9
5	40	13
6	50	16
7	50	16
8	40	13
9	30	9
10	30	9
	320	100

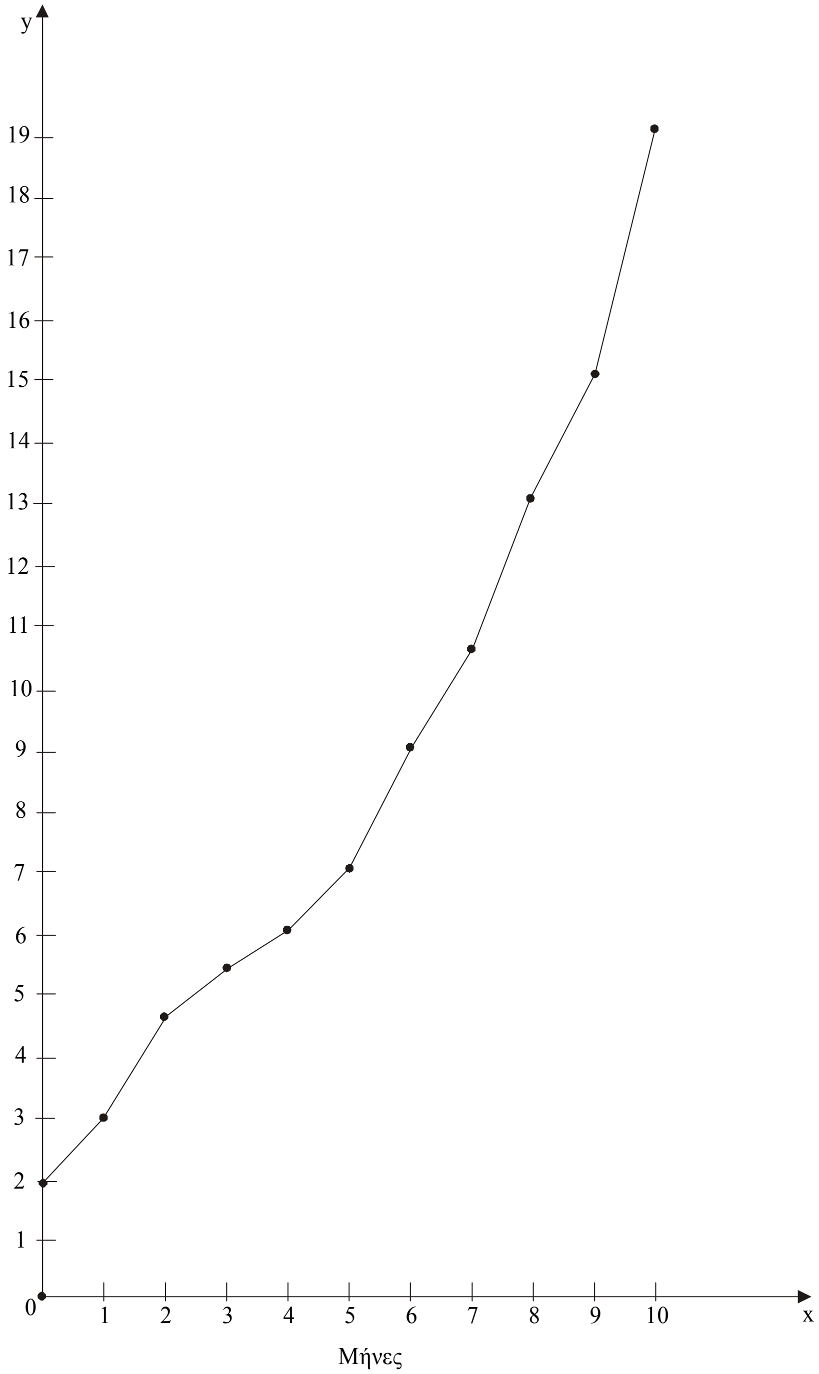
14.

Αριθμός Παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών (ν_i)	f_i %
0	5	10
1	10	20
2	15	30
3	8	16

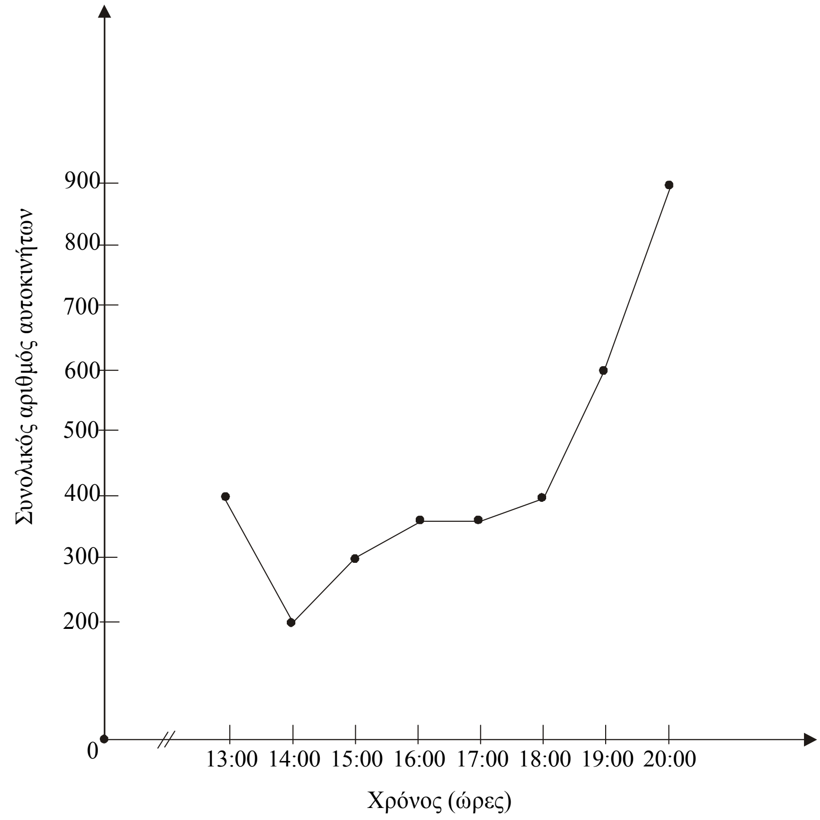
4	5	10
5	4	8
6	3	6
	50	100

Περιπτώσεις	**Αριθμός οικογενειών**	**Ποσοστό % οικογενειών**
τουλάχιστον 1 παιδί	45	90
πάνω από 3 παιδιά	12	27
από 3 έως και 5 παιδιά	17	34
το πολύ 6 παιδιά	50	100
ακριβώς 6 παιδιά	3	6

15.



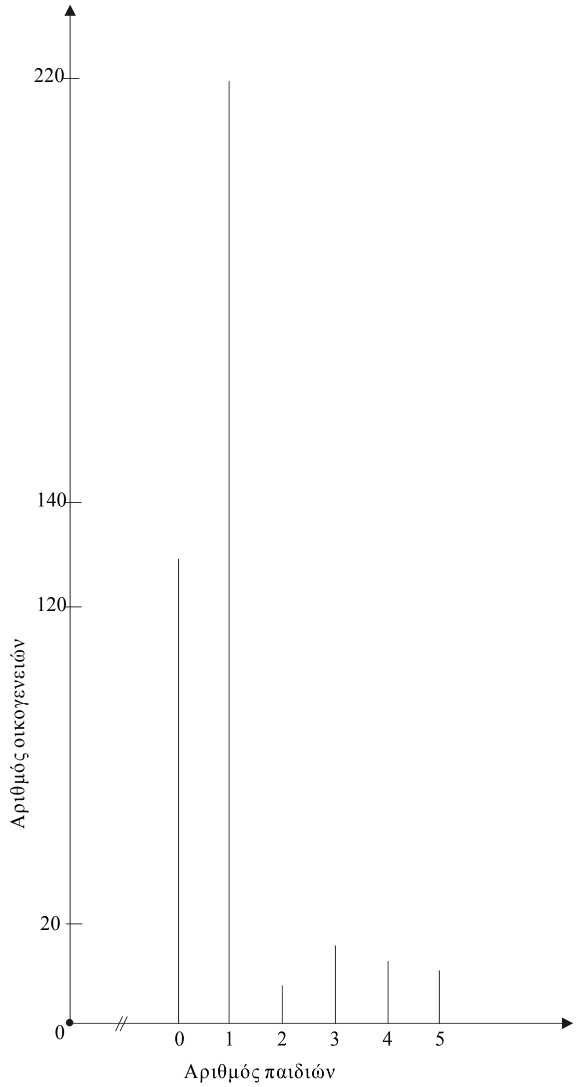
16.



17. α)

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός οικογενειών (v_i)**	**f_i**	**f_i%**	**$v_i x_i$**	**N_I**
0	135	0,338	34	0	135
1	220	0,55	55	220	355
2	8	0,02	2	16	363
3	15	0,037	4	45	378
4	12	0,03	3	48	390
5	10	0,025	2	50	400
	400	1	100	379	

β)



γ) i) $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i x_i}{\nu} = \dfrac{379}{400} \approx 0{,}947 \approx 1$

ii) Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της 200ης και 201ης παρατήρησης αν τις διατάξουμε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη, άρα $\delta = \dfrac{1+1}{2} = 1$

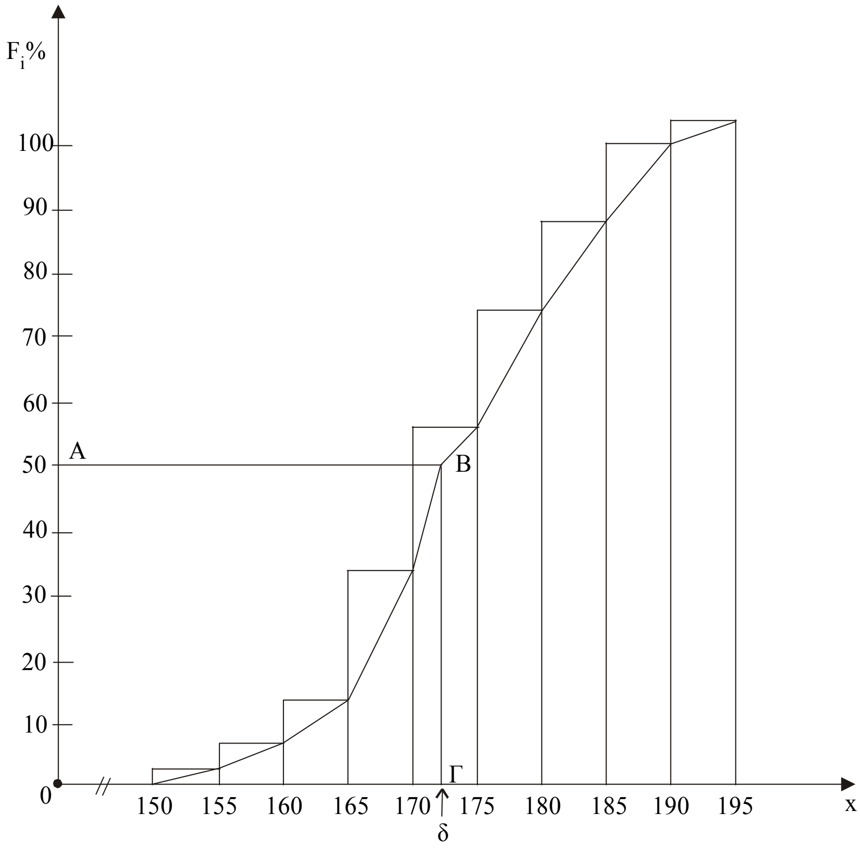
18. Το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων σ' ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων θα πρέπει να ισούται με 100. Το εμβαδό του πρώτου ορθογωνίου είναι $E_1 = (1 - 0) \cdot 10 = 10$.

Του τρίτου ορθογωνίου είναι $E_3 = (5 - 3) \cdot 15 = 30$ και του τέταρτου ορθογωνίου είναι $E_4 = (6 - 5) \cdot 20 = 20$. Άρα το εμβαδό του δεύτερου ορθογωνίου θα είναι $E_2 = 100 - (10 + 30 + 20) = 100 - 60 = 40$. Επειδή το πλάτος του είναι $3 - 1 = 2$, το ύψος του θα είναι 20.

19. **α)** Αν διατάξουμε τα αναστήματα κατά αύξουσα τάξη, βρίσκουμε ότι η διάμεσος δ είναι η 21^{η} παρατήρηση και άρα δ = 172 cm.

β)

Ανάστημα (σε cm)	ν_i	f_i %	F_i %
[150 - 155)	1	2,5	2,5
[155 - 160)	2	4,8	7,3
[160 - 165)	3	7,4	14,7
[165 - 170)	8	19,5	34,2
[170 - 175)	10	24,3	58,5
[175 - 180)	7	17,1	75,6
[180 - 185)	6	14,6	90,2
[185 - 190)	3	7,3	97,5
[190 - 195)	1	2,5	100
	41	100	



Στην κλάση που βρίσκεται η διάμεσος δ όπως και στις υπόλοιπες κλάσεις υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.
Για τον υπολογισμό γραφικά της διαμέσου πάμε στο σημείο Α που είναι το 50% των παρατηρήσεων και φέρνουμε ΑΒ//Οx και ΒΓ $\perp$ Οx. Στο σημείο Γ αντιστοιχεί η διάμεσος δ των παρατηρήσεων που είναι $\delta \approx 173$.

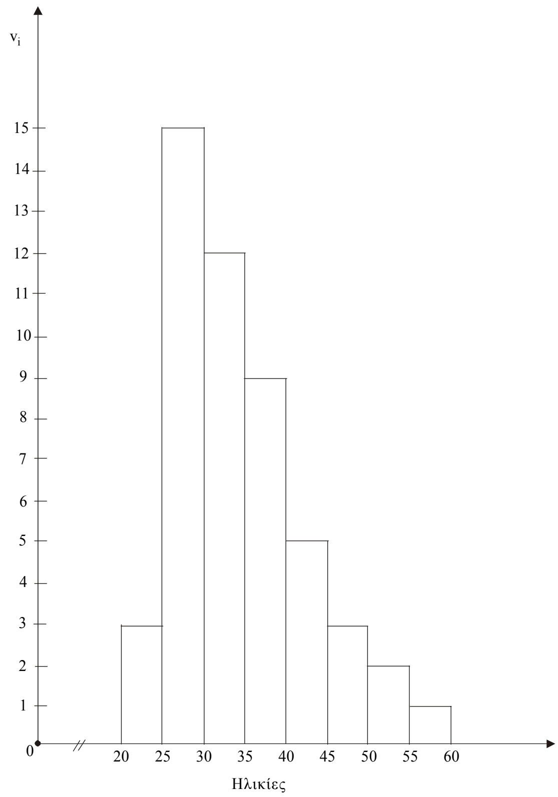
γ) Μετά τον υπολογισμό γραφικά της διαμέσου από το διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων κάνοντας ομαδοποίηση έχουμε μια απόκλιση 1 cm από την πραγματική τιμή της διαμέσου.

20. α)

Ηλικίες [α, β)	ν_i
[20 - 25)	3
[25 - 30)	15
[30 - 35)	12
[35 - 40)	9
[40 - 45)	5
[45 - 50)	3
[50 - 55)	2
[55 - 60)	1
	50

β) i) 6 υπάλληλοι ii) 30 υπάλληλοι.

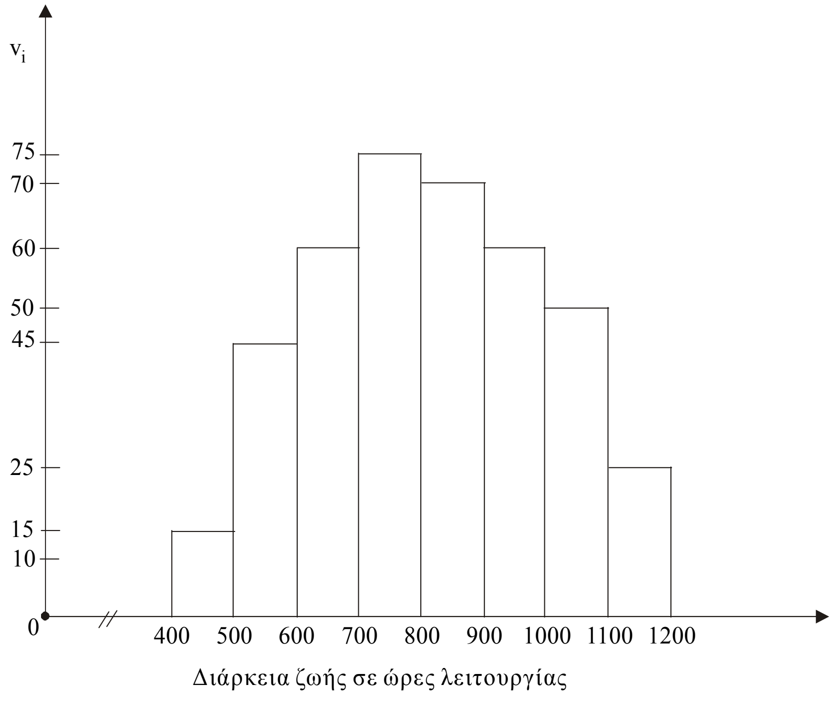
γ)



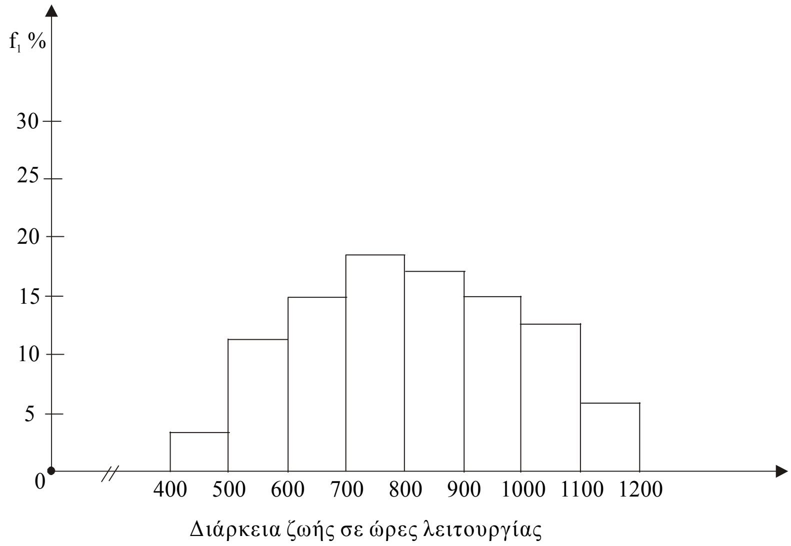
21. α)

Διάρκεια ζωής σε ώρες	ν_i	f_i %	N_i	F_i %
[400, 500)	15	3,75	15	3,75
[500, 600)	45	11,25	60	15
[600, 700)	60	15	120	30
[700, 800)	75	18,75	195	48,75
[800, 900)	70	17,5	265	66,25
[900, 1000)	60	15	325	81,25
[1000, 1100)	50	12,5	375	93,75
[1100, 1200)	25	6,25	400	100
	400	100		

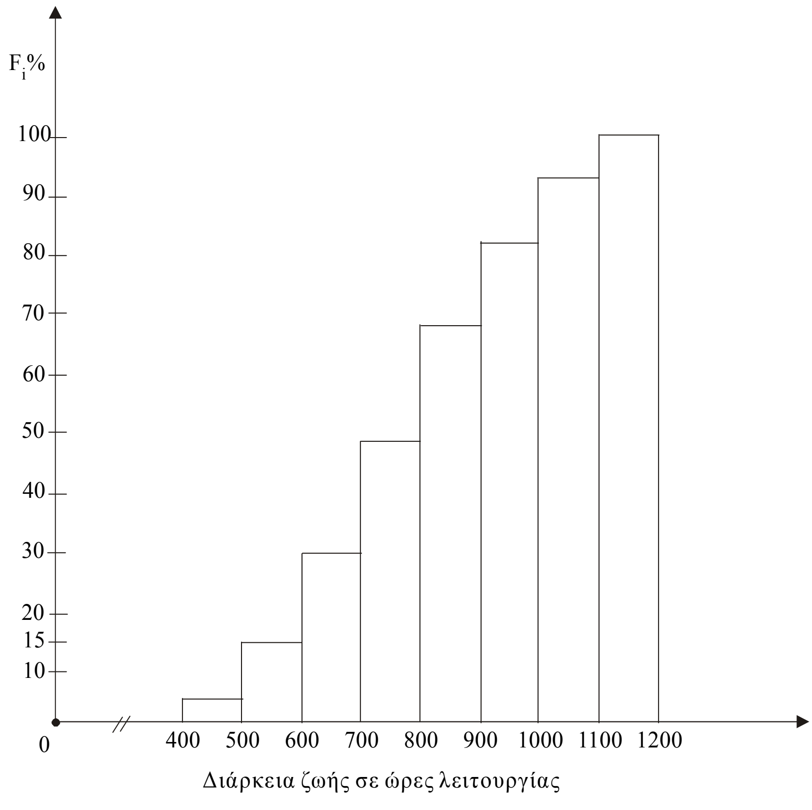
β) i)



ii)


f_i %
30
25
20
15
10
5
0
400 500 600 700 800 900 1000 1100 1200
Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας

iii)


F_i%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
15
10
0
400 500 600 700 800 900 1000 1100 1200
Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας

22. 21, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 29, 29, 29, 29, 29, 30, 30, 31, 31.

Είναι $\overline{x} = \dfrac{21 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 28 + 5 \cdot 29 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 31}{16} = \dfrac{453}{16} \approx 28{,}31.$

23.

Ηλικία σε χρόνια	**Κέντρο κλάσης x_i**	ν_i	$x_i \nu_i$
[0, 4)	2	3	6
[4, 8)	6	5	30
[8, 12)	10	6	60
[12, 16)	14	6	84
[16, 20)	18	2	36
		22	216

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \nu_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i} = \frac{216}{22} \approx 9{,}81 \text{ χρόνια.}$$

24. Οι αριθμοί είναι 3, 4, 5, 6, 11, x, 2x. Είναι $\dfrac{3+4+5+6+1+x+2x}{7} = 5$ ή

29 + 3x = 35 ή x = 2. Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 2 και 4.

25. **α)** 172, 175, 177, 183, 189, 190, 193, 195

i) $\overline{x} = \dfrac{1474}{8} = 184{,}25$

ii) $\delta = \dfrac{183+189}{2} = \dfrac{372}{2} = 186$

iii) R = 195 - 172 = 23

β) *1η περίπτωση:* Φεύγει ο 172 cm

175, 177, 183, 189, 190, 193, 195

i) $\bar{x} = \dfrac{1302}{7} = 186$

ii) $\delta = 189$

iii) $R = 195 - 175 = 20$

2η περίπτωση: Έρχεται ο 197 cm

172, 175, 177, 183, 189, 190, 193, 195, 197

i) $\bar{x} = \dfrac{1671}{9} = 185{,}66$

ii) $\delta = 189$

iii) $R = 197 - 172 = 25$

3η περίπτωση: Φεύγει ο 195 cm και έρχεται ο 198 cm

172, 175, 177, 183, 189, 190, 193, 198

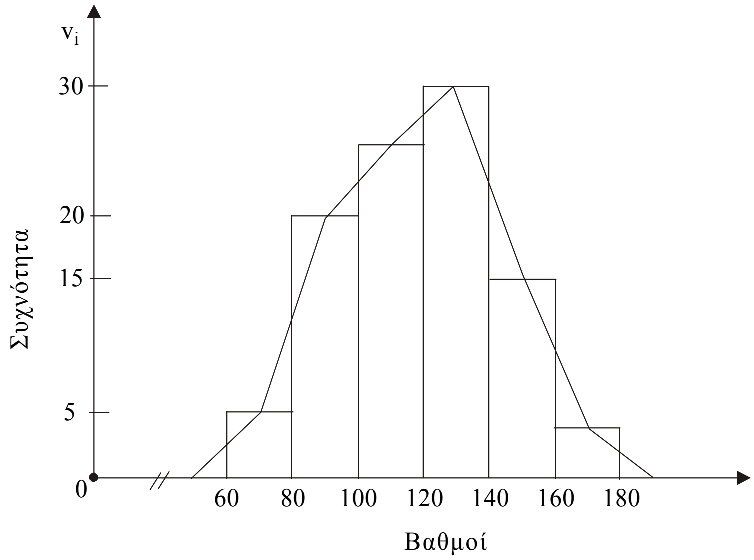
i) $\bar{x} = \dfrac{1477}{8} = 184{,}62$

ii) $\delta = \dfrac{183+189}{2} = \dfrac{372}{2} = 186$

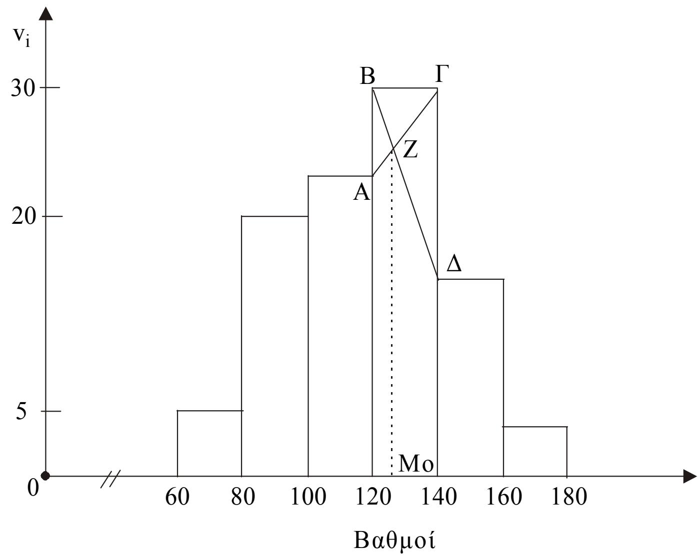
iii) $R = 198 - 172 = 26$

26. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} = \dfrac{38 \cdot 1 + 67 \cdot 2 + 43 \cdot 2 + 72 \cdot 3}{1+2+2+3} = \dfrac{474}{8} = 59{,}25 \approx 59$

27) α)



β)



Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται ως η τετμημένη του σημείου τομής Ζ των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Κατά προσέγγιση η κορυφή (επικρατέστερο ύψος) είναι $M_O \approx 126$.

28. 13, 9, 6, 10, 15, 12, 11, 0, 20, 14

α) $\overline{x} = \dfrac{110}{10} = 11$

β) $s^2 = \dfrac{1}{10}\ [(13 - 11)^2 + (9 - 11)^2 + (6 - 11)^2 + (10 - 11)^2 + (15 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (0 - 11)^2 + (20 - 11)^2 + (14 - 11)^2] = \dfrac{1}{10}\,(4 + 4 + 25 + 1 + 16 + 1 + 121 + 81 + 9) = \dfrac{262}{10} = 26{,}2$

γ) $s = \sqrt{26{,}2} \approx 5{,}11$

δ) $\delta = \dfrac{11+12}{2} = 11{,}5$

ε) Το Q_1 είναι η διάμεσος των 0, 6, 9, 10, 11. Άρα $Q_1 = 9$

$Q_2 = \delta = 11{,}5$

Το Q_3 είναι η διάμεσος των 12, 13, 14, 15, 20. Άρα $Q_3 = 14$

στ) $Q_3 - Q_1 = 5$

ζ) $R = 20$

η) $CV = \dfrac{5{,}11}{11}\ 100\% \approx 46\%$.

29. α)

Κλάσεις	**Κέντρο κλάσης (x_i)**	**ν_i**	**$x_i\nu_i$**	**$x_i - \overline{x}$**	**$(x_i - x)^2$**	**$\nu_i\,(x_i - \overline{x})^2$**
[4, 6)	5	7	35	- 6	36	252
[6, 8)	7	13	91	- 4	16	208
[8, 10)	9	17	153	- 2	4	68
[10, 12)	11	18	198	0	0	0
[12, 14)	13	29	377	2	4	116
[14, 16)	15	11	165	4	16	176
[16, 18)	17	5	85	6	36	180
	ΣΥΝΟΛΑ	100	1104			1000

β) i) $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i} = \dfrac{1104}{100} = 11{,}04 \approx 11$

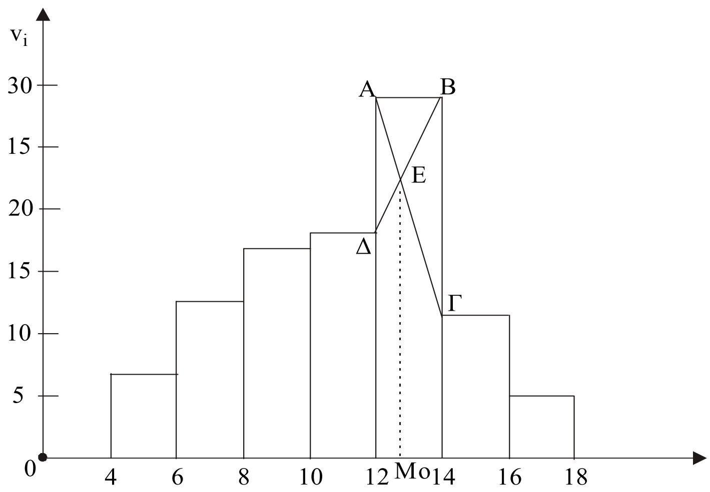
ii) $s^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i\,(x_i - \bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i} = \dfrac{1000}{100} = 10$

iii) $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

iv) $CV = \dfrac{s}{\bar{x}}\ 100\% = \dfrac{3{,}16}{11{,}04}\ 100\% \approx 29\%$

γ)

δ)



Mo ≅ 12,8

30.

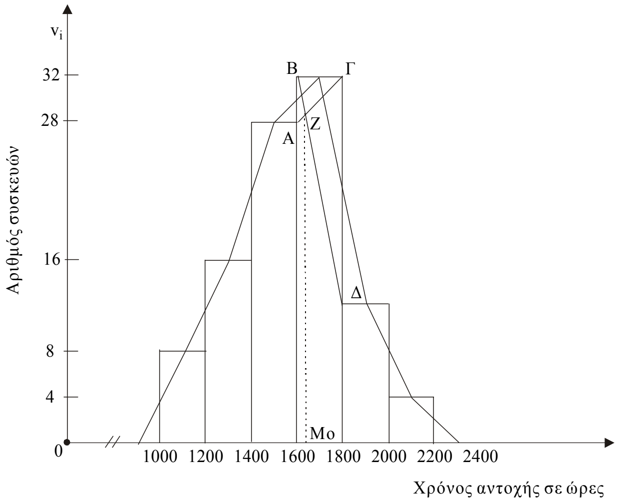
Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	x_i^2	$x_i\ \nu_i$	$x_i^2\ \nu_i$
[30, 35)	32,5	8	1056,25	260	8450
[35, 40)	37,5	10	1406,25	375	14062,5
[40, 45)	42,5	16	1806,25	680	28900
[45, 50)	47,5	15	2256,25	712,5	33843,75
[50, 55)	52,5	10	2756,25	525	27562,5
[55, 60)	57,5	8	3306,25	460	26450
[60, 65)	62,5	3	3906,25	187,5	11718,75
ΣΥΝΟΛΑ		70		3200	150987,5

β) i) $\overline{x} \approx 46$ χιλ. ii) $s^2 = 67$ iii) $s \approx 8{,}5$ iv) CV = 17,39%

31. α)

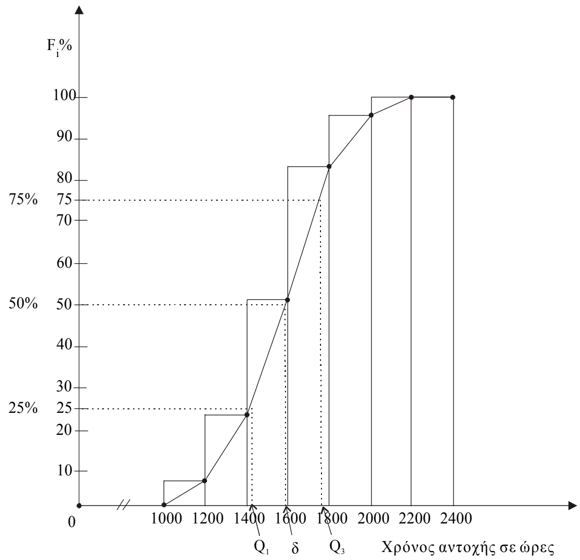
Χρόνος αντοχής σε ώρες	Αριθμός συσκευών	f_i %	F_i %
[1000, 1200)	8	8	8
[1200, 1400)	16	16	24
[1400, 1600)	28	28	52
[1600, 1800)	32	32	84
[1800, 2000)	12	12	96
[2000, 2200)	4	4	100
[2200, 2400)	0	0	0
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

β) i)



ii) Η επικρατούσα τιμή είναι η τετμημένη του σημείου τομής Ζ των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Κατά προσέγγιση είναι $M_0 \approx 1630$ αφού έχουμε υποθέσει ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα.

γ) i)



ii) $\delta \approx 1580$

iii) $Q_1 \approx 1420$, $Q_3 \approx 1740$

δ) 52 είναι οι συσκευές που έχουν διάρκεια αντοχής μικρότερη από τη μέγιστη συχνότητα.

32. α) $\left.\begin{array}{r} x + y + 5 = 75 \\ \dfrac{10x + 20y + 150}{75} = 12 \end{array}\right\}$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει x = 65 και y = 5.

β) i) $s^2 = \dfrac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = 29{,}333$

ii) $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{5{,}42}{12}$

33. Αφού η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{\dfrac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2}$ είναι ίση με μηδέν, έπεται

$s^2 = \dfrac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2 = 0$ ή $\sum\limits_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2 = 0$. Άρα $t_1 - \bar{x} = 0$, $t_2 - \bar{x} = 0$, …,

$t_\nu - \bar{x} = 0$ ή $t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = \bar{x}$.

34. $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = 3$ και $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$

α) $\sum\limits_{i=1}^{5} (x_i + 10) = (x_1 + 10) + (x_2 + 10) + (x_3 + 10) + (x_4 + 10) + (x_5 + 10) =$

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5 \cdot 10 = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i + 50 = 3 + 50 = 53$

β) $\sum\limits_{i=1}^{5} (2x_i + 3)^2 = \sum\limits_{i=1}^{5} (4x_i^2 + 12x_i + 9) = 4 \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 + 12 \sum\limits_{i=1}^{5} x_i + 5 \cdot 9 =$

$4 \cdot 23 + 12 \cdot 3 + 45 = 92 + 36 + 45 = 173$

35. α) i) $\overline{y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} y_i}{\nu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} (x_i + 2)}{\nu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} 2}{\nu} = \overline{x} + 2$

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i + 2 - \overline{x} - 2)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2 = s_x^2 .$$

Άρα $s_y = s_x$.

ii) $\overline{y} = \overline{x} + c$, $s_y = s_x$.

β) Από τις παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά c μονάδες, τότε η μέση τιμή αυξάνεται κατά c και η διακύμανση μένει αμετάβλητη.

36. α) $\overline{x + \lambda} = \dfrac{(t_1 + \lambda) + (t_2 + \lambda) + \ldots + (t_\nu + \lambda)}{\nu} = \dfrac{(t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu) + \nu\lambda}{\nu} =$

$\dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} + \dfrac{\nu\lambda}{\nu} = \overline{x} + \lambda$

β) Όμοια $\overline{x - \lambda} = \dfrac{(t_1 - \lambda) + (t_2 - \lambda) + \ldots + (t_\nu - \lambda)}{\nu} = \ldots = \overline{x} - \lambda$

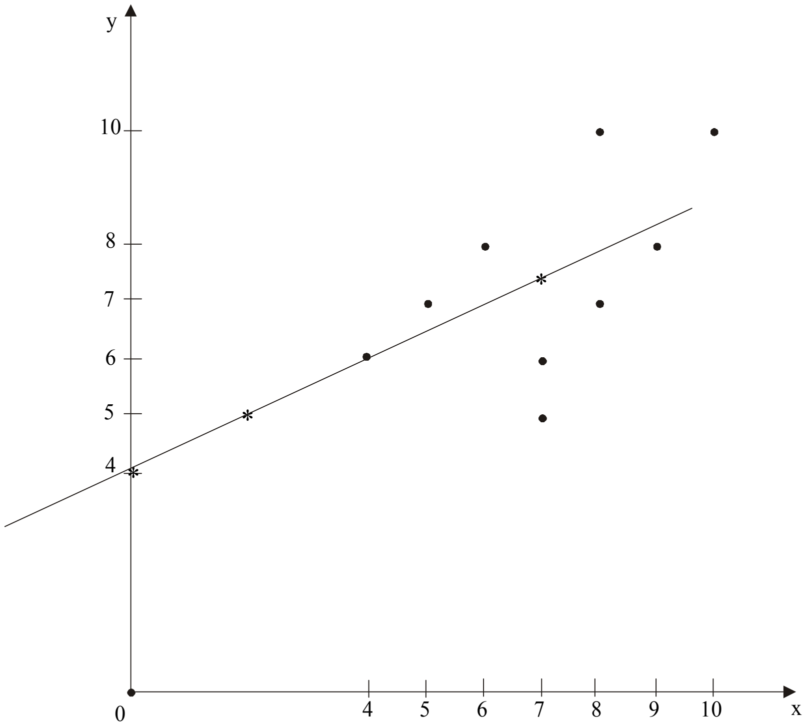
γ) $\overline{x \cdot \lambda} = \dfrac{\lambda t_1 + \lambda t_2 + \ldots + \lambda t_\nu}{\nu} = \dfrac{\lambda (t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu)}{\nu} = \lambda \overline{x}$

δ) $\overline{\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)} = \dfrac{\dfrac{t_1}{\lambda} + \dfrac{t_2}{\lambda} + \ldots + \dfrac{t_\nu}{\lambda}}{\nu} = \dfrac{1}{\lambda} \left(\dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} \right) = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \overline{x}$

ε) $\overline{\lambda x + \kappa} = \dfrac{(\lambda t_1 + \kappa) + (\lambda t_2 + \kappa) + \ldots + (\lambda t_\nu + \kappa)}{\nu} = \dfrac{\lambda (t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu)}{\nu} +$

$+ \dfrac{\nu\kappa}{\nu} = \lambda \overline{x} + \kappa$

37. α) γ)



β)

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	x^2	**xy**	y^2
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
$\Sigma x = 70$	$\Sigma y = 75$	$\Sigma x^2 = 520$	$\Sigma xy = 540$	$\Sigma y^2 = 587$

$\overline{y} = \frac{75}{10} = 7{,}5, \quad \overline{x} = \frac{70}{10} = 7$

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{10 \cdot 540 - 70 \cdot 75}{10 \cdot 520 - (70)^2} = \frac{5400 - 5250}{5200 - 4900} =$$

$= \frac{150}{300} = 0{,}5$ και $\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 7{,}5 - 0{,}5 \cdot 7 = 7{,}5 - 3{,}5 = 4$, άρα $\hat{y} = 4 + 0{,}5x$

38. α)

x	**y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma x = 56$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma x^2 = 524$	$\Sigma xy = 364$	$\Sigma y^2 = 256$

β) $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} y_i}{\nu} = \frac{40}{8} = 5$

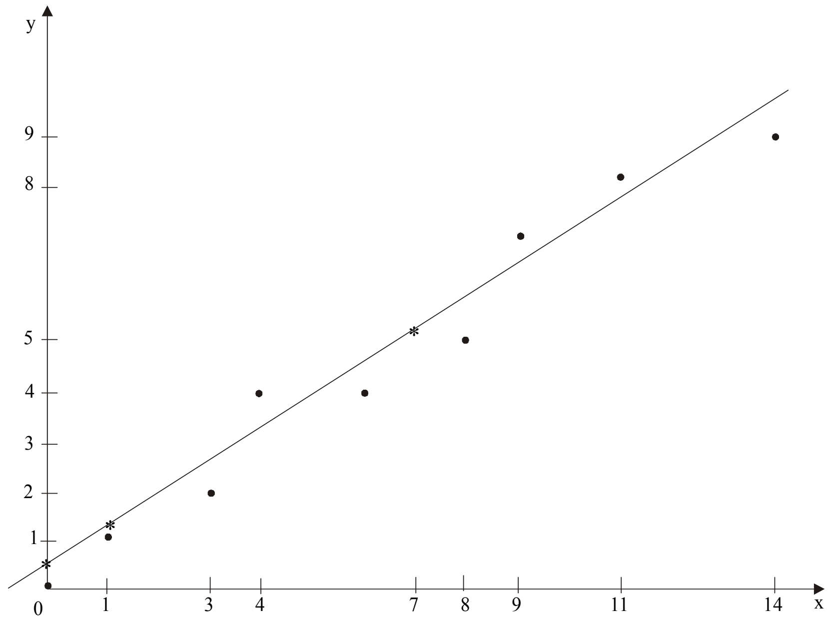
$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \frac{56}{8} = 7$

$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \sum_{i=1}^{\nu} y_i}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{8 \cdot 364 - 56 \cdot 40}{8 \cdot 524 - (56)^2} = \frac{2912 - 2240}{4192 - 3136} =$

$\frac{672}{1056} = 0,636$

$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 5 - 0,636 \cdot 7 = 0,548$. Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 0,548 + 0,636x$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης 0,636 και διέρχεται από το σημείο (7, 5).

γ)



δ) Όταν x = 12 τότε $y = 0,548 + 0,636 \cdot 12 = 0,548 + 7,632 = 8,18 \approx 8$

39. α)

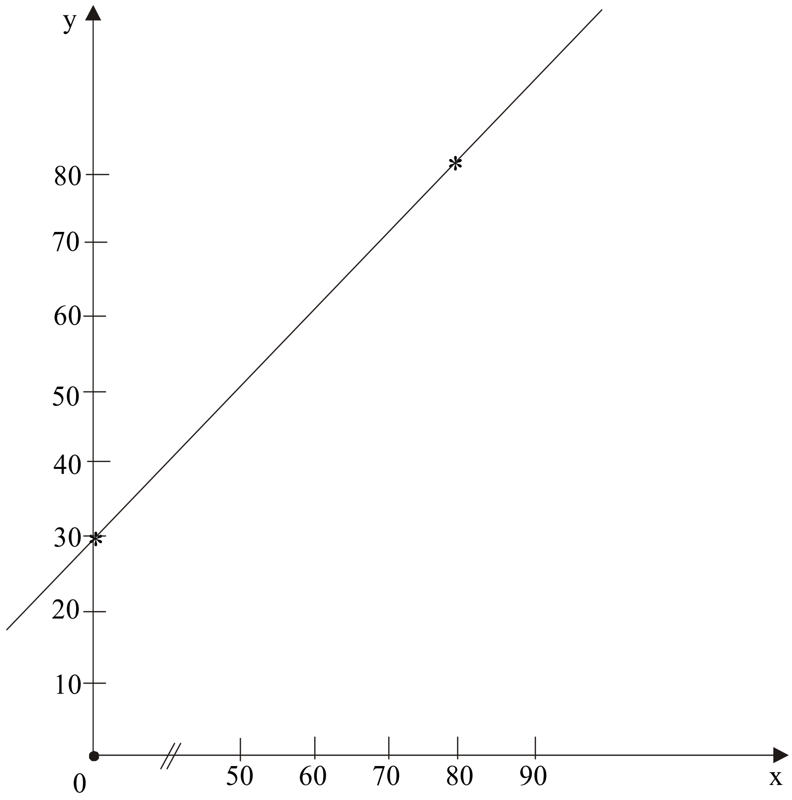
Άλγεβρα (x)	**Γεωμετρία (y)**	**x^2**	**xy**	**y^2**
75	82	5625	6150	6724
80	78	64000	6240	6084
93	86	8649	7998	7396
65	72	4225	4680	5184
87	91	7569	7917	8281
71	80	5041	5680	6400
98	95	9604	9310	9025
68	72	4624	4896	5184
84	89	7056	7476	7921
77	74	5929	5698	5476
Σx = 798	Σxy = 819	$\Sigma x^2 = 64722$	Σxy = 66045	$\Sigma y^2 = 67675$

$$\overline{y} = \frac{819}{10} = 81{,}9 \qquad \overline{x} = \frac{798}{10} = 79{,}8$$

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{\nu} y_i}{\nu \sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{10 \cdot 66045 - 798 \cdot 819}{10 \cdot 64722 - (798)^2} =$$

$$\frac{660450 - 653562}{647220 - 636803} = \frac{6888}{10417} = 0{,}66 \text{ και}$$

$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 81{,}9 - 0{,}66 \cdot 79{,}8 = 81{,}9 - 52{,}67 = 29{,}23$. Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 29{,}23 + 0{,}66x$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης 0,66 και διέρχεται από το σημείο (79,8, 81,9).



β) Για x = 72 έχουμε: $y = 29{,}23 + 0{,}66 \cdot 72 = 76{,}75 \approx 77$

40. $\Sigma x = 45$, $\Sigma y = 40$, $\Sigma xy = 364$, $\Sigma x^2 = 524$, $\Sigma y^2 = 256$

α) $r = \dfrac{\nu\, \Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\nu\, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\, \sqrt{\nu\, \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}} = \dfrac{8 \cdot 364 - 56 \cdot 40}{\sqrt{8 \cdot 524 - (56)^2}\, \sqrt{8 \cdot 256 - (40)^2}} =$

$= \dfrac{2912 - 2240}{\sqrt{4192 - 3136}\, \sqrt{2048 - 1600}} = \dfrac{672}{\sqrt{1056}\, \sqrt{448}} = \dfrac{672}{32{,}49 \cdot 21{,}16} = \dfrac{672}{687{,}48}$

$= 0{,}977$

β) Οι x, y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

41.

	x	y	x - $\bar{x}$	y - $\bar{y}$	(x - $\bar{x}$)^2	(y - $\bar{y}$)^2	(x - $\bar{x}$) (y - $\bar{y}$)
	35	102	- 9	5	81	25	- 45
	39	100	- 5	3	25	9	- 15
	41	97	- 3	0	9	0	0
	43	97	- 1	0	1	0	0
	40	98	- 4	1	16	1	- 4
	53	100	9	3	81	9	27
	50	97	6	0	36	0	0
	49	91	5	- 6	25	36	- 30
	40	94	- 4	- 3	16	9	12
	50	94	6	- 3	36	9	- 18
Σύνολα	440	970			326	98	- 73

α) $r = \dfrac{\Sigma\,(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}\,\sqrt{\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}} = \dfrac{-73}{\sqrt{326}\,\sqrt{98}} = \dfrac{-73}{178{,}74} \approx -0{,}4$

β) Τα x και y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένα.

γ) Επειδή υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής των χρεογράφων και της τιμής των ομολογιών σημαίνει ότι όταν η τιμή των χρεογράφων πέφτει η τιμή των ομολογιών ανεβαίνει.

42. α)

x	y	x^2	xy	y^2
2	18	4	36	324
4	12	16	48	144
5	10	25	50	100
6	8	36	48	64
8	7	64	56	49
11	5	121	55	25
Σx = 36	Σxy = 60	Σx^2 = 266	Σxy = 293	Σy^2 = 706

$$r = \frac{6 \cdot 293 - 36 \cdot 60}{\sqrt{6 \cdot 266 - (36)^2}\,\sqrt{6 \cdot 706 - (60)^2}} = \frac{1728 - 2160}{\sqrt{1596 - 1296}\,\sqrt{4236 - 3600}} =$$

$$\frac{-402}{\sqrt{300}\,\sqrt{636}} = \frac{-402}{436{,}8} = -0{,}92$$

β) Αν $x' = 2x + 6$ και $y' = 3y - 15$ τότε:

x′	**y′**	**x′²**	**x′y′**	**y′²**
10	39	100	390	1521
14	21	196	294	441
16	15	256	240	225
18	9	324	162	81
22	6	484	132	36
28	0	784	0	0
$\Sigma x' = 108$	$\Sigma x'y' = 90$	$\Sigma x'^2 = 2144$	$\Sigma x'y' = 1218$	$\Sigma y'^2 = 2304$

$$r' = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x'_i y'_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x'_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y'_i\right)}{\sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}\,\sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)^2}} =$$

$$\frac{6 \cdot 1218 - 108 \cdot 90}{\sqrt{6 \cdot 2144 - (108)^2}\,\sqrt{6 \cdot 2304 - (90)^2}} = \frac{7308 - 9720}{\sqrt{12864 - 11664}\,\sqrt{13824 - 8100}} =$$

$$\frac{-2412}{\sqrt{1200}\,\sqrt{5724}} = \frac{-2412}{2620{,}83} = -0{,}92$$

43.

Ηλικία (x)	**Πίεση αίματος (y)**	**x^2**	**xy**	**y^2**
56	17	3136	952	289
42	12	1764	504	144
72	14	5184	1008	196
36	10	1296	360	100
63	13	3969	819	169
47	09	2209	423	81
55	11	3025	605	121
49	08	2401	392	64
38	11	1444	418	121
60	15	3600	900	225
Σx = 518	Σxy = 120	$\Sigma x^2 = 28028$	Σxy = 6381	$\Sigma y^2 = 1510$

α) $$r = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}\sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)^2}} =$$

$$\frac{10 \cdot 6381 - 518 \cdot 120}{\sqrt{10 \cdot 28028 - (518)^2}\sqrt{10 \cdot 1510 - (120)^2}} =$$

$$\frac{63810 - 62160}{\sqrt{280280 - 268324}\sqrt{15100 - 14400}} = \frac{1650}{\sqrt{11956}\sqrt{700}} = \frac{1650}{2892{,}95} = 0{,}57$$

β) $\bar{y} = \dfrac{120}{10} = 12 \qquad \bar{x} = \dfrac{518}{10} = 51,8$

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x}$$

$\hat{\beta} = \dfrac{10\cdot 6381 - 518\cdot 120}{10\cdot 28028 - (518)^2} = \dfrac{63810 - 62160}{280280 - 268324} = \dfrac{1650}{11956} = 0,138$ και

$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 12 - 0,138\cdot 51,8 = 12 - 7,148 = 4,852$. Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 4,852 + 0,138x$.

γ) Για x = 45 έχουμε: $y = 4,852 + 0,138\cdot 45 = 4,852 + 6,21 = 11,062$. Άρα η πίεση γυναίκας ηλικίας 45 ετών είναι περίπου 11 cm Hg.

44. α)

	x	**y**	**$x - \bar{x}$**	**$y - \bar{y}$**	**$(x - \bar{x})^2$**	**$(y - \bar{y})^2$**	**$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$**
	1	2,5	- 2	- 1,5	4	2,25	3
	1	4,0	- 2	0	4	0	0
	2	3,0	- 1	- 1	1	1	1
	3	4,5	0	0,5	0	0,25	0
	3	4,0	0	0	0	0	0
	4	3,5	1	- 0,5	1	0,25	- 0,5
	7	6,5	4	2,5	16	6,25	10
Σύνολα	21	28	0	0	26	10	13,5

β) $x - \bar{x} = 4$ ή $7 - \bar{x} = 4$ ή $\bar{x} = 3$

$y - \bar{y} = 2,5$ ή $6,5 - 2,5 = \bar{y}$ ή $\bar{y} = 4$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{7} \text{ άρα } 3 = \frac{\Sigma x}{7} \text{ ή } \Sigma x = 21$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{7} \text{ ή } 4 = \frac{\Sigma y}{7} \text{ ή } \Sigma y = 28$$

$$r = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{13{,}5}{\sqrt{26}\sqrt{10}} = \frac{13{,}5}{\sqrt{260}} = \frac{13{,}5}{16{,}12} \approx 0{,}83$$

45. α)

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
$\Sigma x = 70$	$\Sigma y = 75$	$\Sigma x^2 = 520$	$\Sigma xy = 540$	$\Sigma y^2 = 587$

β) $$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{10 \cdot 540 - 70 \cdot 75}{\sqrt{10 \cdot 520 - (70)^2} \sqrt{10 \cdot 587 - (75)^2}} =$$

$$\frac{5400 - 5250}{\sqrt{5200 - 4900} \sqrt{5870 - 5625}} = \frac{150}{\sqrt{300}\sqrt{245}} = \frac{150}{271{,}1} \approx 0{,}55$$

Θετικά γραμμικά συσχετισμένες γιατί $0 < 0{,}55 < 1$.

3ο Κεφάλαιο	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1	Σ	**10**	Σ	**19**	Λ	**28**	Σ	**viii**	Σ	**32**	Σ	**41**	Λ	**50**	Σ
2	Σ	**11**	Λ	**20**	Λ	**29**	Λ	**ix**	Λ	**33**	Λ	**42**	Σ	**51**	Λ
3	Σ	**12**	Σ	**21**	Σ	**30 i**	Λ	**x**	Λ	**34**	Σ	**43**	Σ	**52**	Λ
4	Σ	**13**	Λ	**22**	Λ	**ii**	Σ	**xi**	Σ	**35**	Σ	**44**	Σ	**53**	Σ
5	Σ	**14**	Σ	**23**	Σ	**iii**	Σ	**xii**	Σ	**36**	Σ	**45**	Λ	**54**	Λ
6	Σ	**15**	Λ	**24**	Σ	**iv**	Λ	**xiii**	Λ	**37**	Λ	**46**	Σ		
7	Σ	**16**	Σ	**25**	Λ	**v**	Σ	**xiv**	Σ	**38**	Σ	**47**	Σ		
8	Σ	**17**	Λ	**26**	Σ	**vi**	Σ	**xv**	Σ	**39**	Σ	**48**	Λ		
9	Σ	**18**	Λ	**27**	Σ	**vii**	Σ	**31**	Σ	**40**	Σ	**49**	Σ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1	Β	**5**	Δ	**9**	Ε	**13**	Γ	**17**	Β	**21**	Β	**25**	Α	**39**	Ε
2	Α	**6**	Γ	**10**	Γ	**14**	Δ	**18**	Γ	**22**	Β	**26**	Ε		
3	Δ	**7**	Ε	**11**	Β	**15**	Ε	**19**	Ε	**23**	Ε	**27**	Δ		
4	Α	**8**	Δ	**12**	Ε	**16**	Γ	**20**	Δ	**24**	Ε	**28**	Ε		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	VI	5	VII
2	V	6	VIII
3	IV	7	IX
4	I	8	X
		9	XI

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1.

Γραφή σε γλώσσα συνόλου	***Γραφή σε φυσική γλώσσα***	***μέρος του σχήματος***
$A \cap B$	Α τομή Β	II
B'	Συμπλήρωμα του Β	IV + I
$A \cup B$	Α ένωση Β	I + II + III
A'	Συμπλήρωμα του Α	III + IV
$A - B$	Α μείον Β	I
$B - A$	Β μείον Α	III
$A \cap B'$	Α τομή συμπλήρωμα Β	I
$A' \cap B$	Α συμπλήρωμα τομή Β	III

2.

Α	Β	Γ
$A \cup A = A$	Σ	
$A \cup \varnothing = A$	Σ	
$A \cap A = \varnothing$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = A$	Λ	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A' \cap A = \Omega$	Λ	$A' \cap A = \varnothing$
$A' \cup A = \varnothing$	Λ	$A' \cup A = \Omega$
$\Omega' = \Omega$	Λ	$\Omega' = \varnothing$
$(A')' = \Omega$	Λ	$(A')' = A$
$A \cap B = B \cap A$	Σ	
$A \cap B = B \cup A$	Λ	$A \cap B = B \cap A$
$\varnothing' = \Omega$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$	Σ	
$A' \cup A = \Omega$	Σ	
$A' \cap A = \varnothing$	Σ	
$(A')' = A$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$	Σ	

3.

Μεταθέσεις των α, β, γ	
αβγ	βγα
αγβ	γαβ
βαγ	γβα

4.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολισμός**	**Ισότητα**
Μεταθέσεις των ν πραγμάτων.	M_ν	$M_\nu = \nu!$
Διατάξεις των ν πραγμάτων ανά κ.	Δ_κ^ν	$\Delta_\kappa^\nu = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$
Συνδυασμοί των ν πραγμάτων ανά κ.	$\binom{\nu}{\kappa}$	$\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

5.

Α	**Β**
Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π (χ) αληθεύει.	Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π (χ) δεν αληθεύει.
Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π (χ) αληθεύει.	Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π(χ) δεν αληθεύει.
«…το πολύ ν φορές »	«…τουλάχιστον ν + 1 φορές »
«…τουλάχιστον ν φορές »	«…το πολύ ν-1 φορές »

6.

Α	Β	Γ
Μεταθέσεις των 3	*Συνδυασμοί των 3 ανά 2*	*Διατάξεις των 3 ανά 2*
Ο □ Δ	**Ο □**	**Ο □**
Ο Δ □	**Ο Δ**	**Ο Δ**
Δ Ο □	**□ Δ**	**□ Δ**
Δ □ Ο		**□ Ο**
□ Ο Δ		**Δ □**
□ Δ Ο		**Δ Ο**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Ω = {Κ1, Κ2, Κ3, Κ4, Κ5, Κ6, Γ1, Γ2, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6}.

2. $\boldsymbol{\Sigma_1}$ **:** Σακούλα που περιέχει 1(Μ), 1(Π), 1(Α).

$\boldsymbol{\Sigma_2}$ **:** Σακούλα που περιέχει 1(Μ), 1(Α).

α) Ω = {Σ_1Μ, Σ_1Π, Σ_1Α, Σ_2Μ, Σ_2Α}.

β) Α = {Σ_1Μ, Σ_2Μ}.

γ) Β = {Σ_1Π}.

3. α) Ω = {Κ, Π, Μ, Λ}.

β) Ω = {ΚΠ, ΚΜ, ΚΛ, ΚΚ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΛ, ΠΠ, ΜΚ, ΜΠ, ΜΛ, ΜΜ, ΛΚ, ΛΠ, ΛΜ, ΛΛ}.

γ) Ω = {ΚΠ, ΚΜ, ΚΛ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΛ, ΜΚ, ΜΠ, ΜΛ, ΛΚ, ΛΠ, ΛΜ}.

4. Είναι ασυμβίβαστα διότι η πραγματοποίηση του ενός συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου.

5. Ε: ελαττωματικό CD, Κ: μη ελαττωματικό CD.

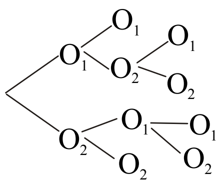
α) Ω = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ}.

β) i) Β = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ}.

ii) Γ = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ}.

iii) Δ = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ}.

6. α) $\Omega = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2, O_2O_2\}$.



β) i) $A = \{O_1O_2O_2, O_2O_1O_2\}$.

ii) $B = \{O_2O_2\}$.

iii) $\Gamma = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2\}$.

γ) 3.

δ) Είναι συμπληρωματικά.

7. α) Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}.

β) i) Α = {ΚΚ, ΚΓ}, ii) Β = {ΚΚ, ΓΚ}, iii) Γ = {ΚΓ, ΓΚ}.

γ) Όχι, διότι $A \cap B = \{KK\}$, $A \cap \Gamma = \{K\Gamma\}$, $B \cap \Gamma = \{\Gamma K\}$.

8. Αν Α = {5}, τότε Α΄ = {1, 2, 3, 4, 6} άρα $P(A) = \frac{1}{6}$ και

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

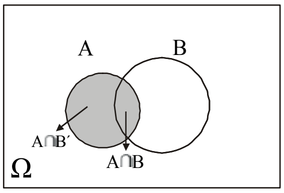
9. α) $P(A) = 1 - P(A') = \frac{1}{3}$.

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \ldots \ P(B) = \frac{2}{3}$.

10. I) α) $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$ (βλ. σχήμα).

β) $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \varnothing$ (βλ. σχήμα).

γ) Αφού $A \cap B'$ και $A \cap B$ ασυμβίβαστα,



$$P(A) = P((A \cap B') \cup (A \cap B)) = P(A \cap B') + P(A \cap B).$$

II) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

11. α) $P = \frac{1}{6 \cdot 52}$. β) $P = \frac{4}{6 \cdot 52}$.

Λύση με τον πολλαπλασιαστικό νόμο:

α) A : το ζάρι να δείξει 5. B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5 σπαθί.

A, B είναι φυσικώς ανεξάρτητα.

Άρα $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{312}$.

β) B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{312} = \frac{1}{78}$.

12. $\Omega = \left\{ \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\} \right\}$.

Φ: το ενδεχόμενο να είναι ημίτονο και συνημίτονο του ιδίου τόξου.

$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$, διότι $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$. Άρα $P(\Phi) = \frac{1}{3}$.

13. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

α) $A = \{1, 9\}$ άρα $P(A) = \frac{2}{9}$.

β) $B = \{2, 8\}$ άρα $P(B) = \frac{2}{9}$.

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ (αφού $A \cap B = \varnothing$).

δ) $\Gamma = \varnothing$ άρα $P(\Gamma) = 0$.

14. α) $P(A \cap (A' \cap B)) = P(\varnothing) = 0$ (αφού A, $A' \cap B$ ασυμβίβαστα - βλ. άσκ. 5).

β) $P(A \cup (A' \cap B)) = P(A) + P(A' \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

15. α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$.   β) $P(B) = \frac{1}{6}$.   γ) $P(\Gamma) = \frac{5}{6}$.

16. $P(A)$: η πιθανότητα να κρυολογήσουμε.

$P(A')$: η πιθανότητα να μην κρυολογήσουμε.

Έτσι $P(A) = 3P(A')$. Όμως $P(A) + P(A') = 1, \ldots, P(A) = \frac{3}{4}$.

17. A : λειτουργούν τα λεωφορεία.

B': δεν λειτουργούν τα τραίνα.

$P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$,   άρα $P(B) = 0{,}6$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα $0{,}9 = 0{,}3 + 0{,}6 - P(A \cap B)$ άρα

$P(A \cap B) = 0$.

18. Είναι βέβαιο ότι επιλέγοντας τρεις κάλτσες θα έχουμε 1 ζευγάρι του ιδίου χρώματος. Άρα η πιθανότητα είναι 1 (η άσκηση μπορεί επίσης να λυθεί ορίζοντας κατάλληλα ενδεχόμενα).

19. $\Omega = \{\{80°, 100°, 60°\}, \{80°, 100°, 20°\}, \{100°, 60°, 20°\}, \{60°, 80°, 20°\}\}$.

Η ευνοϊκή τριάδα είναι $\{100°, 60°, 20°\}$. Άρα $P = \frac{1}{4}$.

20. α) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ τότε

$P(A) = P(B)$ αλλά $A \neq B$.

β) Σωστή (άρνηση της πρότασης (α)).

γ) Σωστή, αφού αν $A = B$ τότε $N(A) = N(B)$, συνεπώς

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(B).$$

δ) Λάθος (βλέπε πρόταση (α)).

ε) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$, τότε

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Άρα $P(A) + P(B) = 1$, όμως $B \neq A' = \{3, 4\}$.

21.

	Αγόρια	***Κορίτσια***	**ΣΥΝΟΛΟ**
Άριστοι	5	3	8
Μη άριστοι	15	6	21
ΣΥΝΟΛΟ	20	9	29

Α : Να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

Β : Να είναι κορίτσι.

Γ : Να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά.

Δ: Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

α) $P(A) = \frac{21}{29}$. β) $P(B) = \frac{9}{29}$. γ) $P(\Gamma) = \frac{3}{29}$.

δ) $P(\Delta) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{29} + \frac{21}{29} - \frac{6}{29} = \frac{24}{29}$.

22. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $A' = \{1, 3, 5\}$.

Όμως $P(A) = 2P(A')$, αλλά $P(A) + P(A') = 1, \ldots, P(A') = \frac{1}{3}$.

23. Με 10! τρόπους.

24. α) Η θέση του πρώτου ψηφίου μπορεί να πληρωθεί με 9 τρόπους. Όμοια η θέση του δεύτερου και του τρίτου μπορεί επίσης να πληρωθεί με 9 τρόπους. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε 9^3 τριψήφιους αριθμούς.

β) $\Delta_3^9 = 504$.

25. α) Όλες οι δυνατές στήλες είναι $\binom{49}{6}$.

Η ευνοϊκή είναι 1, άρα $P = \dfrac{1}{\binom{49}{6}} = \dfrac{1}{13.983.816}$.

β) $P = 10 \cdot \dfrac{1}{13.983.816}$ (προσθετικός νόμος).

γ) 13.983.816.

26. $\binom{\nu}{2}$ ευθείες.

27. $\binom{\nu}{3}$ τρίγωνα.

28. $\binom{\nu}{2} - \nu = \dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγώνιοι.

29. α) $N(\Omega) = 10!$ Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ελληνικές ομάδες κατά 2! τρόπους. Στις υπόλοιπες οκτώ θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά 8! τρόπους. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $2! \cdot 8!$.

Άρα $P_\alpha = \dfrac{2! \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{45}$.

β) Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά $Δ_2^8$ τρόπους. Στις υπόλοιπες μπορούν να είναι ελληνικές και ξένες κατά 8!. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $(Δ_2^8)\cdot 8! = 56\cdot 8!$.

Άρα $P_β = \frac{56 \cdot 8!}{10!} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$.

γ) $P_γ = 1 - P_β = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$.

30. $\binom{ν}{ν} = 1$, $\binom{ν}{0} = 1$, $\binom{ν}{1} = ν$.

31. Τα 4 βιβλία Αρχαίων τοποθετούνται κατά 4! τρόπους (μεταθέσεις). Όμοια των Μαθηματικών κατά 2!, της Φυσικής κατά 3!. Οι τρεις ομάδες μπορούν να τοποθετηθούν κατά 3!. Άρα συνολικά έχουμε $3!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 3!$ τρόπους.

32. Μπορούμε να σχηματίσουμε:
9 μονοψήφιους αριθμούς, 9^2 διψήφιους,
9^3 τριψήφιους ,…, 9^9 εννεαψήφιους.
Άρα συνολικά $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 + 9^9$
(Γεωμετρική πρόοδος με λόγο 9).

33. $P = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}$.

34. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2\cdot 2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6$ δυνατές περιπτώσεις.

Ευνοϊκές 2, διότι $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$.

Άρα $P = \frac{1}{3}$.

35. α) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 8!} = 45$ τρόποι επιλογής δύο ατόμων.

Οι ευνοϊκοί είναι 5 (αφού 5 είναι τα παντρεμένα ζευγάρια).

Άρα $P_α = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

β) Υπάρχουν πέντε τρόποι επιλογής ενός άνδρα και 4 τρόποι επιλογής μιας γυναίκας που δεν είναι η σύζυγός του. Άρα $P_β = \frac{5\cdot 4}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45}$.

γ) $P_γ = 1 - P_α - P_β = \frac{4}{9}$.

36. α) $P(M) = P(M|Σ_1)\cdot P(Σ_1) + P(M|Σ_2)\, P(Σ_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$

$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

β) $P(A) = P(A|Σ_1)\cdot P(Σ_1) + P(A|Σ_2)\, P(Σ_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.

γ) $P(Π) = P(Π|Σ_1)\cdot P(Σ_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

37. Α : ο σύζυγος ζει το 2010, Β : η σύζυγος ζει το 2010.

Θεωρούνται ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ζητούμε $P(A' \cap B) = P(A')\cdot P(B) = \frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10} = \frac{24}{100} = 24\%$.

38. Αφού Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$ άρα $P(A \cap B) = 0$. **(1)**

Αν ήταν ανεξάρτητα, θα έπρεπε $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Τότε όμως $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$ **(2)** λόγω της **(1),**

αλλά $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ (αφού A, B δεν είναι αδύνατα ενδεχόμενα),

άρα η **(2)** είναι αδύνατη , άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

39. α) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$

β) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)}.$

40. α) A : είναι καπνιστής, $P(A) = \dfrac{50}{200} = 25\%.$

β) B : έχει προβλήματα υγείας, $P(B) = \dfrac{40}{200} = 20\%.$

γ) Γ : είναι καπνιστής χωρίς προβλήματα υγείας, $P(\Gamma) = \dfrac{30}{200} = 15\%.$

δ) $A \cap B$: είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας, $P(A \cap B) = \dfrac{20}{200} = 10\%.$

ε) E : έχει προβλήματα υγείας **δεδομένου** ότι είναι καπνιστής.

Με χρήση του πίνακα υπάρχουν 20 καπνιστές με προβλήματα υγείας σε σύνολο 50 καπνιστών. Άρα $P(E) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

ή $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{20}}{\frac{5}{20}} = 0{,}4.$

41. α) Η πιθανότητα να βρέξει την 1η επόμενη μέρα είναι $P = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}.$

Είναι όμως δυνατό να βρέξει τη 2η μέρα **ή** την 3η μέρα. Άρα η πιθανότητα βροχής την 1η **ή** την 2η **ή** την 3η μέρα είναι $P_\alpha = 3P = \dfrac{6}{27}.$

β) Η πιθανότητα να μη βρέξει τις επόμενες τρεις μέρες είναι

$P = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}.$ (1)

Το **πολύ μια φορά** σημαίνει **καμία φορά ή μία φορά**. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_{\beta} = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$.

γ) Το ενδεχόμενο **να βρέξει τουλάχιστον μια φορά** είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου **να μη βρέξει.** Άρα $P_{\gamma} = 1 - P = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ λόγω της (1).