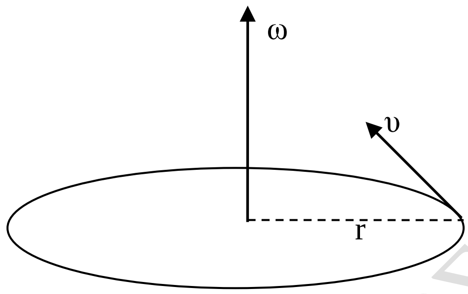
# ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΕΝΙΚΑ

Για την στροφική κίνηση ορίζονται δύο ταχύτητες. Η γραμμική ταχύτητα, η οποία είναι ο ρυθμός μεταβολής του τόξου S




$$\upsilon = \frac{dS}{dt}$$

και η γωνιακή ταχύτητα η οποία είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Η σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας είναι:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\theta r)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.r = \omega.r \Rightarrow \boxed{\upsilon = \omega.r}$$

Ακόμη ορίζονται **α)**η **κεντρομόλος επιτάχυνση** η οποία μεταβάλλει την κατεύθυνση του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας ( $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}$ ) **β)**η **επιτρόχιος επιτάχυνση**, η οποία είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας $\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma} = \frac{d\upsilon}{dt}$ και **γ)**η **γωνιακή επιτάχυνση**, η οποία είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας $\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{d\omega}{dt}$

Η επιτρόχιος επιτάχυνση συνδέεται με την γωνιακή με τη σχέση:

$$\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.r = \alpha_{\gamma\omega\nu.}.r \Rightarrow \boxed{\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu.}.r}$$

Όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνεται, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας.

Όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ελαττώνεται, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας.

Σημείωση: το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης α ενός υλικού σημείου του στερεού που περιστρέφεται υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha = \sqrt{\alpha^2_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\mu\acute{o}\lambda o\varsigma} + \alpha^2_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma}}$ όπου $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}.R$ και $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$. Για σώμα που θεωρείται υλικό σημείο και μάζας m και περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ισχύει: $\Sigma F_{r(\text{κατά τη διεύθυνση της ακτίνας})} = \frac{m\upsilon^2}{R}$ και $\Sigma F_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota\alpha} = m.\alpha_\varepsilon$ και $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}.R$

## Ομαλή στροφική κίνηση

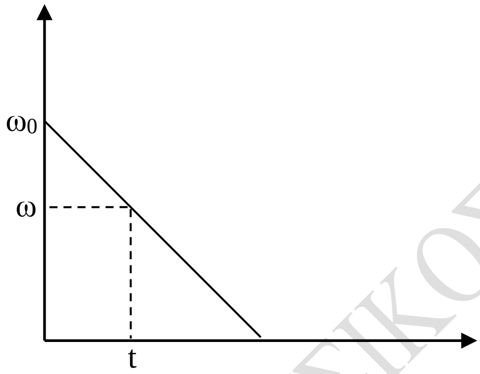
Ομαλή στροφική κίνηση έχουμε όταν το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας διατηρείται σταθερό (ενώ μόνο το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό)

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$S = \upsilon.t \text{ και } \theta = \omega.t$$

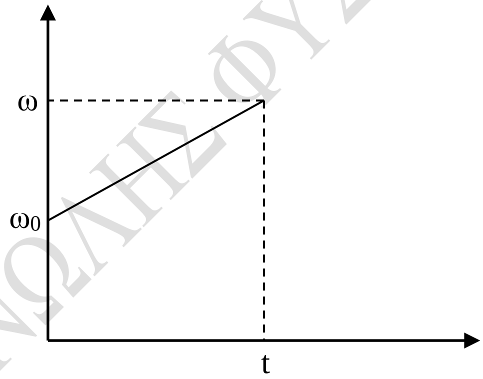
**Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση**

Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση κάνει ένα σώμα όταν περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση (προφανώς και η επιτρόχια είναι σταθερή).
Αν η γωνιακή ταχύτητα αυξάνει η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη ενώ αν ελαττώνεται ομαλά επιβραδυνόμενη.




Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$\boldsymbol{\omega = \omega_0 \pm \alpha_{\gamma\omega\nu.} t}$ και $\boldsymbol{\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2}$ ($\pm$ ανάλογα αν είναι επιταχυνόμενη η επιβραδυνόμενη)
Από την κλίση της ευθείας στα διαγράμματα (ω,t) μπορούμε να υπολογίσουμε το $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ και από το εμβαδόν κάτω από την ευθεία την γωνιακή μετατόπιση θ

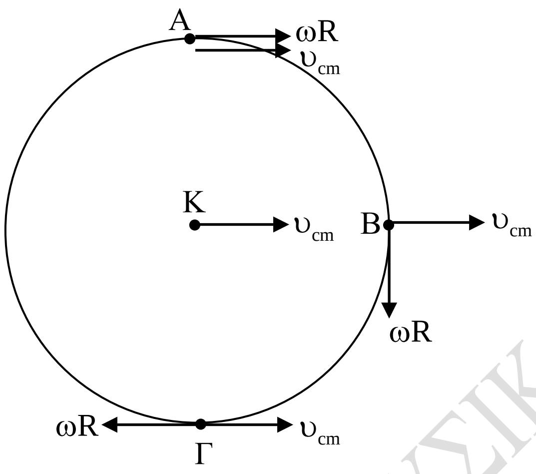



**Κύλιση**
Όταν ένα σώμα κυλίεται εκτελεί μια σύνθετη κίνηση: μία μεταφορική και μία περιστροφική. Ως ταχύτητα και επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης θεωρείται η ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ και η επιτάχυνση $\alpha_{cm}$ του κέντρου μάζας του σώματος (center mass) που είναι η ίδια για όλα τα σημεία. Όταν ένα σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει το διάστημα που διανύει είναι ίσο με το τόξο που διαγράφει και αποδεικνύεται ότι:
**α)** $\boxed{\upsilon_{cm} = \omega.R}$ δηλαδή η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του σώματος(π.χ. τροχός, κύλινδρος κ.λ.) και
**β)** $\boxed{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu.} R}$ δηλαδή η επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την επιτρόχιο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας.
Από τα παραπάνω και παίρνοντας υπ’ όψιν μας την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων κάθε σημείο της **περιφέρειας** του σώματος που κυλίεται θα έχει ταχύτητα που θα δίνεται από τη σχέση:

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}$

Όπου $\upsilon_{\gamma\rho.} = \omega.R$

Έτσι για τα σημεία του σώματος του διπλανού σχήματος θα έχουμε:




$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega R = 2\upsilon_{cm}$

$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2\upsilon_{cm}^2} = \upsilon_{cm}\sqrt{2}$

$\upsilon_\Gamma = \omega R - \omega R = 0$

$\upsilon_K = \upsilon_{cm}$

**Ισορροπία στερεού**

**Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων ισορροπίας ράβδου**

1. *Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα*
2. *Αναλύουμε τις δυνάμεις σε δύο άξονες: ένα παράλληλο στη ράβδο και ένα κάθετο στη ράβδο*
3. *Εφαρμόζουμε τη σχέση Στ=0 ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο της ράβδου. Συνήθως επιλέγουμε ένα σημείο στο οποίο εφαρμόζεται μια άγνωστη δύναμη*
4. *Γράφουμε τις σχέσεις $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y=0$ και αντικαθιστούμε τις δυνάμεις*
5. *Τέλος επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων που δημιουργούνται*

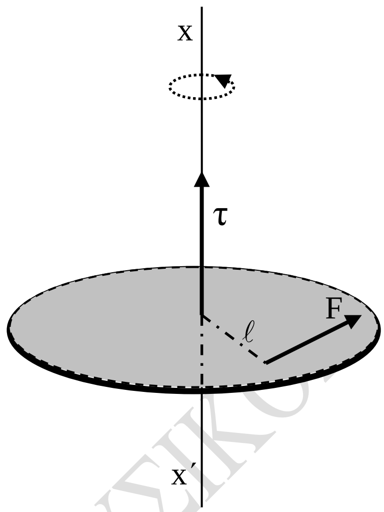
**Υπολογισμός της ροπής αδράνειας σωμάτων**

1. *Προσδιορίζουμε τις (στοιχειώδεις) μάζες που αποτελούν το σύστημα*
2. *Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας κάθε μιας (στοιχειώδους) μάζας περί τον άξονα περιστροφής*
3. *Προσθέτουμε τις ροπές αδράνειας όλων των μαζών και παίρνουμε την ολική ροπή αδράνειας*

***<u>Προσοχή</u>***

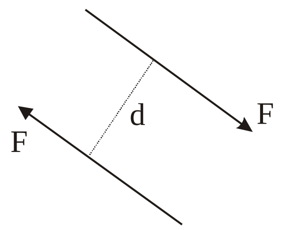
*<u>Σε περίπτωση στερεού σώματος που ο άξονας περιστροφής του δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του εφαρμόζουμε το θεώρημα</u>* ***<u>Steiner</u>***

<u>**ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ**</u>




**Ροπή μιας δύναμης** F ως προς σημείο ή άξονα είναι το διανυσματικό μέγεθος **τ** που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο της δύναμης F επί την απόσταση $\ell$ της δύναμης από το σημείο ή τον άξονα. Δηλ. $\mathbf{\tau = F.\ell}$ Η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο της δύναμης και η φορά της καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού(κλείνω τα δάκτυλα του δεξιού χεριού όπως πάει η δύναμη να περιστρέψει το σώμα οπότε ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τη φορά της ροπής)

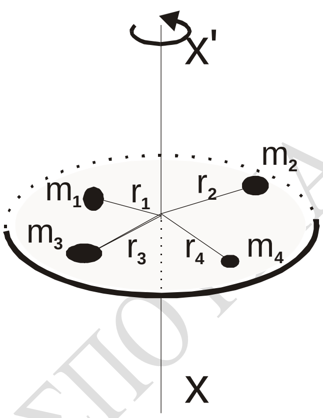
**Ζεύγος δυνάμεων** αποτελούν δύο δυνάμεις ομοεπίπεδες, παράλληλες ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς.




**Ροπή ζεύγους** Η ροπή ζεύγους είναι ίση με **τ=F.d** όπου **d** η μεταξύ των δυνάμεων απόσταση(κάθετη).

**Πότε ένα στερεό σώμα ισορροπεί;** Για να ισορροπεί ένα **αρχικά ακίνητο σώμα** πρέπει α) $\Sigma\vec{F} = 0$ και β) $\Sigma\vec{\tau} = 0$ Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση ενώ η δεύτερη συνθήκη αποκλείει την περιστροφή.

**Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής** $\mathbf{K = \frac{1}{2} I\omega^2}$




Χωρίζουμε το στερεό σώμα σε μικρές στοιχειώδεις μάζες $m_1$, $m_2$, $m_3$, ... ,$m_\nu$ που απέχουν από το άξονα περιστροφής αποστάσεις $r_1$, $r_2$, $r_3$, ... ,$r_\nu$ αντίστοιχα. Αν το στερεό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα τότε οι αντίστοιχες στοιχειώδεις μάζες έχουν γραμμικές ταχύτητες $\omega r_1$, $\omega r_2$, $\omega r_3$, ... ,$\omega r_\nu$ οπότε οι κινητικές ενέργειες τους που είναι αντίστοιχα

$\frac{1}{2}m_1u_1^2,\ \frac{1}{2}m_2u_2^2,\ \frac{1}{2}m_3u_3^2,\ \dots,\ \frac{1}{2}m_\nu u_\nu^2$ γίνονται:

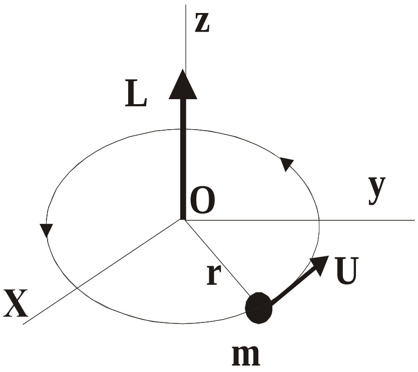
$\frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2,\ \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2,\ \frac{1}{2}m_3\omega^2r_3^2,\ \dots,\ \frac{1}{2}m_\nu\omega^2r_\nu^2$ οπότε η ολική κινητική ενέργεια του στερεού είναι:

$$K = \frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2 + \frac{1}{2}m_3\omega^2r_3^2 + \ \dots + \frac{1}{2}m_\nu\omega^2r_\nu^2 \Rightarrow$$

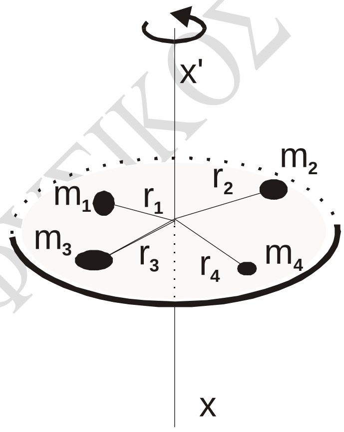
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ \dots + m_\nu r_\nu^2)\omega^2 \Rightarrow \mathbf{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

**Ροπή αδράνειας I** ως προς άξονα είναι το άθροισμα $\mathbf{m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2}$ όπου $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ πολύ μικρές μάζες στις οποίες χωρίζεται νοητά το σώμα και $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ οι αποστάσεις των μαζών από τον άξονα . Η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής, από το μέγεθος, το σχήμα του σώματος, και από το τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η μάζα του σώματος, γύρω από τον άξονα περιστροφής.

**Στροφορμή στερεού. Απόδειξη της σχέσης $\mathbf{L = I.\omega}$**




Η στροφορμή μιας στοιχειώδους μάζας m που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από το σημείο O έχει μέτρο **L=m.υ.r ⇒L=m.ω.r²** και διεύθυνση και φορά όπως στο σχήμα (αριστερά).




Η στροφορμή ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα περιστροφής βρίσκεται αν προσθέσω διανυσματικά όλες τις στροφορμές των στοιχειωδών μαζών στις οποίες χωρίζουμε το στερεό (σχήμα δεξιά). Έτσι :

$$\mathbf{L_{\text{ολ}} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_\nu \Rightarrow}$$

$$\mathbf{L_{\text{ολ}} = m_1\omega r_1^2 + m_2\omega r_2^2 + m_3\omega r_3^2 + \ldots + m_\nu\omega r_\nu^2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{L_{\text{ολ}} = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2)\omega \Rightarrow}$$

$$\mathbf{L_{\text{ολ}} = I.\omega}$$

**Αρχή διατήρησης της στροφορμής** Όταν σε ένα σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ή αν ασκούνται, έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. $\vec{\mathbf{L}}_{\text{τελ}} = \vec{\mathbf{L}}_{\text{αρχ}}$ ή $\vec{\mathbf{L}}_{\text{μετα}} = \vec{\mathbf{L}}_{\text{πριν}}$

**ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ**

Η Συνισταμένη των ροπών που δρουν πάνω σ' ένα σώμα είναι ίση με το γινόμενο της ροπής αδράνειας **I** του σώματος επί την γωνιακή του επιτάχυνση $\mathbf{\alpha_{\text{γων}}}$. Η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης ροπής είναι ίδια με τη διεύθυνση και φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\boxed{\mathbf{\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\text{γων}}}}$

Η γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης είναι: $\boxed{\mathbf{\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\tau}}}$ και

συνδυαστικά $\boxed{\mathbf{\frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha}_{\text{γων}}}}$

## ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

**1)**Όταν ένα σώμα κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

**2)**Στην κύλιση τροχού κυλίνδρου κ.λ. ισχύουν πάντα οι σχέσεις $\boxed{\upsilon_{cm} = \omega.R}$ και $\boxed{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}.R}$

ακόμη το dθ σε rad δίνεται από τη σχέση $\boxed{d\theta = \frac{dS}{R}}$ ή $\boxed{dS = R.d\theta}$

**3)**Δύναμη που ο φορέας της περνά από τον άξονα περιστροφής δεν προκαλεί ροπή

**4)** Δύναμη που ο φορέας της είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής δεν προκαλεί ροπή

**5)**Αν η δύναμη δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής , η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο.

**6)**Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.

**7)**Για να ισορροπεί ένα **αρχικά ακίνητο σώμα** πρέπει α)συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν :

$\boxed{\Sigma F = 0 \text{ ή } \begin{matrix} \Sigma F_\chi = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}}$ **και** β) $\boxed{\Sigma\tau = 0}$ . Αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις αλλά το σώμα αρχικά κινείται τότε θα διατηρήσει σταθερή τόσο την μεταφορική του ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ όσο και την γωνιακή του ταχύτητα ω

**8)**Το θεώρημα του Steiner (Στάϊνερ) ισχύει για δύο παράλληλους άξονες (p,cm) που ο ένας οπωσδήποτε περνά από το κέντρο μάζας (cm) του σώματος. ( $I_p = I_{cm} + Md^2$ )

**9)**Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης $\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}}$ ισχύει και στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής δεν είναι σταθερός αλλά μετατοπίζεται, αρκεί να περνά από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση στη διάρκεια της κίνησης (να μετατοπίζεται παράλληλα προς την αρχική του θέση).

**10)**Η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων ενός συστήματος είναι μηδέν, γιατί σε κάθε τέτοιο ζεύγος (δράση-αντίδραση) οι δυνάμεις έχουν τον ίδιο φορέα (d=0) οπότε $\boxed{\tau_{\text{ζεύγους εσωτερικών}} = F.d = F.0 = 0}$.

Έτσι αν $\Sigma\tau_{\text{εξωτερικών}} = 0$ τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

**11)**Το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας Θ.Μ.Κ.Ε. διατυπώνεται ως εξής;

$\boxed{\Delta K = W_{\text{όλων των δυνάμεων}}}$ όπου $\underline{\boldsymbol{\Delta K = (K_{\text{μεταφ. τελική}} - K_{\text{μεταφ. αρχική}}) + (K_{\text{περιστ. τελική}} - K_{\text{περιστρ. αρχική}})}}$

**12)**Όταν εφαρμόζω τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για την μεταφορική κίνηση ορίζω σαν θετική φορά πάντα τη φορά του $\boldsymbol{\alpha_{cm}}$ . Αυτό σημαίνει ότι **αν το σώμα επιταχύνεται μεταφορικά ($\vec{\upsilon}_{cm} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}_{cm}$) θεωρώ θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\upsilon_{cm}$, ενώ αν το σώμα επιβραδύνεται ($\vec{\upsilon}_{cm} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}_{cm}$) θεωρώ θετική φορά την αντίθετη της $\upsilon_{cm}$.**

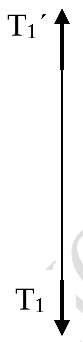
**13)** Όταν εφαρμόζω τον Θεμελιώδη Νόμο της στροφικής κίνησης ορίζω σαν θετική φορά πάντα τη φορά του **$\alpha_{γων}$** . Αυτό σημαίνει ότι αν το σώμα επιταχύνεται ( $\vec{\omega}\ \uparrow\uparrow \vec{\alpha}_{γων}$ ) θεωρώ θετική φορά τη φορά της ταχύτητας ω, ενώ αν το σώμα επιβραδύνεται ( $\vec{\omega}\ \uparrow\downarrow \vec{\alpha}_{γων}$ ) θεωρώ θετική φορά την αντίθετη της ω. Έτσι **αν το σώμα επιταχύνεται περιστροφικά θεωρούνται θετικές οι ροπές που δίνουν περιστροφή ομόρροπη με την περιστροφή που υπάρχει ήδη, ενώ αν επιβραδύνεται θεωρούνται θετικές οι ροπές που δίνουν περιστροφή αντίρροπη με την περιστροφή που υπάρχει ήδη.**

**14)**Σε κεκλιμένο επίπεδο η τριβή κύλισης σχεδιάζεται πάντα προς τα πάνω είτε κατεβαίνει το σώμα είτε ανεβαίνει. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση σχεδιάζεται τυχαία και εφαρμόζοντας τις σχέσεις: $\begin{matrix} \Sigma F_{\chi} = m.\alpha_{cm} \\ \Sigma F_{y} = 0 \end{matrix}$ και $\Sigma\tau = I.\alpha_{γων}$ , αν βρώ Τ>0 τότε έχει σχεδιαστεί σωστά ενώ αν βρώ Τ<0 τότε το μέτρο της είναι η απόλυτη τιμή του αποτελέσματος αλλά η φορά είναι αντίθετη από αυτή που σχεδιάστηκε.

**15)**Το έργο της τριβής κύλισης είναι πάντα μηδέν γιατί η ταχύτητα στο σημείο επαφής είναι 0, οπότε η Τ δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

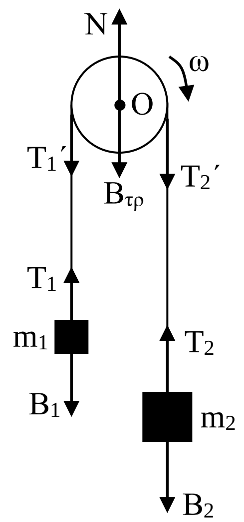
**16)**Όταν έχω στρεφόμενη ράβδο σε κατακόρυφο επίπεδο **η $\alpha_{γων}$ δεν είναι σταθερή** με αποτέλεσμα να **<u>μην</u>** μπορώ να χρησιμοποιήσω τις σχέσεις: $\begin{matrix} \boldsymbol{\omega = \omega_0 \pm \alpha_{γων}.t} \\ \boldsymbol{\upsilon_{cm} = \upsilon_{0_{cm}} \pm \alpha_{cm}.t} \end{matrix}$ και $\begin{matrix} \boldsymbol{\Delta\theta = \omega_0.t \pm \frac{1}{2}\alpha_{γων}.t^2} \\ \boldsymbol{\Delta\chi = \upsilon_{0_{cm}}.t \pm \frac{1}{2}\alpha_{cm}.t^2} \end{matrix}$

**17)**Στη τροχαλία του σχήματος **$T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$** αν το νήμα θεωρηθεί



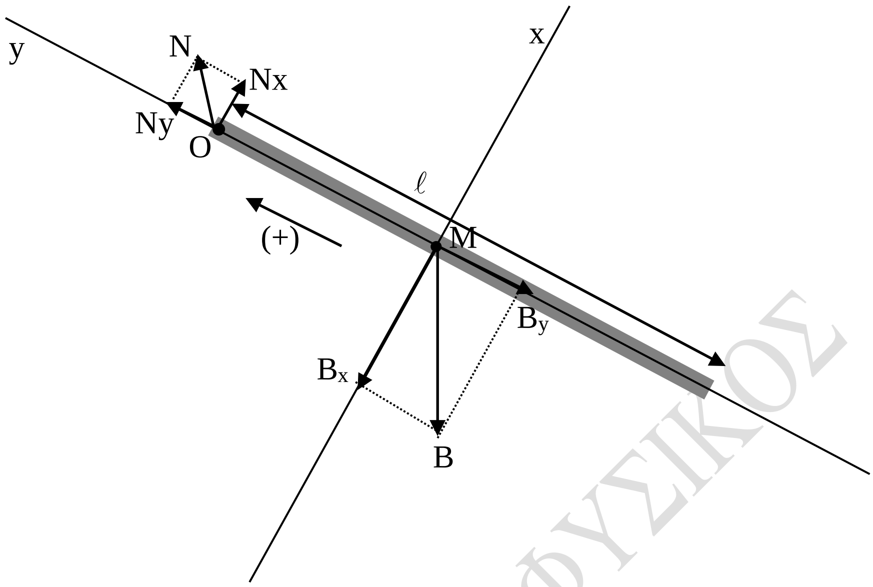

αβαρές. Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις πάνω στο νήμα έχω: $T_1' - T_1 = m_{νήματος} \cdot \alpha$ όμως αν η μάζα του νήματος θεωρηθεί αμελητέα τότε $T_1' - T_1 = 0 \Rightarrow T_1' = T_1$

Γενικά ακόμη **$T_1' \neq T_2'$** γιατί από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχω $T_2'.R - T_1'.R = I_{(o)}.\alpha_{γων.}$ Αν όμως η τροχαλία θεωρηθεί αβαρής (οπότε $I_{(o)}=0$) **ή** η τροχαλία γυρίζει με σταθερό ω (οπότε $\alpha_{γων.}=0$) τότε $T_2'.R - T_1'.R = 0 \Rightarrow T_2' = T_1'$




Γενικά η κάθετη αντίδραση N που δέχεται η τροχαία από τον άξονα περιστροφής της είναι πλάγια δύναμη. Στο παραπάνω παράδειγμα επειδή η τροχαλία είναι μεταφορικά ακίνητη δεν υπάρχει συνιστώσα $N_{\chi}$ οπότε η κάθετη αντίδραση είναι κατακόρυφη.

**18)**Στη ράβδο του διπλανού σχήματος που περιστρέφεται γύρω από το O έχουμε:




**Άξονας χ:**

$B_\chi - N_\chi = m.\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma(cm)}$

όπου $\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota o\varsigma(cm)} = \alpha_{\gamma\omega\nu.}.\frac{\ell}{2}$

οπότε $B_\chi - N_\chi = m.\alpha_{\gamma\omega\nu.}.\frac{\ell}{2}$

**Άξονας y:** (*πάντα θετική φορά προς το κέντρο*)

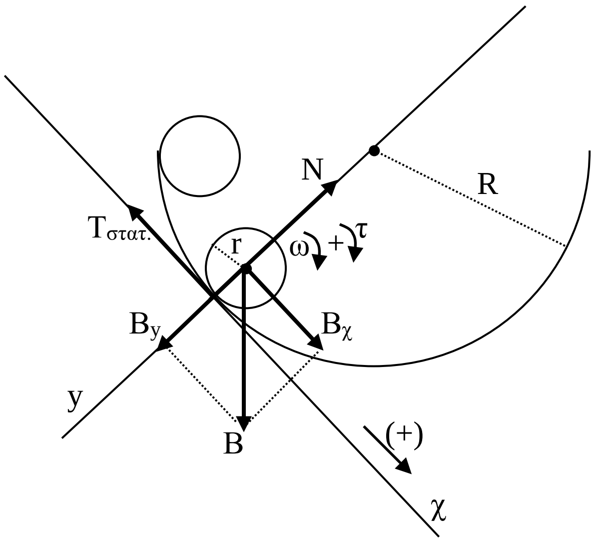
$\Sigma F_y = m.\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\mu\acute{o}\lambda o\varsigma}$ όπου

$\Sigma F_y = N_y - B_y$ και $\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\mu\acute{o}\lambda o\varsigma} = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{\frac{\ell}{2}}$ όπου $\frac{\ell}{2}$ η απόσταση του κέντρου μάζας της ράβδου από τον άξονα περιστροφής και $\upsilon_{cm}$ η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας $\upsilon_{cm} = \omega.\frac{\ell}{2}$

**Για την περιστροφή έχω:**

$\Sigma\tau_{(o)} = I_{(o)}.\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow B_\chi.\frac{\ell}{2} = I_{(o)}.\alpha_{\gamma\omega\nu.}$

**19)**Εάν έχω την σφαίρα ακτίνας r του διπλανού σχήματος που κατεβαίνει στο εσωτερικό κυλίνδρου ακτίνας R τότε:




**Για την κύλιση έχω:**

Άξονας χ: $\boxed{B_\chi - T_{\sigma\tau\alpha\tau.} = m.\alpha_{cm}}$ όπου $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu.}.r$

Για την περιστροφή της σφαίρας γύρω από τον άξονα που περνάει από το κέντρο της:

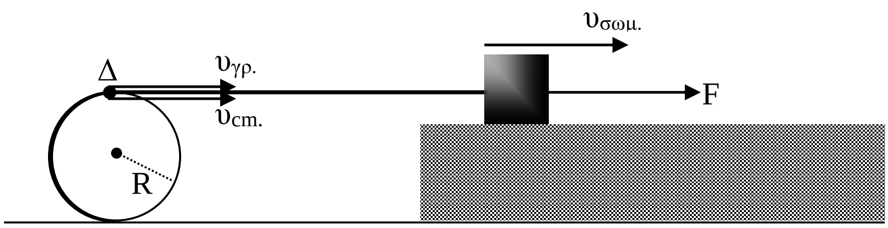
$\boxed{T_{\sigma\tau\alpha\tau.}.r = I.\alpha_{\gamma\omega\nu.}}$

**Για την περιστροφή της σφαίρας μέσα στον κύλινδρο έχω:**

**Άξονας y:** (*πάντα θετική φορά προς το κέντρο*)

$N - B_y = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{R - r}$ όπου $\upsilon_{cm} = \omega.r$

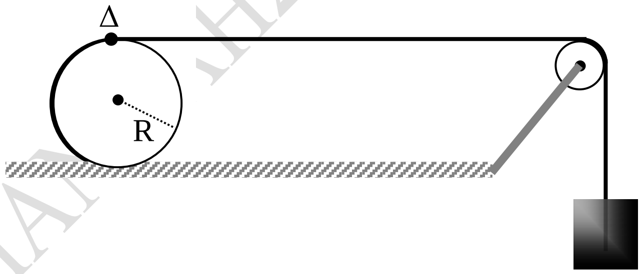
**20)** Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα κύλινδρο γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένο αβαρές μη εκτακτό νήμα. Με τη βοήθεια της F μετακινείται το σώμα και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.




Επειδή το νήμα είναι μη εκτακτό, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος είναι η ίδια με την ταχύτητα και την επιτάχυνση αντίστοιχα του σημείου Δ του κυλίνδρου. Όμως η ταχύτητα του σημείου Δ είναι η συνισταμένη των ταχυτήτων $\upsilon_{cm}$ και $\upsilon_{γραμ.}$ δηλ. στο συγκεκριμένο σημείο $\upsilon_{\Delta} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{γραμ.}$ όμως $\upsilon_{cm}=\omega.R$ και $\upsilon_{γραμ.(\Delta)}=\omega.R$ άρα $\boldsymbol{\upsilon_{\Delta}=2\upsilon_{cm}}$ και έτσι τελικά $\boldsymbol{\alpha_{\Delta}=2\alpha_{cm}}$ οπότε $\boldsymbol{\alpha_{σωμ.}=\alpha_{\Delta}=2\alpha_{cm}}$

**<u>Άσκηση – Παράδειγμα</u>**

Στο σχήμα φαίνεται ένας ακίνητος ομογενής κύλινδρος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,2m, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές, μη εκτακτό νήμα, που καταλήγει μέσω μιας αβαρούς τροχαλίας σε μικρό σώμα μάζας m.




Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Κατά τη διάρκεια της κύλισης του ο κύλινδρος δέχεται από το νήμα σταθερή τάση μέτρου $T_1$=6N. Να υπολογίσετε:

α)το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος καθώς και το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης.

β)το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας τη χρονική στιγμή t=0,5 sec.

γ)το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος

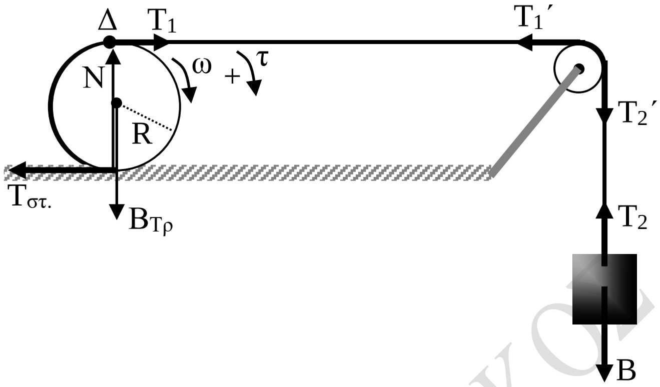
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων του $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\, m/s^2$.

**<u>Λύση:</u>**

α)Σχεδιάζω τις δυνάμεις (φαίνονται στο παρακάτω σχήμα). Την στατική τριβή τη σχεδιάζω τυχαία. Επειδή η τροχαλία είναι αβαρής $I_{τροχ.}$=0. Επομένως η σχέση

$\Sigma\tau = I.\alpha_{γων.} \Rightarrow T_1^{'}.R - T_2^{'}.R = 0 \Rightarrow T_1^{'} = T_2^{'}$ ακόμη επειδή το νήμα είναι αβαρές $T_1 = T_1^{'}$ και $T_2 = T_2^{'}$ οπότε τελικά $T_1 = T_1^{'} = T_2^{'} = T_2$.

***<u>Για την περιστροφή του κυλίνδρου έχω:</u>***




$$\Sigma\tau = I.\alpha_{γων.} \Rightarrow T_1.R + T_{στ.}.R = \frac{1}{2}MR^2.\alpha_{γων.}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 + T_{στ.} = \frac{1}{2}MR.\alpha_{γων.} \\ \alpha_{cm} = \alpha_{γων.}.R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$T_1 + T_{στ.} = \frac{M\alpha_{cm}}{2} \quad (1)$$

***<u>Για την μεταφορική κίνηση του τροχού έχω:</u>***

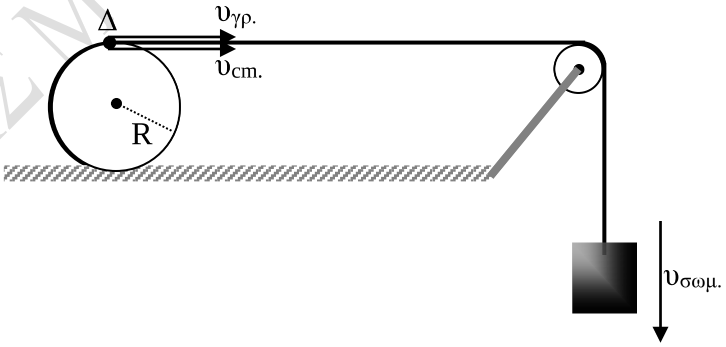
$$\Sigma F = m.\alpha_{cm} \Rightarrow T_1 - T_{στ.} = M\alpha_{cm} \quad (2)$$

Από την (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχω:

$$2T_1 = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow 2.6 = \frac{3}{2}4\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2} \text{ οπότε } \alpha_{γων.} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{2}{0,2} = 10\,{}^{rad}\!/\!{}_{s}$$

Η σχέση (2) $\Rightarrow$6-$T_{στ.}$=4.2$\Rightarrow$ $T_{στ.}$=-2N Το πρόσημο – σημαίνει ότι η τριβή έχει φορά αντίθετη από αυτή που σχεδιάστηκε στο σχήμα. Το μέτρο της όμως είναι 2N.

β) $\omega_1$=$\alpha_{γων.}$.t=10.0,5=5rad/s




γ) Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό

$$\upsilon_{σωμ.} = \upsilon_{\Delta} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{γραμ.} = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{σωμ.} = 2\upsilon_{cm} \text{ άρα}$$

$$\alpha_{σωμ.} = 2\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{σωμ.} = 2.2 = 4\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

**21)**Η αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας εφαρμόζεται όταν στο πρόβλημα έχω συντηρητικές δυνάμεις ή και μη συντηρητικές που όμως δεν παράγουν έργο. (εδώ να τονίσουμε ξανά ότι στη κύλιση χωρίς ολίσθηση κυλίνδρου ή σφαίρας ή τροχού, το σημείο επαφής με το επίπεδο έχει ταχύτητα μηδέν άρα η τριβή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της επομένως δεν παράγει έργο) Για την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. ορίζουμε την κατώτερη θέση του σώματος σαν επίπεδο δυναμικής ενέργειας U=0. Στον τύπο U=mgh το h είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του σώματος από το επίπεδο που έχουμε ορίσει σαν επίπεδο δυναμικής ενέργειας U=0.

$$\mathbf{K_{αρχ.μετ.} + K_{αρχ.περ.} + U_{αρχ.} = K_{τελ.μετ.} + K_{τελ.περ.} + U_{τελ.}}$$

**22)**Για να κάνει ανακύκλωση μια ράβδος που περιστρέφεται περί το άκρο της πρέπει στο ψηλότερο σημεία $\omega \geq 0$, οριακά $\omega = 0$.

Για να κάνει ανακύκλωση μια σφαίρα που κυλίεται χωρίς ολίσθηση μέσα σε κυλινδρική επιφάνεια πρέπει στο ψηλότερο σημείο $N \geq 0$, οριακά $N = 0$

Για να κάνει ανακύκλωση ένα σώμα δεμένο σε νήμα που κάνει κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο πρέπει στο ψηλότερο σημείο η τάση του νήματος $T \geq 0$, οριακά $T = 0$

**23)**Σε κάθε περίπτωση που μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων πρέπει να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της στροφορμής (εφόσον βέβαια δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές ή έχουν συνισταμένη 0).

Η ροπή αδράνειας μεταβάλλεται:

*α)όταν μεταβάλλεται η μάζα του συστήματος(προστίθεται η αφαιρείται μάζα)*

*β)όταν μεταβάλλεται η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής.*

Έτσι εργαζόμαστε ως εξής:

*1)υπολογίζουμε την αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος* $I_{ολ(αρχική)}$

*2)υπολογίζουμε την τελική ροπή αδράνειας του συστήματος* $I_{ολ(τελική)}$

*3)και τέλος εφαρμόζουμε τη σχέση:*

$$\mathbf{L}_{ολ(αρχ)} = \mathbf{L}_{ολ(τελ)} \text{ ή}$$

$$\mathbf{I}_{ολ(αρχ)} . \boldsymbol{\omega}_{αρχ} = \mathbf{I}_{ολ(τελ)} . \boldsymbol{\omega}_{τελ}$$

**24)Εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε.** (αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας)

Εφαρμόζεται όταν έχουμε μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή και μη συντηρητικές που δεν παράγουν έργο (μονωμένο σύστημα), ως εξής:

*1)υπολογίζουμε την αρχική κινητική και δυναμική ενέργεια του σώματος ή του συστήματος σωμάτων*

*2) υπολογίζουμε την τελική κινητική και δυναμική ενέργεια του σώματος ή του συστήματος σωμάτων*

*3)και τέλος αντικαθιστούμε στη σχέση:* $\mathbf{K}_{αρχ.μετ.} + \mathbf{K}_{αρχ.περ.} + \mathbf{U}_{αρχ.} = \mathbf{K}_{τελ.μετ.} + \mathbf{K}_{τελ.περ.} + \mathbf{U}_{τελ.}$

***Προσοχή***

Στην περίπτωση που υπάρχουν τριβές ολίσθησης (όχι τριβές κύλισης) η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται γιατί ένα μέρος της γίνεται θερμότητα Q μέσω του έργου των τριβών. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε: $\mathbf{K}_{αρχ} + \mathbf{U}_{αρχ} = \mathbf{K}_{τελ} + \mathbf{U}_{τελ} + \mathbf{Q}$

**25)**όταν ένα σώμα έχει την τάση να ανατραπεί το Στ=0 το παίρνουμε ως προς άξονα γύρω από τον οποίο θα γίνει η περιστροφή για την ανατροπή

**26)**το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{στατ(max)}=μ_σ.F_k$ όπου $μ_σ$ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής. Για να μην ολισθαίνει ένα σώμα πρέπει:

$\mathbf{T_{στατική} \leq T_{στατ.(max)}}$ (ισχύει και για κύλιση χωρίς ολίσθηση)

**27)**ο αριθμός περιστροφών για ένα στερεό δίνεται από τον τύπο $\mathbf{N=\dfrac{θ}{2π}}$ ή $\mathbf{N=\dfrac{S}{2πR}}$

**28)** κατά την εφαρμογή του τύπου $Στ=I.α_{γων.}$ πρέπει να προσέχουμε , ώστε η συνισταμένη ροπή Στ και η ροπή αδράνειας I να υπολογίζονται ως προς τον ίδιο άξονα περιστροφής

**29)**στην επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση ο ολικός χρόνος και η αντίστοιχη συνολική μετατόπιση υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\mathbf{t_{ολ}=\frac{υ_0}{α}}$$
$$\mathbf{S_{ολ}=\frac{υ_0^2}{2α}}$$

<u>απόδειξη</u>:
$$\left.\begin{aligned}0&=υ_0-α_{cm}t_{ολ}\\ S_{ολ}&=υ_0t_{ολ}-\frac{1}{2}α_{cm}t_{ολ}^2\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{υ_0}{α_{cm}}\\ S_{ολ}&=υ_0\frac{υ_0}{α_{cm}}-\frac{1}{2}α_{cm}\left(\frac{υ_0}{α_{cm}}\right)^2\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{υ_0}{α_{cm}}\\ S_{ολ}&=\frac{υ_0^2}{α_{cm}}-\frac{υ_0^2}{2α_{cm}}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{υ_0}{α_{cm}}\\ S_{ολ}&=\frac{υ_0^2}{2α_{cm}}\end{aligned}$$

στην επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση ο ολικός χρόνος και η αντίστοιχη συνολική γωνιακή μετατόπιση υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\mathbf{t_{ολ}=\frac{υ_0}{α_{γων}}}$$
$$\mathbf{θ_{ολ}=\frac{ω_0^2}{2α_{γων}}}$$

<u>απόδειξη</u>:
$$\left.\begin{aligned}0&=ω_0-α_{γων}t_{ολ}\\ θ_{ολ}&=ω_0t_{ολ}-\frac{1}{2}α_{γων}t_{ολ}^2\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{ω_0}{α_{γων}}\\ θ_{ολ}&=ω_0\frac{ω_0}{α_{γων}}-\frac{1}{2}α\left(\frac{ω_0}{α_{γων}}\right)^2\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{ω_0}{α_{γων}}\\ θ_{ολ}&=\frac{ω_0^2}{α_{γων}}-\frac{ω_0^2}{2α_{γων}}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}t_{ολ}&=\frac{ω_0}{α_{γων}}\\ θ_{ολ}&=\frac{ω_0^2}{2α_{γων}}\end{aligned}$$

**30)**ένα κινούμενο υλικό σημείο έχει στροφορμή ακόμη και αν κινείται ευθύγραμμα. L=mυr όπου r είναι η απόσταση του <<άξονα περιστροφής>> από τον φορέα της ταχύτητας

**31)**το έργο δύναμης που προκαλεί **σταθερή ροπή** υπολογίζεται από τον τύπο $\mathbf{W_F=τ.θ}$ όπου θ είναι η γωνία στροφής

**32)**ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK_{μετ.}}{dt}=\frac{dw_{ολ}}{dt}=\frac{d(ΣF.x)}{dt}=\frac{ΣF.dx}{dt}=ΣF.υ$$

ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK_{περ.}}{dt}=\frac{dw_{ολ}}{dt}=\frac{d(Στ.θ)}{dt}=\frac{Στ.dθ}{dt}=Στ.ω$$

όταν το σώμα εκτελεί και περιστροφική και μεταφορική κίνηση ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK}{dt}=ΣF.υ+Στ.ω$$

**33)**Η στιγμιαία ισχύς δύναμης λόγω μεταφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$P_{\sigma\tau\iota\gamma.} = \frac{dw}{dt} = \frac{F.dx}{dt} = F.\upsilon$$

Η στιγμιαία ισχύς δύναμης λόγω περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$P_{\sigma\tau\iota\gamma\mu.} = \frac{dw}{dt} = \frac{\tau.d\theta}{dt} = \tau.\omega$$

Η μέση ισχύς υπολογίζεται πάντα από τον τύπο: $\overline{P} = \frac{w}{t}$