Πανελλήνιες εξετάσεις 2014
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής-Γενικής Παιδείας
Παρασκευή, 30 Μαΐου 2014

Λύσεις των θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1.Απόδειξη σελίδα 30 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σελίδα 13 σχολικού βιβλίου

Α3.Θεωρία σελίδα 59 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Σωστό (σχόλιο στο σχολικό βιβλίο σελ. 40)

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πλήθος των πωλητών είναι :12+8+14+6=40

Β2.

Κλάσεις	**Κεντρικέ τιμές**	**Συχνότητα** v_i	**Σχετική συχνοτητατα** f_i
[2,4)	3	12	0,30
[4,6)	5	8	0,20
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Η τελευταία στήλη προέκυψε από τον γενικό τύπο: $f_i = \frac{v_i}{v}, v_i = 1,2,3,4$ και ν=40

Και άρα:
$$f_1 = \frac{v_1}{v} = 0,30$$
$$f_2 = \frac{v_2}{v} = 0,20$$
$$f_3 = \frac{v_3}{v} = 0,35$$
$$f_4 = \frac{v_4}{v} = 0,15$$

B3.

α) Για την μέση τιμή των πωλήσεων έχουμε**:** $\bar{x} = \sum_{1}^{4} x_i f_i = 5,7$

β) Οι πωλήσεις άνω των 4,5 χιλιάδων ευρώ συμπεριλαμβάνουν τις συχνότητες της $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλασης 6 πωλητές της $2^{ης}$ κλάσης (αφού κατανέμονται ομοιόμορφα) και άρα θα έχουμε : 14+6+6=26 πωλητές που έκαναν πωλήσεις άνω των 4,5 χιλιάδων ευρώ.

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική)

με $f'(x) = 12x^2 - 7x + 1, x \in \mathbb{R}$ και ρίζες τις $x_1 = \frac{1}{4}$ $x_2 = \frac{1}{3}$ (αφού $x_1 < x_2$).

$\Gamma\iota\alpha\ x \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ στο $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

και άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{4}]\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau o\ [\frac{1}{3}, \infty)$

$\Gamma\iota\alpha\ x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ στο $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

και άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \eta\ f\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \text{Τ.}\ \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o\ \sigma\tau o\ x_1 = \frac{1}{4}\ \kappa\alpha\iota\ \text{Τ.}\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \sigma\tau o\ x_2 = \frac{1}{3}$

(προκύπτει και από τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$)

Γ1. Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι ($\Omega = A \cup K \cup \Pi$):

$$P(K) = x_1 = \frac{1}{4}$$
$$P(A) = x_2 = \frac{1}{3}$$
και $P(\Pi) = 1 - P(K) - P(A) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Γ2. Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

- $P(\Gamma)=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ (αφού τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους)

- $P(\Delta)=P(K\cup A)'=1-P(K\cup A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

- $P(\mathrm{E})=P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-P(A-\Pi)=$
  $=P(A)+1-P(\Pi)-(P(A)-P(A\cap\Pi)=P(A)+1-P(\Pi)-P(A)+P(A\cap\Pi)=$
  $=1-P(\Pi)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

(αφού τα ενδεχόμενα Α και Π είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους)

Γ3. Έχουμε: Ν(Ω)=ν.Αν x ο αριθμός από μπάλλες χρώματος άσπρου και y ο αριθμός από μπάλλες χρώματος Πράσινου που περιέχονται στο δοχείο τότε $x=y-4$.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{x}{v}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{x}{v}\Rightarrow x=\frac{v}{3}(1)$$

$$P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{y}{v}\Rightarrow\frac{5}{12}=\frac{y}{v}\Rightarrow y=\frac{5v}{12}(2)$$

Από τις σχέσεις (1) ,(2) έχουμε: $x=y-4\Rightarrow\frac{v}{3}=\frac{5v}{12}-4\Rightarrow v=48$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνολική επιφάνεια είναι το άθροισμα όλων των εμβαδών των ορθογωνίων που αποτελούν το στερεό **(εκτός του άνω ορθογωνίου):** $\mathrm{E}(x)=x\cdot y+10x+10y$ (1).

Επειδή η περίμετρος της βάσης του είναι σταθερή θα έχουμε:

$2x+2y=20\Leftrightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$ (2)

Από τις(1) και (2) έχουμε: $\mathrm{E}(x)=x(10-x)+10(x+10-x)\Rightarrow\mathrm{E}(x)=-x^2+10x+100,x\in(0,10)$

Η συνάρτηση E(x) είναι παραγωγίσιμη με $\mathrm{E}'(x)=-2x+10,x\in(0,10)$

$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow-2x+10=0\Leftrightarrow x=5$

$x>5\Rightarrow\mathrm{E}'(x)<0\Rightarrow\mathrm{E}(x)$ γν. φθίνουσα στο $(5,10)$

$0<x<5\Rightarrow\mathrm{E}'(x)>0\Rightarrow\mathrm{E}(x)$ γν. αύξουσα στο $(0,5)$

και η $\mathrm{E}(x)$ έχει μέγιστο στο $x_0=5$ το $E(5)=125\tau.\mu$

Δ2.

α)Αφού $2s^2-5s+2=0$ θα είναι $s=2$ ή $s=\frac{1}{2}$. Όμως επειδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές θα έχουμε: $C.V>\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{s}{|\overline{x}|}>\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{s}{8}>\frac{1}{10}\Rightarrow s>\frac{4}{5}$ και άρα η τιμή $s=\frac{1}{2}$ απορρίπτεται και έτσι $s=2$

β) Αν ω η μέση τιμή των x_i^2 θα έχουμε:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2\Rightarrow 4=\omega-\overline{x}^2\Rightarrow 4=\omega-64\Rightarrow\omega=68$$

Δ3. Αφού $5=x_1<x_2<\ldots<x_{15}=9$ και η Ε(x) είναι φθίνουσα για x>5 θα έχουμε:

$E(5)>E(x_2)>\ldots E(9)$

$\max E(x)=E(5)=125$ και άρα το εύρος $R=125-109=16$

$\min E(x)=E(9)=109$

Είναι Ν(Ω)=15

Έχουμε : $$\begin{aligned}&y_i>-4x_i+9R+1\Rightarrow E(x_i)>-4x_i+145\Rightarrow -x_\iota^2+10x_\iota+100>-4x_i+145\Rightarrow\\&-x_\iota^2-14x_\iota+45>0\Rightarrow x_i\in(5,9)\end{aligned}$$

Άρα από το σύνολο των 15 σημείων A_i εξαιρούνται τα σημεία A_1 και A_{15} που έχουν αντίστοιχα τετμημένες $x_1=5$ και $x_{15}=15$.

Άρα τελικά $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{13}{15}$