==

Πανελλήνιες εξετάσεις 2014
Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Ημερησίων
Γενικών Λυκείων (και ΕΠΑ.Λ ομάδας Β)
Δευτέρα, 2 Ιουνίου 2014

Λύσεις των θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, απόδειξη σελίδα 251 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σελίδα 273 σχολικού βιβλίου

Α3.Ορισμός σελίδα 150 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε την εξίσωση $2|z|^2+(z+\overline{z})i-4-2i=0$ (1). Θέτουμε $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ και η (1) γίνεται $2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0$ ή διαδοχικά
$2(x^2+y^2-2)+(2x-2)i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2=0$ *και* $2x-2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=2$ (1) και x=1
y=1 και x=1
Άρα οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$.

Β2. Έχουμε :

$$w=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{39}=3\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{39}=3i^{39}=3(-i)=-3i$$

Β3. Για τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του μιγαδικού u έχουμε (αντικαθιστώντας τα z_1, z_2 και w).

$|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow |u-3i|=\sqrt{9+16} \Leftrightarrow |u-3i|=5$ και άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1),\ x\in\mathbb{R}$ είναι δύο φορέςπαραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$ και $h''(x)=-\dfrac{e^x}{e^x+1}<0,\ x\in\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση h στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη) στο $\mathbb{R}$.

Γ2.

Η δοθείσα ανισότητα γίνεται **:** $e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1} \Leftrightarrow e^{h(2h'(x))}<e^{h(1)}$ και επειδή η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι: $h(2h'(x))<h(1)$. Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα θα έχουμε $2h'(x)<1 \Rightarrow h'(x)<\dfrac{1}{2} \Rightarrow h'(x)<h'(0)$ και επειδή η συνάρτηση h είναι κοίλη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η $h'(x)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα θα έχουμε $x<0$ ($x\in(0,\infty)$).

Γ3.

Για την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

Είναι της μορφής $y=\beta$ με

$$\beta=\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}(x-\ln(e^x+1))=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1 \text{ και άρα } y=1$$

Για την πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Είναι της μορφής $y=\lambda x+\kappa$ με

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=(\frac{-\infty}{-\infty}\kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\varsigma\, D'L)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^x+1}}{1}= \quad \text{και}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=1$$

$$\kappa=\lim_{x\to-\infty}[h(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x]=-\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0$$

Άρα $y=x$

Γ4. Η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$ τέμνει τον άξονα χ΄χ όταν $\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x(h(x)+\ln 2)=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln 2=h(0)$ και επιδη η h είναι «1-1», ως γνησίως μονότονη θα έχει μοναδικό σημείο τομής με τετμημένη $x=0$.Επιπλέον $x>0\Rightarrow h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)>-\ln 2\Rightarrow h(x)+\ln 2>0\Rightarrow e^x(h(x)+\ln 2)>0\Rightarrow$
$\varphi(x)>0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_0^1|\varphi(x)|dx=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1[e^x(h(x)+\ln 2)]dx=\int_0^1 e^xh(x)dx+\ln 2\int_0^1 e^xdx=I+(e-1)\ln 2$$

$$I=\int_0^1 e^xh(x)dx=\int_0^1(e^x)'h(x)dx=[e^xh(x)]_0^1-\int_0^1 e^x(1-\frac{e^x}{e^x+1})dx=eh(1)-h(0)-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$$

$$e(1-\ln(e+1))+\ln 2-[\ln(e^x+1)]_0^1=e(1-\ln(e+1))+\ln 2-\ln(e+1)+\ln 2$$

$$E=e-e\ln(e+1)+2\ln 2-\ln(e+1)+(e-1)\ln 2=e-e\ln(e+1)+\ln 2-\ln(e+1)+e\ln 2=e+(e+1)\ln\frac{2}{e+1}\,\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}e^x=1=f(0)$ και άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

Για την μονοτονία της f έχουμε: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\frac{K(x)}{x^2}, x\in\mathbb{R}^*(1)$, όπου $K(x)=xe^x-e^x+1, x\in\mathbb{R}^*$. Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $K'(x)=xe^x$. Έχουμε $K'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $x>0\Rightarrow K(x)>0$, $x<0\Rightarrow K(x)<0$ και άρα η $K(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=0$ το $K(0)=0$ και άρα $K(x)>0$ και τελικά έχουμε $f'(x)>0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,0)$ και $(0,\infty)$ και αφού είναι και συνεχής στο 0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2.

α.) Θέτουμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du$

με (χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου στο $x_0=0$)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=(\kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\varsigma D'L)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

και άρα μια ρίζα της $F(x)$ είναι το $x=0$ αφού $F(0)=\int_1^1 f(u)du=0$.
Θα αποδείξουμε ότ αυτή είναι μοναδική.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (αποδείχτηκαν στο Δ1)
Το σύνολο τιμών της είναι $(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))=(0,\infty)$ δηλαδή $f(x)>0, x\in\mathbb{R}^*$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$$

Έστω κ μια άλλη ρίζα (διάφορη του 0) της $F(x)$. Έχουμε ότι $2f'(\kappa)=1$ αφού :

- Αν $2f'(\kappa)>1\Rightarrow\int_1^{2f'(\kappa)} f(u)du>0$ (αφού $f(x)>0$ και συνεχής) που είναι άτοπο
- Αν $2f'(\kappa)<1\Rightarrow\int_1^{2f'(\kappa)} f(u)du<0$ (αφού $f(x)>0$ και συνεχής) που είναι άτοπο

Άρα
$$2f'(\kappa)=1\Leftrightarrow f'(\kappa)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(\kappa)=f'(0)\Leftrightarrow\kappa=0\ (f'\ "1-1"\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \eta\ f\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta)$$
άτοπο, και άρα η $F(x)$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

β) Έχουμε από τις υποθέσεις ότι :

$$y(t)=f(x(t)),\ t\geq 0$$
$$x'(t_0)=2y'(t_0)\Leftrightarrow y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{2}$$
$$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$$
$$t=t_0\Rightarrow y'(t_0)=f'(x(t_0)\cdot x'(t_0)\Rightarrow\frac{x'(t_0)}{2}=f'(x(t_0)\cdot x'(t_0)\Rightarrow f'(x(t_0))=\frac{1}{2}(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ x(t)>0)$$
$$f'(x(t_0))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x(t_0))=f'(0)(f\ '1\text{-}1")\Leftrightarrow x(t_0)=0, y(t_0)=f(x(t_0))=1$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι Μ(0,1).

Δ3. Η συνάρτηση $g(x)=(xf(x)+1-e)^2(x-2)^2, x\in(0,\infty)$ ή ισοδύναμα $g(x)=(e^x-e)^2(x-2)^2, x\in(0,\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=2(e^x-e)e^x(x-2)^2+2(e^x-e)^2(x-2)=2(x-2)(e^x-e)[e^x(x-2)+(e^x-e)]=$$

$$=2(x-2)(e^x-e)(xe^x-2e^x+e^x-e)=2(x-2)(e^x-e)(xe^x-e^x-e), x\in(0,\infty)$$

Έχουμε:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } e^x=e \text{ ή } xe^x-e^x-e=0$$

$$x=2, x=1, xe^x-e^x-e=0$$

Για την $xe^x-e^x-e=0$ θέτουμε $A(x)=xe^x-e^x-e, x\in(0,\infty)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε:

- Η $A(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $A(1)=-e<0$
  $A(2)=e^2-e=e(e-1)>0$

Άρα υπάρχει ,ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοι ώστε $A(\xi)=0$.Το ξ είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση $A'(x)=xe^x>0, x\in(0,\infty)$ και άρα θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$ και άρα και «1-1».

x	**0**	**1**	**ξ**	**2** ∞
$(x-2)$	-	-	-	+
(e^x-e)	-	+	+	+
$A(x)=xe^x-e^x-e$	-	-	+	+
$g'(x)$	-	+	-	+
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

$$x>\xi \Rightarrow A(x)>A(\xi) \Rightarrow A(x)>0$$

$$x<\xi \Rightarrow A(x)<A(\xi) \Rightarrow A(x)<0$$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(x)$ εμφανίζει δύο τοπικά ελάχιστα στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα και ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ με $\xi\in(1,2)$.

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03