**ΑΣΚΗΣΗ 1η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$ με $\alpha, \beta \in R$ και $g(x) = x^2 - 2x - 15$ .Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο

Β( – 1 , 2) , τότε

**i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

**ii.** Να προσδιορίσετε τα α, $\beta \in R$.

Για α = 2 και β = – 3

**iii.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

**iv.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

**v.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

**vi.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(3-x)-g(2)}{f(x)-3}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 2η (Παντούλας Περικλής)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln(\dfrac{1}{x})$

**a)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**b)** να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,0).

**c)** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\dfrac{3\pi}{4}$ rad

**d)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**e)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+\ln x}{x-1} = 0$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f''(x)+2\ln x+x}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}$.

**f)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M(e,f(e))

**ΑΣΚΗΣΗ 3η (Κανάβης Χρήστος)**

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ και $g(x) = \dfrac{x^4}{x}$

**1)** Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g

**2)** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f\cdot g$. Διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής από την αρχή των αξόνων;

**3)** Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x x^2}{f(x)g(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-1)x]$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-xf(x)}{x-1}$

**4)** Δίνεται συνάρτηση q με τύπο $q(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{xf(x)}-1}{e^x-1} & ,x\neq 0 \\ \ln\kappa+\dfrac{1}{2} & ,x=0 \end{cases}$, όπου k πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί ο αριθμός k ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 0. Είναι η συνάρτηση g συνεχής για $x\neq 0$;

**5)** Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^{-1}) = 1$ και $s(x) = \begin{cases} xf(x) & ,x\neq 0 \\ 1 & ,x=0 \end{cases}$, να βρεθεί ο αριθμός s ΄(0) (με τον ορισμό της παραγώγου).

**6)** Να βρεθεί η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης h.

**7)** Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f(g(x)).

**8)** Να δείξετε ότι $f'(x)\,(\ln f(x))' - \dfrac{(x+1)^2e^x}{g(x)} = -\,4\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε x > 0.

**9)** Να βρεθούν η εξισώσεις της εφαπτομένης της $C_g$ που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση

$\psi = -\dfrac{x}{3} + 1$.

**10)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f_1(x) = \dfrac{h(x)}{e^x}$ στο σημείο $M(x_o, f_1(x_o))$ και το εμβαδόν $E(x_o)$ του τριγώνου ΟΑΒ που σχηματίζεται από την ευθεία εφαπτομένης και τους άξονες x΄x , ψ΄ψ. Να βρεθεί επίσης ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(x_o)$ του τριγώνου ΟΑΒ για $x_o = 2$.

**11)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση h , x < 0.

**12)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f(g(x)), x > 0.

**13)** Δίνεται η συνάρτηση $f_2(x) = \dfrac{g(x)}{x} + \dfrac{2\alpha f(x)}{e^x} + \beta$, $x\in R^*$ και $\alpha, \beta \in R$ . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη $x_o = 2$ είναι παράλληλη στον άξονα των x, και x=1 είναι λύση της εξίσωσης $f_2(x) = 0$, να αποδείξετε ότι α = 8 και β= - 17. Έπειτα για τις τιμές των α και β που βρήκατε να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**ΑΣΚΗΣΗ 4η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ , $x > 0$. Στη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)f(x) & ,x>0 \\ \alpha & ,x=0 \end{cases}$

**i.** Να βρείτε το $\alpha \in R$ η συνάρτηση $g$ να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α(1,1) είναι κάθετη στη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.

**iii.** Από τυχαίο σημείο Μ(x,ψ) της $C_f$ φέρνουμε παράλληλες ευθείες στους άξονες x΄x και ψ΄ψ οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ για τις οποίες η απόσταση ΒΓ γίνεται ελάχιστη.

**ΑΣΚΗΣΗ 5η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + \alpha^2 - 4\alpha$ όπου $\alpha \in R$. Να αποδείξετε οτι:

**i.** Η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

**ii.** Το τοπικό ελάχιστο της f είναι μικρότερο από το τοπικό μέγιστο για κάθε τιμή του $\alpha \in R$.

**iii.** Υπάρχει ακριβώς μια τιμή $x_o$ για την οποία η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $M(x_o , f(x_o))$, έχει το μεγαλύτερο συντελεστή διεύθυνσης.

**iv.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 6η (Τσιφάκης Χρήστος)**

Ένας βιομήχανος μπορεί να στείλει αμέσως σε πελάτες φορτίο 200 τόνων με κέρδος 30000 ευρώ τον τόνο .Αν καθυστερήσει λίγο καιρό θα προσθέτει στο φορτίο 10 τόνους την εβδομάδα αλλά το κέρδος του θα μειώνεται κατά 1000 ευρώ τον τόνο κάθε εβδομάδα από όλο το φορτίο . Πότε πρέπει να στείλει το φορτίο ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος;

**ΑΣΚΗΣΗ 7η (Απόκης Γιώργος)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\, e^{\alpha x + \alpha}$ , $\alpha > 0$..

**i)** Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $f''(\frac{1}{\alpha}) - \alpha f'(\frac{1}{\alpha}) - \alpha^2 f(\frac{1}{\alpha}) = 0$.

**ii)** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ(0,f(0)) να σχηματίζει γωνία $45^o$ με τον x΄x.

**iii)** Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

**iv)** Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ελάχιστο της f να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

**ΆΣΚΗΣΗ 8η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = α + β\sqrt{x}$ , $x > 0$ και $α, β \in R$.

**i.** Να βρείτε τις τιμές των $α, β \in R$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $f(4) = 5$ και $f'(9) = \dfrac{1}{3}$

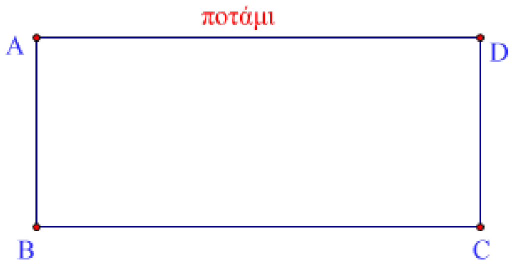
**ii.** Για $α = 1$ και $β = 2$ να βρείτε

**α.** το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)-3}$

**β.** Το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Α(3,1).

**ΑΣΚΗΣΗ 9η (Απόκης Γιώργος)**

Η πλευρά ΑΔ ορθογωνίου οικοπέδου ΑΒΓΔ μεταβλητών διαστάσεων συνορεύει με ένα ποτάμι. Ο ιδιοκτήτης πρόκειται να περιφράξει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Το κόστος για τις πλευρές ΑΒ, ΓΔ είναι 3 ευρώ ανά μέτρο, ενώ για την ΒΓ είναι 4 ευρώ ανά μέτρο. Πώς πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις του οικοπέδου ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδόν, με δεδομένο ότι ο ιδιοκτήτης θα διαθέσει 120 ευρώ για την περίφραξη;




**ΑΣΚΗΣΗ 10η (Παντούλας Περικλής)**

Έστω ότι η ευθεία (ε) : $ψ = -2x + 14$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^3 + βx^2 - 9x + 10$ στο $x_0 = -1$.

**1.** Να βρείτε τις τιμές των α και β

**2.** Για $α = 1$ και $β = -2$

**i.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία $ψ = -9x$.

**ii.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x

**iii.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$

**iv.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{2x-1}-1}$

**ΑΣΚΗΣΗ 11η (Απόκης Γιώργος)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{x^2-2\alpha x+\alpha+2}$ , α, β$\in$ R.

**α)** Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πεδίο ορισμού να είναι $A_f$ = R.

**β)** Για τη μεγαλύτερη ακέραια από τις τιμές του α ώστε $A_f$ = R, να βρεθεί η τιμή του β ώστε το σημείο Κ(3, $\frac{1}{6}$) να ανήκει στη $C_f$.

**γ)** Για α = 1 και β = -2:

**i)** Να μελετήσετε τη μονοτονία, τις θέσεις και το είδος ακροτάτων της f.

**ii)** Να βρεθούν τα σημεία Μ, Ν της $C_f$ με τεταγμένη $-\frac{2}{3}$.

**iii)** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία Μ, Ν καθώς και το σημείο τομής τους.

**ΑΣΚΗΣΗ 12η (Απόκης Γιώργος)**

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R για τις οποίες ισχύουν, για κάθε x$\in$R οι σχέσεις:

$f(x) + 3x\,g(x) = 19x^2 - 17x$ και $xf(x) - 2g(x) = x^3 + x^2 - 12x + 12$

**α)** Να βρείτε τους τύπους των f, g καθώς και τα κοινά σημεία των $C_f$ , $C_g$

**β)** Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x) = x\,f(x) - \frac{1}{6}g(x)$

**γ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf'(x)-3}{x^3+g(x)-1}$

**ΆΣΚΗΣΗ 13η (Κανάβης Χρήστος)**

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -e^{-\alpha}x^{\alpha} + \dfrac{\alpha+1}{e}\ln(\alpha+e^x)$ με α$\in$Z

**Α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

**Β)** Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^2-1}{x-1}-1 = 1$, να βρεθεί ο αριθμός α.

Για α = 1

**Γ)** Να δείξετε ότι $f'(-x) + f'(x) = 0$ για κάθε x$\in$R.

**Δ)** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

**ΑΣΚΗΣΗ 14η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ και $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1} & ,x \neq 1 \\ \alpha + 6 & ,x = 1 \end{cases}$

**α.** Να βρείτε το σημείο στο οποίο η $C_f$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

**β.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$.

**γ.** Να βρείτε το $\alpha \in R$ ώστε η $g$ να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

Για $\alpha = 1$

**δ.** Να δείξετε ότι η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $g$ στο $x_o = 1$

**ε.** Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\mu \in R$ ώστε να ισχύει: $\mu^2 g'(-2) + \mu g'(2) + 32 > 0$.

**ΑΣΚΗΣΗ 15η (Απόκης Γιώργος)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 6\beta x + 1$, $\alpha, \beta \in R$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$.

**α)** Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$

**β)** Για $\alpha = 3$ και $\beta = 6$:

**i)** Να βρείτε το σημείο της $C_f$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ο ελάχιστος.

**ii)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-5)}}{\sqrt{6}(x+5)}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 16η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5$, $x \in R$ και $\alpha, \beta \in R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,7)$.

**i.** Αν η εφαπτομένη της $C_f$ στο $A(0,7)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $\psi = 1 - x$, να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 1$

**ii.** Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = 1$, με $x \in R$

**iii.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**iv.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f ,στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

**v.** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x) - 2e^x}{x^2 - 25} = -\dfrac{1}{10}$

**ΑΣΚΗΣΗ 17η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x^2+\beta x}$ , $x \in R$ και $\alpha$ , $\beta \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,e^3)$ και $B(-1, e)$.

**i.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

**ii.** Να βρεθεί το σημείο τομής της $C_f$ με τον άξονα ψ'ψ.

**iii.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει αυτή με τους άξονες.

**iv.** Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f'(x)(4x+1)^2 + 4f(x)$ .

**v.** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x = 2$

**ΑΣΚΗΣΗ 18η (Ηλίας Καμπελής)**

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha$ , $\beta \in R$.

**i)** Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

**ii)** Αν $f'(1) + f(2) = 5$ και $f'\left(\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-5x+6}\right) = 0$ , να βρείτε τις τιμές των $\alpha$ , $\beta$.

**iii)** Για $\alpha = 12$ και $\beta = 1$ να βρείτε:

**α)** το πρόσημο της $f'$.

**β)** την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(\kappa,\lambda)$ όπου $\kappa$ , $\lambda$ είναι στοιχεία του συνόλου $\{-1, 0, 1\}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 19η (Παντούλας Περικλής)**

Έστω $f(x) = x^2 + (3 - \alpha)x - (\alpha + 5)$. Για ποια τιμή του $\alpha$ το άθροισμα τετραγώνων των ριζών της f είναι ελάχιστο;

**ΑΣΚΗΣΗ 20η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\kappa(x-1)} - x$ , $x \in R$ , $\kappa \in R$.

**α.** Να βρεθούν $f'$ και $f''$.

**β.** Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in R$, ώστε να ισχύει $f''(x) - 2f'(x) + e^{\kappa(x-1)} = 2$.

**γ.** Αν $\kappa = 1$, τότε

**i.** να δείξετε ότι ο άξονας x'x εφάπτεται στην καμπύλη της f στο σημείο $M(1,f(1))$.

**ii.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

**iii.** Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in R$.

**ΑΣΚΗΣΗ 21η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1)$ , $x \in R$

**i.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**ii.** Αν $\alpha > \beta > 1$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} > \ln\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f'(x) - x + \lambda$ , $x \in R$ και $\lambda \in R$.

**iii.** Να μελετήσετε την $g$ ως προς την μονοτονία

**iv.** Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της $g$

**v.** Να βρείτε το $\lambda \in R$, ώστε το τοπικό μέγιστο της $g$ να είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο της $g$

**ΑΣΚΗΣΗ 22η (Τσιφάκης Χρήστος)**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ, f, g με $f(1) = f'(1) = 1$ και $\varphi(x) = f(g(x))$ με $g(x) = \ln x + x$ , $x > 0$

**α)** Να δείξετε ότι: $g(1) = \varphi(1) = 1$ και $g'(1) = \varphi'(1) = 2$

**β)** Να εξετάσετε αν η $g(x)$ έχει ακρότατα στο διάστημα $(0, +\infty)$

**γ)** Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)+h+1-g(1)}{h}$

**δ) i)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων $(\varepsilon_1)$ , $(\varepsilon_2)$ των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους $A(1,\varphi(1))$ και $B(1,f(1))$ αντίστοιχα

**ii)** Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η $(\varepsilon_2)$ με τον άξονα x'x.

**ΑΣΚΗΣΗ 23η (Apotin)**

Έστω $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$.

**i)** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

**ii)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η εφαπτομένη της $C_f$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία.

**iii)** Να βρείτε το σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης καθώς και την τιμή του ελάχιστου συντελεστή διεύθυνσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 24η (Παντούλας Περικλής)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

**i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, την f′ και την f′′

**ii)** Να βρείτε τη μονοτονία της f′

**iii)** Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_f$ στην αρχή των αξόνων

**iv)** Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f′

**v)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και δείξτε ότι η f έχει ολ. ελάχιστο το οποίο να βρείτε

**vi)** Να αποδείξετε ότι $x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ για κάθε $x > -1$.

**vii)** Να λύσετε την εξίσωση $x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

**ΑΣΚΗΣΗ 25η (Παντούλας Περικλής)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2ax} + 7$.

**A)** Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει $f'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

**B)** Να βρεθεί συναρτήσει του α, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 0$.

**C)** Για α >0 να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της εφαπτομένης ευθείας με τους άξονες συντεταγμένων.

**D)** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΟΒ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες για $a = \frac{1}{3}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 26η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο
$x(t) = t^3 + \kappa t^2 + \lambda t$ με $t \in [0,10]$ , $\kappa , \lambda \in R$ όπου το t μετριέται σε sec και το x σε μέτρα (m)

**α.** Αν την χρονική στιγμή t = 1 sec η ταχύτητα είναι $u(1) = 9\ \frac{m}{s}$ και η επιτάχυνση $a(1) = -12\ \frac{m}{s^2}$ , να βρείτε τις τιμές των $\kappa , \lambda \in R$.

Για κ = - 9 και λ = 24 να βρείτε:

**β.** Πότε το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι $9\ \frac{m}{s}$;

**γ.** Τα χρονικά διαστήματα κατα τα οποία το σημείο κινείται κατά την θετική ή αρνητική κατεύθυνση.

**δ.** Πότε το σημείο μένει ακίνητο;

**ε.** Πότε η ταχύτητα του σημείου αυξάνεται και πότε μειώνεται;

**στ.** Πότε η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη και πότε μέγιστη;

**ζ.** Ποίο το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησής του;

**η.** Ποιά η μετατόπιση του από την αρχική θέση;

**ΆΣΚΗΣΗ 27η (Κανάβης Χρήστος)**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση στο R με $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$ και η συνάρτηση $f(x) = e^{x^{g(0)}}$ .

**Α)** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x\, f(x)$ και $f''(x) = 2f(x)\,(2x^2 + 1)$

**Β) 1)** Να δείξετε ότι $\lim_{x\to g(0)} \dfrac{\ln f(x) - \dfrac{f'(x)}{f(x)}}{x - g(0)} = \lim_{x\to 0} g(x)$

**2)** Να υπολογίσετε τα όρια

**i)** $\lim_{x\to 0} \left| \dfrac{f(x) - g(x)}{g^2(x)} \right|$ **ii)** $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x) - f'(x)}{x - \dfrac{1}{2}}$ **iii)** $\lim_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{\dfrac{f''(x)}{f(x)} - 11}{2x - 3}$ **iv)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 1}{\sqrt{f(x)} - 1}$

**Γ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ είναι της μορφής $\psi = e^{x_o^2}\, 2x_o\, x + e^{x_o^2} - 2\, x_o^2 e^{x_o^2}$ . Σε ποια σημεία οι εφαπτόμενες αυτές διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

**Δ)** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της αυξάνει για κάθε $x \in R$.

**ΑΣΚΗΣΗ 28η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\,e^{\alpha x} + x + \alpha$ ,$x \in R$ και $\alpha > 0$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα ψ΄ψ.

**α.** Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $\psi = (2\alpha + 1)\,x + \alpha + 2$

**β.** Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες γίνεται ελάχιστο.

Για $\alpha = 1$

**γ.** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_f$ η οποία να σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

**δ.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f''(x) - 2}{\sqrt{\ln \dfrac{f'(x) - 1}{2}} - 1}$

**ε.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f'(x) - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}$

**στ.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένη της $C_f$ που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

**ΑΣΚΗΣΗ 29η (Κατσίποδας Δημήτρης)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 9x - x^2$, $x \in R$ και η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3} & ,x>9 \\ \kappa \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-3t^2+2t}{t^2-1} & ,x=9 \end{cases}$

**α.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}$

**β.** Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in R$ ώστε η $g$ να είναι συνεχής στο $x_o = 9$

**γ.** Με διαστάσεις $x$ και $f(x)$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $x$.

**δ.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων.

**ε.** Να βρεθεί για ποιά τιμή του $x$ η περίμετρος γίνεται μέγιστη.

**στ.** Να βρεθεί για ποιά τιμή του $x$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

**ΑΣΚΗΣΗ 30η (Κανάβης Χρήστος)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - kx$, $k \in [0,e]$

**i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**ii)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**iii)** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \ln 1$ για κάθε $x \in R$