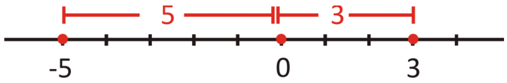
Απόλυτη Τιμή Πραγματικού αριθμού

Ερώτηση

Φανταστείτε δύο αριθμούς π.χ. τον 3 και τον – 5. Ποια είναι η απόσταση του καθενός από το 0;



Η απόσταση του 3 από το 0 είναι 3, και η απόσταση του – 5 από το 0 είναι το 5. Η απόσταση ενός αριθμού από το 0 αλλιώς ονομάζεται απόλυτη τιμή του αριθμού αυτού. Δηλαδή $|3| = 3$ και $|-5| = 5$

Γενικά η απόσταση οποιουδήποτε αριθμού x από το 0 συμβολίζεται με $|x-0|$ ή απλά $|x|$.

Παραδειγματάκι

Γενικά $|x-y|$ σημαίνει απόσταση του x από το y και συμβολίζεται $d(x, y) = |x-y|$.

Οπότε, να υπολογισθούν οι παρακάτω απόλυτες τιμές :

$|7|$, $|-2|$, $|4+6|$, $|6-4|$, $|2-3|$ και $|5-5|$

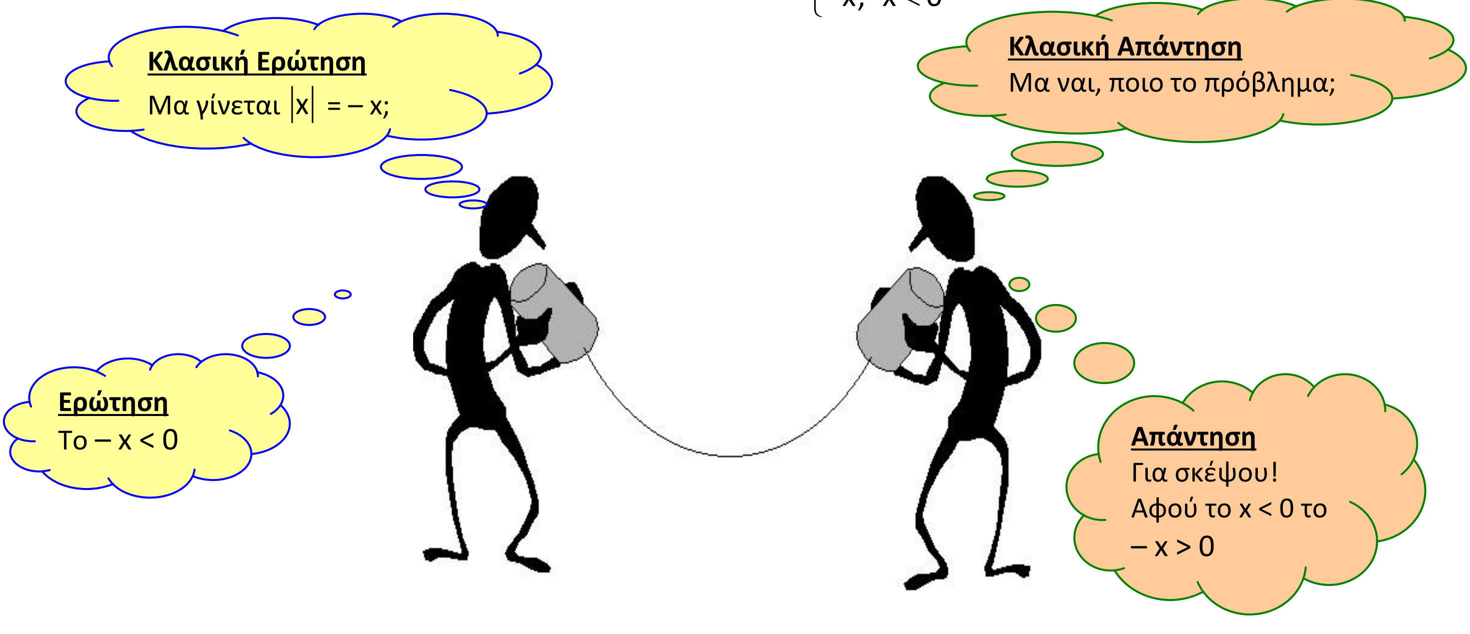
Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι όταν έχουμε $|\text{θετικού}|$ π.χ. $|3| = 3$ το εσωτερικό της απόλυτης τιμής μένει ως έχει ενώ αν έχουμε $|\text{αρνητικού}|$ π.χ. $|-5| = 5$ δηλαδή μετά το αντίθετο του εσωτερικού.

Γιατί αυτό;

$|\text{αριθμός}| = \text{απόσταση} \geq 0$

Οπότε γίνεται $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



Κατάλαβα. Όμως πώς αφαιρούμε μια απόλυτη τιμή αν περιέχει κάτι περισσότερο από ένα απλό αριθμό;

✍ Παράδειγμα

Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής :

α. $|\pi-2|$ **β.** $|\sqrt{3}-2|$ **γ.** $|x^2+5|$ **δ.** $|x^2+2x+3|$

ε. $|-x^2+2x-2|$

🕮 Λύση

α. Για το $|\pi-2|$

π=3,1415…. π > 2. Άρα π – 2 >0

Οπότε $|\pi-2|$ = π – 2

β. Για το $|\sqrt{3}-2|$

$\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Άρα $\sqrt{3} - 2 < 0$

Οπότε $|\sqrt{3}-2| = -\left(\sqrt{3}-2\right) = 2-\sqrt{3}$

γ. Για το $|x^2+5|$

$x^2 \geq 0$. Άρα $x^2+5 \geq 5 > 0$

Άρα $|x^2+5| = x^2+5$

δ. Για το $|x^2+2x+3|$; Εδώ τα πράγματα είναι κάπως δυσκολότερα!

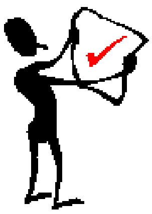
Για να δούμε λοιπόν. Το $x^2+2x+3 = \underbrace{x^2+2x+1}_{\text{ταυτότητα}} + 2 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 0$

Άρα $|x^2+2x+3| = x^2+2x+3$

ε. Για το $|-x^2+2x-2|$; Το $-x^2+2x-2 = -(x^2-2x+2) = -(x^2-2x+1)-1$

$= \underbrace{-(x-1)^2}_{\leq 0} - 1 \leq -1 < 0$

Άρα το $|-x^2+2x-2| = -\left(-x^2+2x-2\right) = x^2-2x+2$



Για να δούμε τώρα εσείς πως θα τα πάτε!!!!

⌛ Εξάσκηση

Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

Α = $|4-\pi|$ **Β =** $|3-\sqrt{3}|+|\sqrt{2}-3|$ **Γ =** $|x^2+7|$

Δ = $|x^2-4x+6|$ **Ε =** $|-x^2+6x+10|$ **ΣΤ=** $||x|-x|-||x|+x|$

Ναι αλλά δεν τελειώσαμε ακόμα !!!!!

(Εργασία Κατ' οίκον)

Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

Α= $|2-\pi|-|3-\pi|-|4-\pi|$ **Β=** $|x^2+4|-|x^2+4x+10|+|-x^2-5|$

Παράδειγμα

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να γραφούν οι παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α. $|x|$, αν $x \geq 0$

β. $|x-3|$, αν $x \geq 3$

γ. $|x+2|$, αν $x < -2$

δ. $|x-3|$, αν $x < 1$

ε. $|x-2|-|x+3|$, αν $-3 < x < 2$

στ. $|x-1|+|x-2|-|x-3|-|x|$, $1 < x < 2$

Λύση

Το μυστικό κρύβεται στην εύρεση του πρόσημου του εσωτερικού κάθε απόλυτης τιμής. Οπότε :

α. Αφού $x \geq 0$ θα είναι $|x| = x$.

β. Αφού $x \geq 3 \Leftrightarrow x-3 \geq 0$. Άρα $|x-3| = x-3$

γ. Αφού $x < -2 \Leftrightarrow x+2 < 0$. Άρα $|x+2| = -x-2$

δ. Αφού $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$ άρα και το $x-3 < 0$. Οπότε $|x-3| = -(x-3) = 3-x$

ε. Αφού $-3 < x < 2 \rightarrow \begin{bmatrix} \rightarrow x+3>0 \\ \rightarrow x-2<0 \end{bmatrix} \rightarrow |x-2|-|x+3| = -(x-2)-(x+3) =$

$= -x+2-x-3 = -2x-1$.

στ. Αφού $1 < x < 2 - \begin{bmatrix} \rightarrow x-1>0 \\ \rightarrow x-2<0 \end{bmatrix}$. Επίσης αφού $x-2<0$ θα είναι και $x-3<0$

Τέλος αφού $x-1>0$ άρα και $x>0$.

$x-1>0$ $x-2<0$ $x-3<0$ $x>0$

Οπότε $|x-1|+|x-2|-|x-3|-|x| = x-1-(x-2)-[-(x-3)]-x =$

$= x-1-x+2+x-3-x = -2$

Για να δούμε τώρα πώς σας φάνηκαν τα παραπάνω!!!

Εφαρμογή

Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Α. $|x-4|$, αν $x \geq 4$

Β. $|2-x|$, αν $x \geq 2$

Γ. $|x-7|$, αν $x > 8$

Δ. $|x-3|-|x-4|$, αν $3 < x < 4$

Ε. $|x+2|-|x-1|-|x-2|$, αν $-2 < x < 1$

ΣΤ. $|x-5|$

Ουπς!! Εδώ τι γίνεται;

HOMEWORK

Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

α. $|x-6|$, αν $x \leq 6$

β. $|7-x|$, αν $x \geq 7$

γ. $|x-10|$, αν $x > 13$

δ. $|x+2|-|x-5|$, αν $-2 < x < 5$

ε. $|x-5|-|x+1|-|x+2011|$, αν $-1 < x < 5$

στ. $|x+3|$

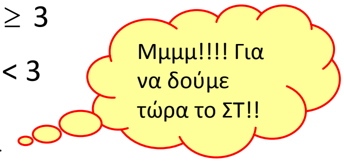
Προσοχή!!!!!!

Αν σε μία απόλυτη τιμή, δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του εσωτερικού της, τότε παίρνουμε αναγκαστικά δύο περιπτώσεις :

π.χ. $|x-3| = x-3$ αν το $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$|x-3| = (x-3)$ αν το $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$

Οπότε $|x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ αν το } x \geq 3 \\ -x+3, \text{ αν } x < 3 \end{cases}$



Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών

Όπως συμβαίνει στις περισσότερες νέες έννοιες, έτσι και οι απόλυτες τιμές έχουν τις ιδιότητές τους. Για να τις δούμε λοιπόν:

- $|x| \geq 0$ ← Λογικό αφού η απόλυτη τιμή εκφράζει απόσταση η οποία είναι **μη αρνητική.**
- $|-x| = |x|$ ← Λογικό π.χ. $|-3| = 3 = |3|$
- $|x| \geq x$ ← π.χ. $\left.\begin{matrix} \text{αν } x=3 \text{ και } |x|=3, \text{ τότε } |x|=x \\ \text{αν } x=-3 \text{ και } |x|=3, \text{ τότε } |x|>x \end{matrix}\right\}$ άρα γενικά $|x| \geq x$
- $|x| \geq -x$ ← π.χ. $\left.\begin{matrix} \text{αν } x = 5 \text{ και } |x|= 5, \text{ τότε } |x|> -x \\ -x = -5 \\ \text{αν } x = -5 \text{ και } |x|= 5, \text{ τότε } |x|= -x \\ -x = 5 \end{matrix}\right\}$ άρα γενικά $|x| \geq -x$

  Οπότε $-|x| \leq x \leq |x|$

- $|x+y| \leq |x|+|y|$ ← π.χ.

  αν x = 3, y = 2 $\begin{cases} |x+y|=5 \\ |x|+|y|=5 \end{cases}$

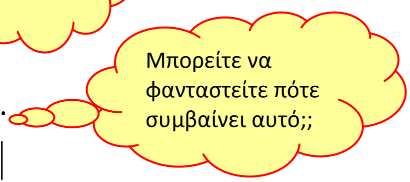
  αν x = -3, y = -2 $\begin{cases} |x+y|=5 \\ |x|+|y|=5 \end{cases}$ Άρα $|x + y| = |x|+|y|$

  αν x = -3, y = 2 $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=5 \end{cases}$ Άρα $|x+y| < |x|+|y|$

  Άρα γενικά $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Παρατήρηση **1.** Η παραπάνω σχέση ισχύει και με τη μορφή $|x-y| \leq |x|+|y|$.

2. Κάποιες φορές ισχύει μόνο το ίσον. Δηλαδή $|x+y| = |x|+|y|$



- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ και

- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

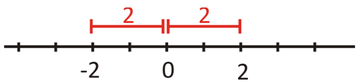
Εντάξει όλα καλά μέχρι εδώ. Όλα αυτά τα χρόνια μαθαίναμε να λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις. Εδώ τι γίνεται;

Ερώτηση

Όταν μας ζητάνε να λύσουμε την εξίσωση $|x| = 2$, τι ακριβώς μας ζητάνε;

Απάντηση

Μας ζητάνε να βρούμε όλους αυτούς **τους αριθμούς που η απόστασή τους από το μηδέν είναι 2**.



Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί που απέχουν από το μηδέν απόσταση ίση με 2, είναι οι 2 και – 2.

Πάμε να δούμε ένα καλό παράδειγμα…

Παράδειγμα

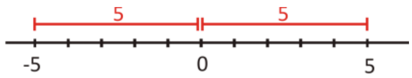
Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|x| = 5$ **β.** $|-x| = 7$ **γ.** $|x| = 0$ **δ.** $|x| = -2$

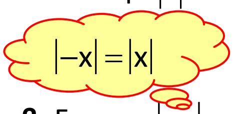
ε. $|x-3| = 2$ **στ.** $|x^2+1| = 5$ **ζ.** $|x-2|+|2-x| = 4$ **η.** $d(x, -1) = 3$

Λύση

α. Για την $|x| = 5$



Άρα $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$



β. Για την $|-x| = 7 \Leftrightarrow |x| = 7$

Άρα $|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7$ ή $x = -7$

γ. Για την $|x| = 0$ προφανώς $x = 0$ μια που ο αριθμός που απέχει απόσταση από το 0 ίση με το 0 είναι το 0.

δ. Για την $|x| = -2$ δεν θα μπορούσε να υπάρχει **ευκολότερη αλλά και συντομότερη**!!!

Μα γίνεται ποτέ μια απόσταση να είναι αρνητική;

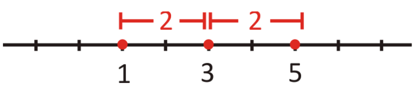
Όχι φυσικά. Άρα η $|x| = -2$ είναι αδύνατη …

ε. $|x-3| = 2$

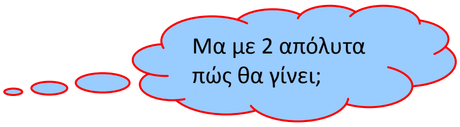
Ψάχνουμε όλους αυτούς τους αριθμούς που η απόστασή τους από το 3 να είναι 2.

Άρα οι αριθμοί αυτοί είναι 0, 1 και 5.

Οπότε $|x-3| = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$.

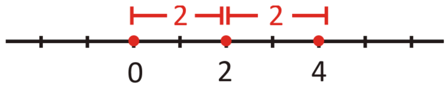


στ. $|x^2+1| = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$ Εδώ δεν θέλει κόπο αφού $x^2+1>0$.

ζ. $|x-2|+|2-x| = 4$ 

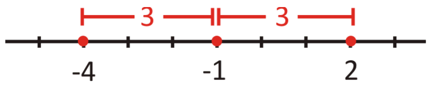
<u>Τα δύο απόλυτα, είναι φαινομενικά δύο</u>. Παρατηρήστε ότι $|2-x| = |-(x-2)| = |x-2|$

Άρα $|x-2|+|x-2| = 4 \Leftrightarrow 2|x-2| = 4 \Leftrightarrow |x-2| = 2$



Άρα οι $x = 0$ ή $x = 4$

η. $d(x, -1) = 3 \Leftrightarrow |x-(-1)| = 3 \Leftrightarrow |x+1| = 3$



Άρα οι $x = -4$ ή $x = 2$

Αν γενικεύσουμε τα παραπάνω, βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα.

Δηλαδή για $\boxed{\rho > 0,\ |x| = \rho \Leftrightarrow x = \rho \text{ ή } x = -\rho}$

και γενικά αν $\rho > 0$, $|x - \kappa| = \rho \Leftrightarrow x - \kappa = \theta$ ή $x - \kappa = -\theta$

$x = \kappa + \theta$ ή $x = \kappa - \theta$

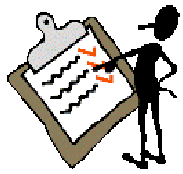
Εφαρμογή

Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $|x| = 6$ **β.** $|x+4| = 0$ **γ.** $|x-3| = -2$ **δ.** $|2x-7| = 1$

ε. $|x^2+4| = 5$ **στ.** $|x-4| = 5$ **ζ.** $d(x, 1) = 2$ **η.** $|x-3| = 4$ αν $x \geq 3$

Πάμε να δούμε και μερικές ανισωσούλες …

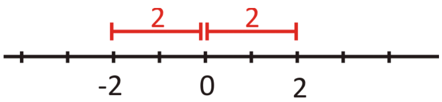


Ερώτηση

Όταν μας ζητάνε να λύσουμε την ανίσωση $|x| \leq 2$, ξέρετε τι ακριβώς μας ζητάνε;

Απάντηση

Μας ζητάνε να βρούμε όλους αυτούς τους αριθμού ***που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη ή ίση του 2.***



Παρατηρούμε ότι όλοι αυτοί οι αριθμοί που ψάχνουμε, "σαρώνουν" όλη την περιοχή από το -2 ως το 2.

Άρα $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Ας δούμε όμως και εδώ ένα παραδειγματάκι.

Παράδειγμα

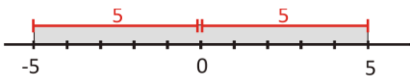
Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α. $|x| \leq 5$ **β.** $|x| < 3$ **γ.** $|x-4| \leq 3$ **δ.** $|x| < -2$

ε. $|x+3| \leq 0$ **στ.** $||x+1|-3|-1-x| \geq -4$ **ζ.** $d(|x|, x) \leq 0$

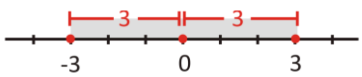
Λύση

α. Για την $|x| \leq 5$ έχουμε



Άρα $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

β. Για την $|x| < 3$ έχουμε



Άρα $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

γ. Για την $|x-4| \leq 3$ έχουμε

Δηλαδή ψάχνουμε όλους τους αριθμούς που απέχουν από το 4 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

Δηλαδή $|x-4| \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$

Άλλη μια εύκολη.

δ. $|x| < -2$.

Απόσταση μικρότερη του – 2;;;

Αδύνατη

Να και μια "κρυφοεξίσωση"!!

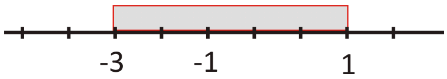
ε. $|x+3| \leq 0$. Το $|x+3| < 0$ δεν γίνεται.

Όμως $|x+3| = 0$ γίνεται όταν x + 3 = 0 δηλ. x = – 3

$|-1-x| = |1+x|$

στ. $|x+1| - 3|-1-x| \geq -4 \Leftrightarrow |x+1-3|x+1|| \geq -4 \Leftrightarrow -2|x+1| \geq -4 \Leftrightarrow$

$|x+1| \leq 2$



οπότε $|x+1| \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

ζ. $d(|x|, x) \leq 0 \Leftrightarrow ||x| - x| \leq 0$

Ωχ!! Τι κάνουμε εδώ;

Μήπως πρέπει να ανατρέξετε στις ιδιότητες $|x| \geq x$;

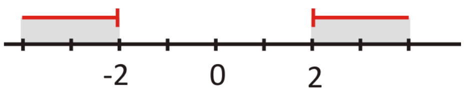
Άρα $|x| - x \geq 0$ Οπότε

$$||x| - x| \leq 0 \Leftrightarrow |x| - x \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq x \begin{cases} |x| < x \text{ αδύνατη} \\ |x| = x \rightarrow \text{ ισχύει για } x \geq 0 \end{cases}$$. Άρα x ≥ 0

Οπότε γενικά αν $\boxed{\rho > 0,\ |x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho}$

Ερώτηση

Και τι γίνεται με την εξίσωση $|x| \geq 2$;



Αφού ψάχνουμε όλους τους αριθμούς που απέχουν από το 0 απόσταση 2 ή μεγαλύτερη του 2. Άρα $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \leq -2$

Πάμε να δούμε άλλο ένα παραδειγματάκι!!!

Παράδειγμα

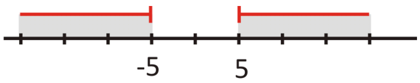
Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $|x| \geq 5$ **β.** $|x| > 4$ **γ.** $|x-2| \geq 7$ **δ.** $|x| \geq 0$

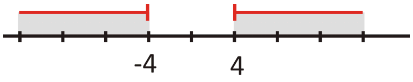
ε. $|x| > 0$ **στ.** $|x-3| > -1$ **ζ.** $|x-2| - 3|2-x| < -6$

Λύση

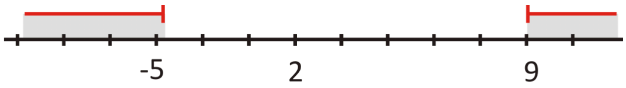
α. Για την $|x| \geq 5$ έχουμε



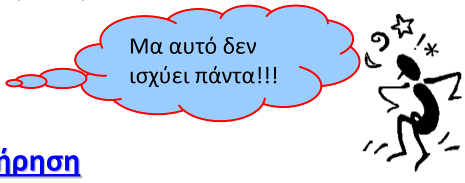
δηλ. $x \leq -5$ ή $x \geq 5$

β. Για την $|x| > 4$ έχουμε  Άρα $x > 4$ ή $x < -4$.

γ. Για την $|x-2| \geq 7$ ψάχνουμε όλους τους αριθμούς που απέχουν από το 2 απόσταση ίση ή μικτότερη του 7. Άρα $|x-2| \geq 7 \Leftrightarrow x \leq -5$ ή $x \geq 9$.



δ. $|x| \geq 0$

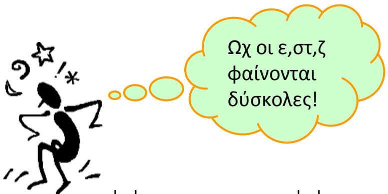


Ναι. Άρα το $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in IR$

Παρατήρηση

Γενικά κάθε απόλυτη τιμή είναι μη αρνητική. Άρα κάθε ανίσωση της μορφής $|κάτι| \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τι γίνεται όμως με την περίπτωση $|κάτι| > 0$;

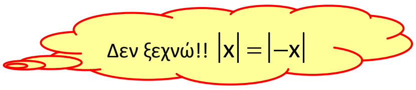


ε. Για την $|x| > 0$ ψάχνω όλους τους x για τους οποίους $|x| > 0$ και όχι $|x| \geq 0$. Τι σημαίνει $|x| \geq 0$; Ψάχνω όλα τα x ώστε $|x| > 0$ αλλά όχι $|x| = 0$. Τώρα όμως $|x| = 0$ αν $x = 0$. Οπότε πρέπει $|x| \neq 0$.

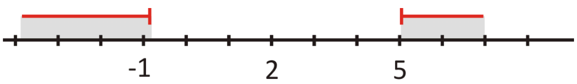
στ. $|x-3| > -1$

Αφού $|x-3| \geq 0$ για κάθε x άρα και $|x-3| > -1$ για κάθε $x \in IR$.

ζ. $|x-2| - 3|2-x| < -6$.



Άρα $|x-2| - 3|x-2| < -6 \Leftrightarrow -2|x-2| < -6 \Leftrightarrow 2|x-2| > 6 \Leftrightarrow |x-2| > 3$.

Άρα $|x-2| > 3 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 5$. 

Οπότε γενικά αν $\boxed{\rho > 0,\ |x| > \rho \Leftrightarrow x > \rho \text{ ή } x < -\rho}$

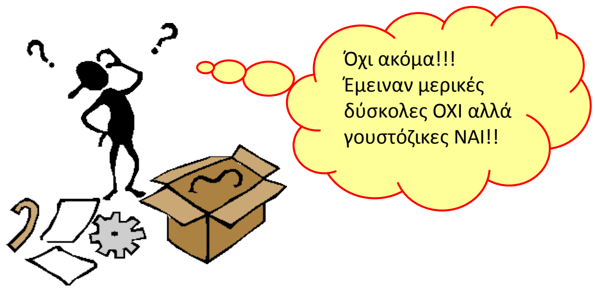
Για να δούμε πώς πήγε το παράδειγμα!!!

Εφαρμογή

Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $|x| \geq 2$ **β.** $|x| > 7$ **γ.** $|x+4| > 6$ **δ.** $|x+3| \geq 0$

ε. $|x-6| > 0$ **στ.** $|x+2| \geq -6$ **ζ.** $|4-3x| - 2|3x-4| < -7$



Παράδειγμα

Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|x-3|+|y+2|=0$ **β.** $|x-4|+|x+2|=0$

γ. $|x^2-4|+3|x+2|=0$ **δ.** $|x-3| = |x+5|$

ε. $|x-3| = x-3$ **στ.** $|x-2| = 2-x$

Λύση

α. $\underbrace{|x-3|}_{\geq 0}+\underbrace{|y+2|}_{\geq 0}=0.$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αφού έχω άθροισμα απόλυτων τιμών ίσο με το 0, πρέπει κατ' ανάγκη και οι δύο απόλυτα να είναι ίσα με μηδέν.

Άρα πρέπει $|x-3| = 0$ και $|\psi+2|=0$

$x - 3 = 0$ $\psi + 2 = 0$

$\underline{x = 3}$ και $\underline{\psi = -2}$

β. Για την $|x-4|+|x+2|=0$ πρέπει <u>συγχρόνως</u> οι $|x-4| = 0$ και $|x+2| = 0$

$x = 4$ και $x = -2$

Άρα, τι συμπεραίνετε; Ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις;

Μάλλον όχι. Η εξίσωση είναι **<u>αδύνατη</u>**.

γ. Για την $|x^2-4|+3|x+2|=0 \Leftrightarrow |(x-2)(x+2)|+3|x+2|=0$

Πρέπει $(x-2)(x+2) = 0$ και $x + 2 = 0$

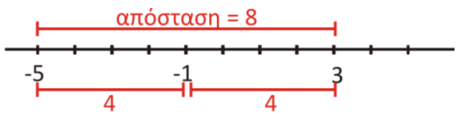
$x = 2$ ή $x = -2$ και $x = -2$

Παρατηρούμε ότι η μόνη τιμή που μηδενίζει και τις δύο απόλυτες τιμές είναι το $x = -2$.

<u>1ος Τρόπος</u>

δ. Για την $|x-3| = |x+5|$ ψάχνω να βρω τον αριθμό ο οποίος να ισαπέχει από το 3 και το -5.

Άρα ο μόνος αριθμός είναι ο $x = -1$.



<u>2ος Τρόπος</u>

δ. Η εξίσωση $|x| = \rho$ αν $\rho > 0$ έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την $|x|=|y|$ και $y \neq 0$

Οπότε $|x-3| = |x+5| \Leftrightarrow$ $x - 3 = x + 5$ ή $x - 3 = -(x + 5)$

$0x = 8$ ή $2x = 8$

αδύνατη $x = 4$

Μου θυμίζει $|x| = x$ αν $x \geq 0$

ε. $|x-3| = x-3$. Άρα πρέπει $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

στ. $|x-2| = 2-x \Leftrightarrow |x-2|=-(x-2)$

Άρα $x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Μου θυμίζει $|x| = -x$, δηλαδή $x \leq 0$

Εφαρμογή

Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|x+2|+|y+3|=0$ **β.** $|x-3|+|x+6|=0$ **γ.** $|x+2|+|4-x^2|=0$

δ. $|x+4| = |3-5x|$ **ε.** $|x-3| = x-3$ **στ.** $|x+4| = -4-x$