

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΤΑΞΗ: Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΑΞΗ: ΠΡΟΕΤ/ΣΙΑ Β' ΓΙΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3 ΩΡΕΣ
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

ΤΜΗΜΑ..... ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ
ΣΧΟΛΙΑ

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x}$ και $g(x) = 2 \ln x - \ln(1-x)$. Να ελέγξετε αν $f = g$. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποδιάστημα του \mathbb{R} στο οποίο $f = g$.

A2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = \ln(x-2)$. Να ορίσετε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

A3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη.

- α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας.
- β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 3x) - f(2 - 4x) > 0$.
- γ. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
- δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 - 1 και να ορίσετε την αντίστροφη της.
- ε. Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(f(e^{-2020}))$.

Μονάδες: 3 + 6 + (6 + 4 + 4 + 2) = 25

ΘΕΜΑ Β

B1. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν τα όρια:

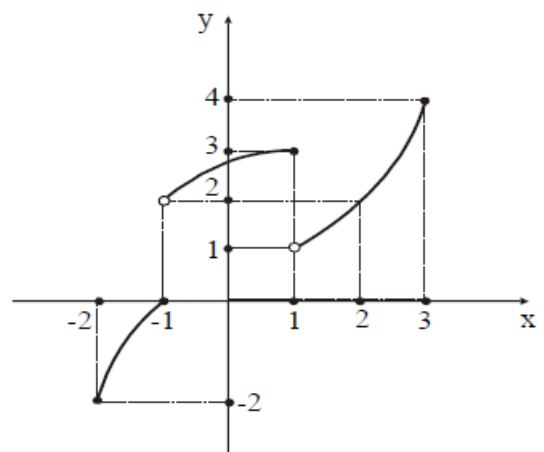
- i. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

B2. Να υπολογίσετε τα όρια:

- α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ β. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} \right)$
- γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{2 - \sqrt{3x} - 2}$ δ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{|x-1| - 2}$
- ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$ στ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

B3. α. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x + 2} = 3$.

β. Αν ισχύει $|xf(x) - x^3| \leq x^2$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



Μονάδες: 3 + 15 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{|x-2|} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x|-4}{\sqrt{x+3}} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-5}{x^2+x-2} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ αν } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{2-x}{x^3-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Γ2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x - 5) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{-2x^3 + 7} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - 2x + 3| + x - 1}{x^4 + 2x + 2}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x + 1) \quad \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$$

Γ3. α. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $f(x) = \frac{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2}{x^2 - 4x + 4}$.

β. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + x^2 + 3}{\mu x^2 - 3x + 5}$.

Μονάδες: 6 + 9 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2e^{\eta\mu x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x(x - \eta\mu x)$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-\pi, \pi)$.

Δ3. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f(1) = 2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x - 1$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x_0} (\ln x_0 + 1) = 1$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

Μονάδες: 6 + 6 + 6 + (5 + 2) = 25