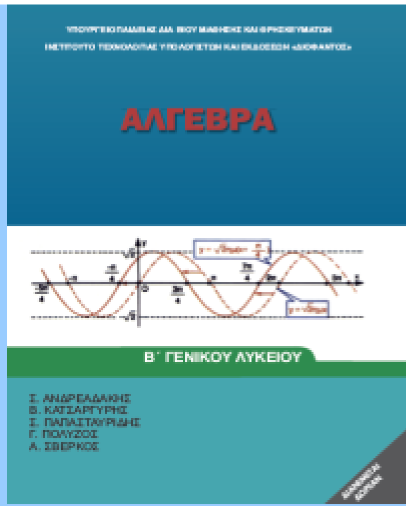
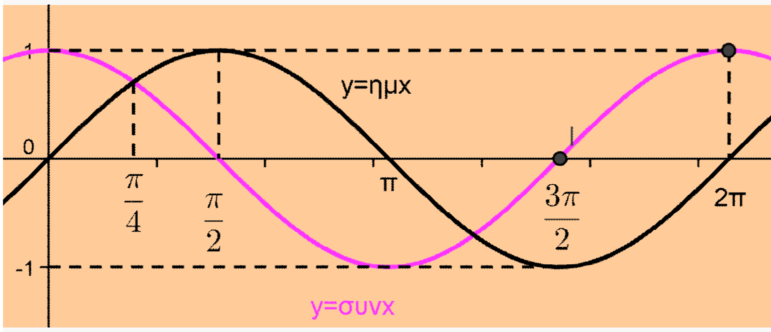
Κώστας Κουτσοβασίλης

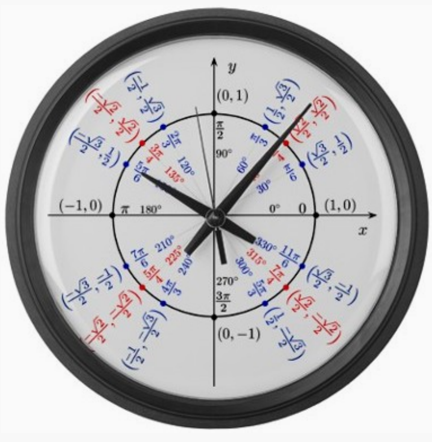


Κεφάλαιο 3ο



Τριγωνομετρία

*Σύμφωνα
με τη διδακτέα -εξεταστέα ύλη
2014-2015*



Μαθηματικές Παρουσιάσεις

http://perikentro.blogspot.gr

Το φυλλάδιο αυτό περιέχει την ύλη της Τριγωνομετρίας του $3^{ο}$ Κεφαλαίου της Άλγεβρας Β΄ Γενικού Λυκείου σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών 2014-2015.

► Είναι χωρισμένο σε διδακτικές ενότητες που η καθεμιά τους περιλαμβάνει:

- Θεωρία με τις αποδείξεις των θεωρημάτων και παρατηρήσεις με έμφαση στα σημεία που θέλουν ιδιαίτερη προσοχή.
- Λυμένα παραδείγματα με σχόλια και λεπτομέρειες που δεν διευκρινίζονται στο σχολικό βιβλίο.
- Ερωτήσεις κατανόησης για να διαπιστωθεί αν έγινε εμπέδωση της θεωρίας.
- Προτεινόμενες ασκήσεις , όχι όμως εξεζητημένες , επειδή πιστεύω ότι τέτοιες ασκήσεις λίγα θα προσέφεραν.
- Κριτήρια Αξιολόγησης.

► Επαναληπτικά Διαγωνίσματα.

Περιεχόμενα

Quelle: Deutsche Fotothek

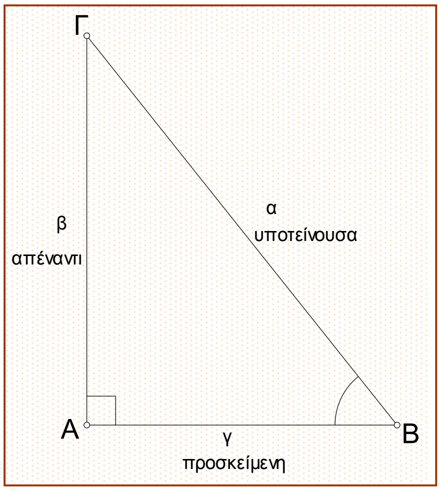
1η Ενότητα

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί**
- **Τριγωνομετρικός κύκλος**

❖ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^0$)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας Β είναι το ημίτονο (ημΒ) , το συνημίτονο(συνΒ), η εφαπτομένη (εφΒ), και η συνεφαπτομένη (σφΒ) Είναι:



$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

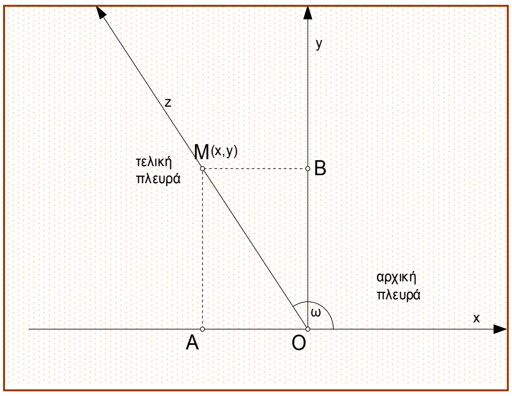
$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$$

❖ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^0 \le \omega \le 360^0$

Η γωνία ω παράγεται από τον ημιάξονα Οx όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά , δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

Αν Μ(x,y) είναι ένα σημείο ($M \neq O$) της τελικής πλευράς οποιασδήποτε γωνίας ω, ορίζουμε:

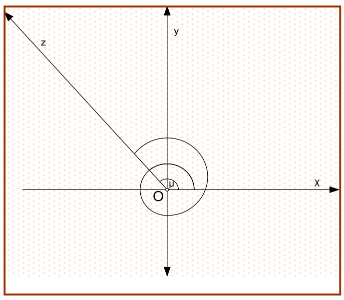


$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

❖ Γωνίες μεγαλύτερες των 360^0 –Αρνητικές γωνίες

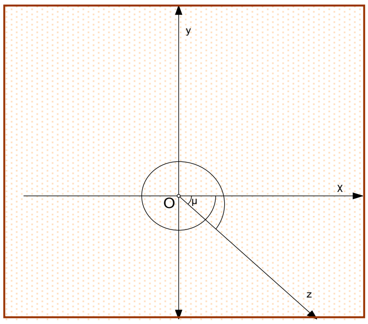


Αν ο ημιάξονας Οx κινούμενος κατά την θετική φορά διαγράψει ν ($\nu \in IN$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία μ^0 λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\nu\, 360^0 + \mu^0$$

Αν ο ημιάξονας Ox κινούμενος κατά την αρνητική φορά διαγράψει ν ($\nu \in \mathbb{N}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία μ^0 λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\mathbf{-\nu\, 360^0 - \mu^0}$$



- Οι παραπάνω γωνίες , που είναι της μορφής $\kappa\, 360^0+\omega$, $\kappa\in Z$,επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά με την γωνία ω θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή για κάθε $\kappa\in Z$ ισχύει:

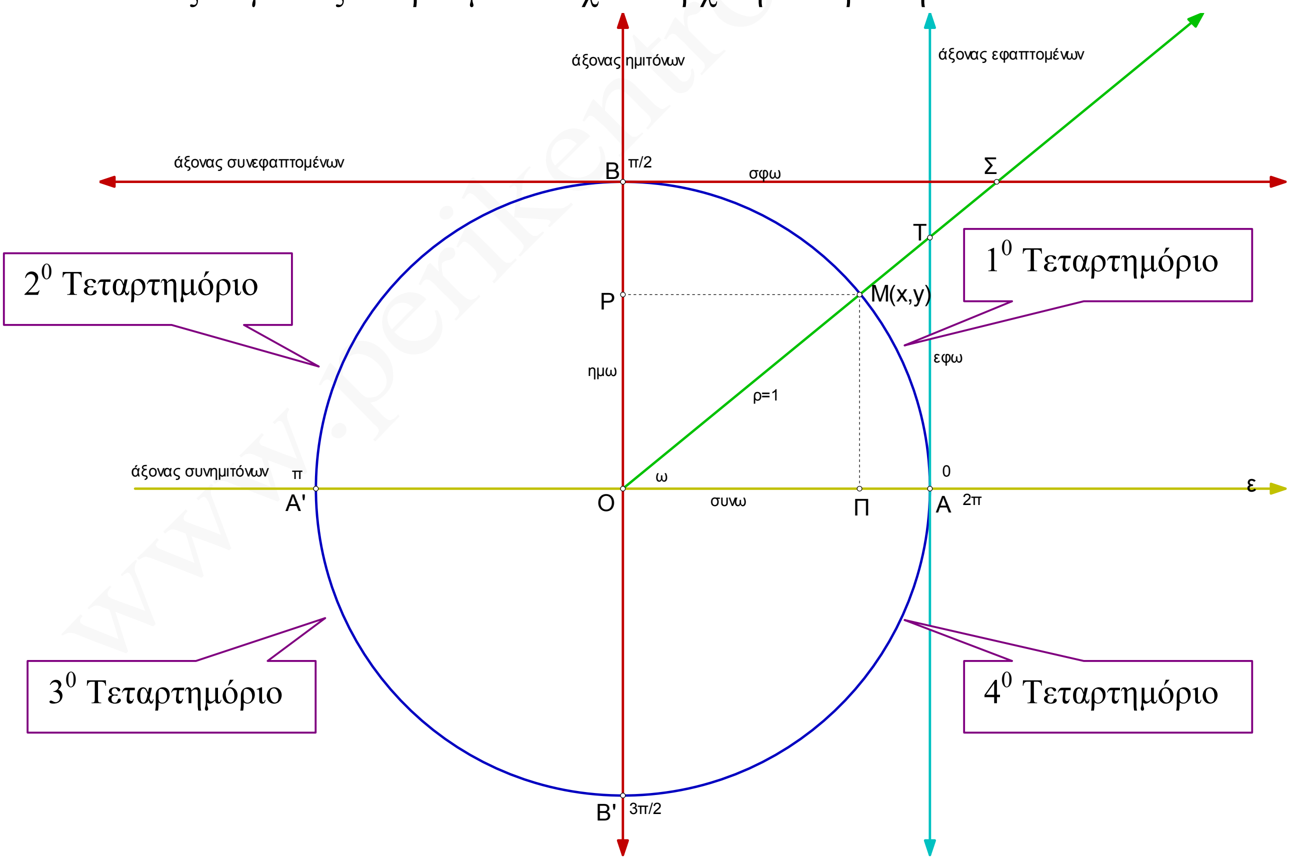
$\eta\mu(\kappa\, 360^0+\omega)=\eta\mu\omega$ $\quad$ $\varepsilon\varphi(\kappa\, 360^0+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\kappa\, 360^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$ $\quad$ $\sigma\varphi(\kappa\, 360^0+\omega)=\sigma\varphi\omega$

❖ Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος

Ορισμός: Τριγωνομετρικό κύκλο λέμε τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0,0) και ακτίνα ρ=1

✓ Ολες οι γωνίες θεωρούμε ότι έχουν αρχική πλευρά την ΟΑ



- συνω=x=τετμημένη του σημείου Μ $\quad$ $\varepsilon\varphi\omega=y_T$=τεταγμένη του σημείου Τ
- ημω=y=τεταγμένη του σημείου Μ $\quad$ $\sigma\varphi\omega=x_\Sigma$=τετμημένη του σημείου Σ

- Το **συνω** ειναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Το **ημω** ειναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Η **εφω** είναι ίση με την τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον άξονα των εφαπτομένων
- Η **σφω** ειναι ίση με την τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον άξονα των συνεφαπτομένων

❖ Εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας γραφικά

Αν θέλουμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω τότε:

- ✓ Κατασκευάζουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο
- ✓ Βρίσκουμε το σημείο τομής Μ της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο
- ✓ Από το Μ φέρνουμε κάθετες στους άξονες τον ημιτόνων και συνημιτόνων. Η τεταγμένη και η τετμημένη των σημείων αυτών αντίστοιχα είναι το ημω και συνω .
- ✓ Ενώνουμε το σημείο Μ με το Ο και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΜ προς το Μ ή προς το Ο ή προς το Ο και Μ ανάλογα σε ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο Μ . Η τεταγμένη και η τετμημένη των σημείων στα οποία η ευθεία ΟΜ τέμνει τους άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων είναι αντίστοιχα η εφω και η σφω.

❖ Παρατήρηση 1:

Ισχύει: $-1 \le συνω \le 1$ και $-1 \le ημω \le 1$

❖ Παρατήρηση 2: Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

	Τεταρτημόρια			
	1^0	2^0	3^0	4^0
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-
Μνημονικός κανόνας	Ο	Η	Ε	Σ

❖ Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Το **ακτίνιο ή rad** είναι η γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη κύκλου (Ο,ρ) βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού δηλαδή σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Αν έχουμε μια γωνία και είναι $μ^0$ και α rad τότε ισχύει:

$$\frac{α}{π} = \frac{μ}{180}$$

❖ Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0^0	0	$ημ0^0=0$	$συν0^0=1$	$εφ0^0=0$	$σφ0^0$=δεν ορίζεται
30^0	$\frac{π}{6}$	$ημ\frac{π}{6}=\frac{1}{2}$	$συν\frac{π}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$εφ\frac{π}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$σφ\frac{π}{6}=\sqrt{3}$
45^0	$\frac{π}{4}$	$ημ\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$συν\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$εφ\frac{π}{4}=1$	$σφ\frac{π}{4}=1$
60^0	$\frac{π}{3}$	$ημ\frac{π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$συν\frac{π}{3}=\frac{1}{2}$	$εφ\frac{π}{3}=\sqrt{3}$	$σφ\frac{π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{π}{2}$	$ημ\frac{π}{2}=1$	$συν\frac{π}{2}=0$	$εφ\frac{π}{2}=$ δεν ορίζεται	$σφ\frac{π}{2}=0$
180^0	π	ημπ=0	συνπ =-1	εφπ=0	σφπ δεν ορίζεται
270^0	$\frac{3π}{2}$	$ημ\frac{3π}{2}=-1$	$συν\frac{3π}{2}=0$	$εφ\frac{3π}{2}$ Δεν ορίζεται	$σφ\frac{3π}{2}=0$

❖ Σχόλια:

1. Η **μέγιστη τιμή** των συνω , ημω είναι το 1

2. Η **ελάχιστη τιμή** των συνω , ημω είναι το -1.

3. το ημίτονο και το συνημίτονο της ίδιας γωνίας δεν παίρνουν συγχρόνως τις τιμές -1 , 0 , 1

4. Τα άρτια πολλαπλάσια του π : 0π , $\pm 2π$, $\pm 4π$,…έχουν μορφή 2κπ,$κ\in Z$

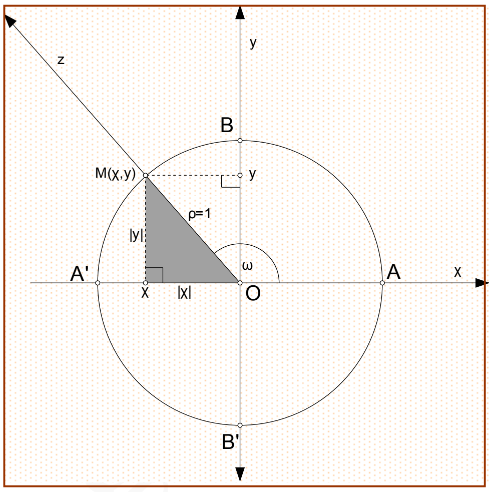
5. Τα περιττά πολλαπλάσια του π : $\pm 1π$, $\pm 3π$, 5π,…έχουν μορφή (2κ+1)π,$κ\in Z$

6 Τα άρτια και τα περιττά πολλαπλάσια του π είναι τα πολλαπλάσια του π και έχουν τη μορφή λπ, $λ\in Z$

2η Ενότητα

▪ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Βασικό Θεώρημα Τριγωνομετρίας



$$ημ^2ω+συν^2ω=1$$

Απόδειξη: Αν M(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο τότε: x=συνω και y=ημω

Επομένως: $ημ^2ω+συν^2ω=x^2+y^2=ρ^2=1$

2. $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ και $σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$

Απόδειξη:

Στο ίδιο σχήμα έχουμε: $εφω=\dfrac{y}{x} = \dfrac{ημω}{συνω}$, $\quad συνω \neq 0$

$σφω=\dfrac{x}{y} = \dfrac{συνω}{ημω}$ $\quad ημω \neq 0$

3. εφω σφω=1

Απόδειξη:

Είναι $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ και $σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$

Επομένως $\quad εφω\ σφω=\dfrac{ημω}{συνω}\cdot\dfrac{συνω}{ημω} = 1$

Τυπολόγιο

◊ $|ημx| \leq 1$ $\quad |συνx| \leq 1$ $\quad ημ^2x + συν^2x=1$ $\quad εφx=\dfrac{ημx}{συνx}$ $\quad σφx=\dfrac{συνx}{ημx}$ $\quad εφx\ σφx=1$

◊ $συν^2x=\dfrac{1}{1+εφ^2x}$ $\quad ημ^2x=\dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$ $\quad ημ(2κπ+x)=ημx$ $\quad συν(2κπ+x)=συνx$ $\quad κ \in Z$

3η Ενότητα

▪ Αναγωγή στο 1^0 τεταρτημόριο

Κανόνας Πρώτος:
Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

Κανόνας Δεύτερος:
Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$180^0 \pm \omega \ (\pi \pm \omega) \text{ ή } 360^0 \pm \omega \ (2\pi \pm \omega)$$

έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω με πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο.

Κανόνας Τρίτος:
Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$90^0 \pm \omega \ \left(\frac{\pi}{2} \pm \omega\right) \text{ ή } 270^0 \pm \omega \ \left(\frac{3\pi}{2} \pm \omega\right)$$

εναλλάσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία ω δηλαδή το ημίτονο γίνεται συνημίτονο ή αντίστροφα και η εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη ή αντίστροφα με το πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο.

Κανόνας Τέταρτος:
Οι γωνίες της μορφής κ 360^0+ω (2κπ+ω) έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία ω.

Τυπολόγιο

ημ(-x)=- ημx	συν(-x)=συνx	εφ(-x)=-εφx	σφ(-x)=-σφx
$ημ(\frac{\pi}{2}-x)$=συνx	$συν(\frac{\pi}{2}-x)$=ημx	$εφ(\frac{\pi}{2}-x)$=σφx	$σφ(\frac{\pi}{2}-x)$=εφx
$ημ(\frac{\pi}{2}+x)$=συνx	$συν(\frac{\pi}{2}+x)$= -ημx	$εφ(\frac{\pi}{2}+x)$= -σφx	$σφ(\frac{\pi}{2}+x)$= -εφx
ημ(π-x)=ημx	συν(π-x)=-συνx	εφ(π-x)=-εφx	σφ(π-x)=-σφx
ημ(π+x)=-ημx	συν(π+x)=-συνx	εφ(π+x)=εφx	σφ(π+x)=σφx
$ημ(\frac{3\pi}{2}-x)$= -συνx	$συν(\frac{3\pi}{2}-x)$=-ημx	$εφ(\frac{3\pi}{2}-x)$=σφx	$σφ(\frac{3\pi}{2}-x)$=εφx
$ημ(\frac{3\pi}{2}+x)$= -συνx	$συν(\frac{3\pi}{2}+x)$=ημx	$εφ(\frac{3\pi}{2}+x)$=-σφx	$σφ(\frac{3\pi}{2}+x)$=-εφx
ημ(2π-x)=-ημx	συν(2π-x)=συνx	εφ(2π-x)=-εφx	σφ(2π-x)=-σφx
ημ(2π+x)=ημx	συν(2π+x)=συνx	εφ(2π+x)=εφx	σφ(2π+x)=σφx

1η - 2η - 3η Ενότητα

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία $\frac{3\pi}{20}$ rad.

Λύση: Επειδή π(rad) αντιστοιχούν σε 180^0 έχουμε $\frac{3\pi}{20}$ rad αντιστοιχούν σε

$$\frac{3\cdot 180^0}{20}=27^0$$

Παράδειγμα 2.

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. ημ120^0 β. συν210^0 γ. εφ330^0 δ. ημ2009π

Λύση: α. Είναι ημ120^0=ημ(90^0+30^0)=συν30^0=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

β. Είναι συν210^0=συν(180^0+30^0)=-συν30^0=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ. Είναι εφ330^0=εφ(270^0+60^0)=-σφ60^0=-$\frac{\sqrt{3}}{3}$

δ. ημ2009π=ημ(2008π+π)=ημ(2·1004π+π)=ημπ=0

Παράδειγμα 3.

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2}+\theta\right)$ β. $\varepsilon\varphi\left(\frac{45\pi}{2}-\theta\right)$

Λύση: α. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(60\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\theta$

β. $\varepsilon\varphi\left(\frac{45\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(22\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\theta$

Παράδειγμα 4.

Δίνεται ότι: ημθ=$-\frac{\sqrt{5}}{3}$ και $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

Να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ

Λύση: Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\eta\mu^2\theta$ άρα

$συν^2θ=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ και επειδή $π<θ<\frac{3π}{2}$ είναι συνθ<0 συνεπώς

$συνθ=-\frac{2}{3}$.

Τότε: $εφθ=\frac{ημθ}{συνθ}=\frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $σφθ=\frac{1}{εφθ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Παράδειγμα 5.

Να δείξετε ότι: $\frac{1-εφω}{1+εφω}=\frac{σφω-1}{σφω+1}$

Λύση: $\frac{1-εφω}{1+εφω}=\frac{1-\frac{1}{σφω}}{1+\frac{1}{σφω}}=\frac{\frac{σφω-1}{σφω}}{\frac{σφω+1}{σφω}}=\frac{σφω-1}{σφω+1}$

Παράδειγμα 6.

Αν $0<α<β<\frac{π}{2}$ και 2ημ(α+β)+συν(α-β)=3 να βρείτε τα α και β.

Λύση: Για κάθε $α,β\in IR$ ισχύει: $2ημ(α+β)\leq 2$ και $συν(α-β)\leq 1$.
Επομένως είναι: $2ημ(α+β)+συν(α-β)\leq 3$ (1)
Είναι όμως 2ημ(α+β)+συν(α-β)=3 (2)
Η ισότητα στη σχέση (1) ισχύει όταν και μόνο όταν ισχύουν ημ(α+β)=1 και συν(α-β)=1
Επομένως είναι $α+β=\frac{π}{2}$ και α-β=0 ή $α=β=\frac{π}{4}$

Παράδειγμα 7.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=εφ5^0εφ95^0εφ7^0εφ97^0$

Λύση: Είναι $εφ95^0=εφ(90^0+5^0)=-σφ5^0$ και $εφ97^0=εφ(90^0+7^0)=-σφ7^0$
Οπότε: $A=εφ5^0εφ95^0εφ7^0εφ97^0=εφ5^0(-σφ5^0)εφ7^0(-σφ7^0)=(-1)(-1)=1$

Παράδειγμα 8.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $A=\frac{4}{3+συνx}$

Λύση: Για κάθε $x\in IR$ ισχύει: $-1\leq συνx\leq 1$ οπότε: $2\leq 3+συνx\leq 4$ ή
$\frac{1}{2}\geq\frac{1}{3+συνx}\geq\frac{1}{4}$ ή $2\geq\frac{4}{3+συνx}\geq 1$ ή $2\geq A\geq 1$ή $1\leq A\leq 2$
Επομένως η μεγαλύτερη τιμή είναι 2 και η μικρότερη 1

1η - 2η - 3η Ενότητα

Ερωτήσεις Κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Υπάρχει γωνία ω με ημω=0 και συνω=0

2. Η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α=3ημx είναι 3

3. Η εφω δεν ορίζεται όταν $\omega=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$

4. Μια γωνία 75^0 είναι ίση με $\frac{5\pi}{12}$

5. εφ(-x)+εφx=0

6. $\sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{2})=\eta\mu x$

7. $\eta\mu 105^0=-\sigma\upsilon\nu 15^0$

8. Είναι συν(π+ω)=συνω

9. Αν 2α+2β=π τότε εφα=-σφβ

10. Υπάρχει γωνία ω ώστε ημω+συνω=2

11. $\varepsilon\varphi x\sigma\varphi x=\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

12. $\eta\mu^2 2009+\sigma\upsilon\nu^2 2009=1$

13. εφ2010σφ2010=1

14. $\eta\mu 5=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 5}$

15. $\varepsilon\varphi 15=\frac{1}{\sigma\varphi 15}$

16. $\eta\mu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

17. Αν $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ τότε |συνx|=συνx

18. Αν 0<2x<π τότε $\sigma\upsilon\nu x\le 0$

19. Αν ημx=3συνx τότε εφx=3

20. $1+\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\eta\mu^2\omega}$

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία $\hat{A}=90^0$ τότε;

α. Το συνΒ είναι ίσο με

i. $\frac{\alpha}{\gamma}$ ii. $\frac{\beta}{\gamma}$ iii. $\frac{\gamma}{\beta}$ iv. $\frac{\beta}{\alpha}$ v. $\frac{\gamma}{\alpha}$

β. Το ημΓ είναι ίσο με:

i. $\frac{\beta}{\alpha}$ ii. $\frac{\beta}{\gamma}$ iii. $\frac{\gamma}{\alpha}$ iv. $\frac{\gamma}{\beta}$ v. $\frac{\alpha}{\gamma}$

γ. Η εφΒ είναι ίση με

i. $\frac{\gamma}{\beta}$ ii. $\frac{\alpha}{\beta}$ iii. $\frac{\beta}{\alpha}$ iv. $\frac{\alpha}{\gamma}$ v. $\frac{\beta}{\gamma}$

2. Το $\eta\mu\frac{41\pi}{6}$ είναι ίσο με:

i. $-\frac{1}{2}$ ii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ iii. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ iv. 0 v. $\frac{1}{2}$

3. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει:

i. $ημω<-2$ ii. $ημω>1$ iii. $|ημω|>1$ iv. $-1 \le ημω \le 1$

4. Η $εφ\frac{45\pi}{4}$ είναι ίση με:

i. $\sqrt{3}$ ii -1 iii. 1 iv. $-\sqrt{3}$ v). 0

5. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τότε το άθροισμα συνΑ+συνΒ +συνΓ είναι ίσο με:

i. 1 ii. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ iii. 1 iv. $\frac{3}{2}$ v. $\frac{1}{6}$

Γ. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $ημ(\pi+θ)$	**1.** $ημθ$
β. $εφ(\pi-θ)$	**2.** $-ημθ$
γ. $συν\left(\frac{\pi}{2}-θ\right)$	**3.** $σφθ$
δ. $σφ(-θ)$	**4.** $-σφθ$
ε. $συν(-θ)$	**5.** $εφθ$
στ. $σφ(\pi+θ)$	**6.** $-εφθ$
	7. $συνθ$

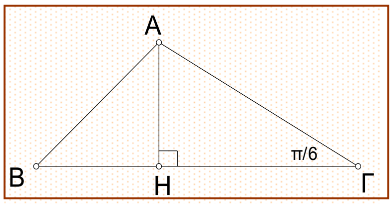
Δ. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ . Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στη στήλη Β

Στήλη Α	**Στήλη Β**
ΣΤ. $ημ\frac{Β+Γ}{2}$	**6.** $εφ\frac{Γ}{2}$
Α. $ημ(Α+Β)$	**1.** $-εφΓ$
Β. $εφ(Α+Β)$	**2.** $-συνΑ$
Γ. $συν\frac{Β+Γ}{2}$	**3.** $ημΓ$
Δ. $συν(Β+Γ)$	**4.** $ημ\frac{Α}{2}$
Ε. $σφ\frac{Α+Β}{2}$	**5.** $συν\frac{Α}{2}$

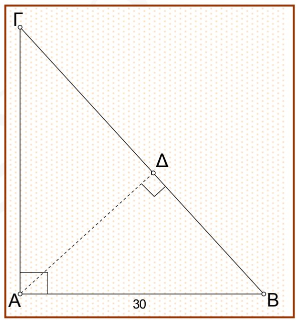
1η - 2η - 3η Ενότητα

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Στο διπλανό σχήμα είναι: ΒΗ=1 και ΓΗ=3 και $\hat{\Gamma} = 30^0$
Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ , ΑΒ και το ύψος ΑΗ



2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^0$). Αν ΑΒ=30 και ημΒ=$\frac{3}{5}$ να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ ,ΑΓ και το ύψος ΑΔ



3. Δύο συγκεκριμένα σημεία Α και Β στο έδαφος απέχουν μεταξύ τους 10 km. Ο πιλότος ενός αεροπλάνου , όταν βρίσκεται στην κατακόρυφο του Α, βλέπει την απόσταση ΑΒ υπο γωνία 30^0. Να υπολογίσετε το ύψος του αεροπλάνου.

4. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A=\frac{2\eta\mu 30^0 + 2\varepsilon\varphi 30^0 \cdot \eta\mu 60^0 + \varepsilon\varphi 45^0}{2\sigma\upsilon\nu 60^0 - 2\sigma\varphi 30^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 + \sigma\varphi 45^0}$$

5. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ, ΒΕ ,ΓΖ τα ύψη του. Αν ισχύει ΑΔ=ΒΕ+ΓΖ να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\eta\mu A} = \frac{1}{\eta\mu B} + \frac{1}{\eta\mu \Gamma}$

6. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν το άθροισμα των ημιτόνων των τεσσάρων γωνιών που έχουν κορυφή το σημείο τομής των διαγωνίων είναι 4.

7. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$B=\frac{2\eta\mu\frac{\pi}{6}+\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{3}+\sigma\varphi\frac{\pi}{4}}$$

8. Να βρείτε τις γωνίες φ, $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ για τις οποίες ισχύει: ημφ+3συνω=4.

9. Να δείξετε ότι: α. $|5\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu y|\leq 7$ β. $|2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x|\leq 5$

10. Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων
α. y=3+2ημx β. y=-2+5ημx γ. y=5-3συνx

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^2-x+ημθ-2=0 έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε γωνία θ.

12. Αν ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)x^2-(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)x+\eta\mu^2\alpha=0$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι: $\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2=1$

13. Για μια γωνία $\omega\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ ισχύει: $5\sigma\upsilon\nu^2\omega-7\sigma\upsilon\nu\omega-6=0$.

α. Να αποδειχθεί ότι συνω=$-\frac{3}{5}$

β. Να υπολογιστούν οι αριθμοί ημω, εφω ,σφω.

14. Αν x=3ημθ και y=2συνθ να δείξετε ότι: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

15. Να δείξετε ότι: $\begin{vmatrix}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} & \frac{-\eta\mu x}{\sqrt{2}}\\ \frac{\eta\mu x}{\sqrt{2}} & \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$

16. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3x-\eta\mu x}=\varepsilon\varphi x$ β. $\eta\mu^2 x\varepsilon\varphi x-\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\varphi x=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$

17. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}+\frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\varphi\omega}=\frac{1}{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}$

18. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi+x)}{\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\eta\mu(\pi-x)}=\sigma\phi x$

19. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

α. ημΑ=ημ(Β+Γ) β. εφΒ+εφ(Α+Γ)=0

γ. $\eta\mu\dfrac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}$ δ. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}=\eta\mu\dfrac{A+B}{2}$

20. Έστω $A=\dfrac{\varepsilon\phi(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi-\alpha)}$, $B=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\frac{\pi}{2})\cdot\eta\mu(\pi+\alpha)$,

$\Gamma=\sigma\upsilon\nu(\pi+\alpha)\eta\mu(\alpha-\frac{\pi}{2})$ να αποδειχθεί ότι:

α. Γ=Β+1 β. $B+A=\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ γ. Α+Β=Γ

21. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\eta\mu 40^0\cdot\sigma\upsilon\nu 70^0}{\eta\mu 20^0\cdot\sigma\upsilon\nu 50^0}+\dfrac{\eta\mu 10^0\cdot\sigma\upsilon\nu 55^0}{\eta\mu 35^0\cdot\sigma\upsilon\nu 80^0}+\dfrac{\varepsilon\phi 15^0\cdot\sigma\phi 65^0}{\varepsilon\phi 25^0\cdot\sigma\phi 75^0}=3$

22. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\leq 2$

23. Αν $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι: $\eta\mu\theta\cdot\sigma\phi(\frac{\pi}{2}-\theta)\geq 2[1+\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)]$

24. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\eta\mu^4\alpha+4\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4\alpha+4\eta\mu^2\alpha}=3$

25. Δίνονται οι παραστάσεις : $A=\dfrac{\eta\mu(-\omega)\cdot\sigma\phi(2\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\omega)\cdot\varepsilon\phi(\pi+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-\omega)\cdot\varepsilon\phi(\frac{\pi}{2}+\omega)\cdot\eta\mu(\frac{15\pi}{2}-\omega)}$

$$B=\dfrac{\eta\mu(\pi-\omega)\cdot\sigma\phi(\frac{3\pi}{2}-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+\omega)}{\varepsilon\phi(\frac{5\pi}{2}+\omega)\cdot\eta\mu(\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2}+\omega)}$$

Να δείξετε ότι: $A=B^3$

1η - 2η - 3η Ενότητα

1^0 Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ(π-θ)	**1.** συνθ
β. σφ(π+θ)	**2.** ημθ
γ. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	**3.** –σφθ
δ. εφ(-θ)	**4.** σφθ
ε. συν(π+θ)	**5.** εφθ
στ. εφ(2π+θ)	**6.** –εφθ
	7. -συνθ

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Είναι: $\eta\mu\frac{\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Ισχύει: $\eta\mu^2\omega=-\sigma\upsilon\nu^2\omega+1$
3. Είναι : $\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. Ισχύει: $\eta\mu(90^0-\theta)=-\eta\mu\theta$

ΘΕΜΑ Β

Α. Αν $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Β. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$

ΘΕΜΑ Γ

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\phi^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\sigma\phi^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\varepsilon\phi^6\omega$$

1η - 2η - 3η Ενότητα

2^0 Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Αν Μ(x,y) και $\omega = x\hat{O}M$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ τότε:

1. το ημω είναι ίσο με:

i. $\frac{x}{\rho}$ ii. $\frac{y}{x}$ iii. $\frac{x}{y}$ iv. $\frac{y}{\rho}$ v. $\frac{\rho}{y}$

2. η σφω είναι ίση με:

i. $\frac{y}{x}$ ii. $\frac{y}{\rho}$ iii. $\frac{x}{\rho}$ iv. $\frac{x}{y}$ v. $\frac{\rho}{x}$

Β. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

1. Ισχύει ότι:

α. συν(-ω)=………… β. σφ(-ω)=…………

γ. ημ(90^0+θ)=………… δ. $συν\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$=………

2. Ισχύει ότι:

α. $ημ\left(100\pi-\frac{\pi}{4}\right)$=……… β. συν(201π+$\frac{\pi}{3}$)=………

γ. $ημ\frac{17\pi}{6}$=…….. δ. $εφ\frac{3\pi}{4}$=…….

ΘΕΜΑ Β

Να αποδείξετε ότι:

1. $συν^4α-ημ^4α-2συν^2α=-1$

2. $\frac{εφx-σφx}{εφx+σφx}=1-2συν^2x$

ΘΕΜΑ Γ

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{εφ420^0-ημ510^0-ημ(-750^0)}{ημ^2 100^0+συν^2 80^0+2εφ160^0\cdot σφ20^0}=-\sqrt{3}$$

4η Ενότητα

▪ Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

❖ Περιοδικές Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική , όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T >0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i). $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

ii). $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f

❖ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

✓ Η συνάρτηση ημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ(x rad) λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

ημx=ημ(x rad)

- Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π γιατί: ημ(x+2π)=ημ(x-2π)=ημx για κάθε $x \in IR$.Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π.

✓ Η συνάρτηση συνημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο συν(x rad) λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

συνx=συν(x rad)

- Η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π γιατί: συν(2π+x)=συνx για κάθε $x \in IR$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π.

✓ Η συνάρτηση εφαπτομένη

Η **συνάρτηση εφαπτομένη** ορίζεται ως το πηλίκο του ημιτόνου προς το συνημίτονο

Είναι $εφx=\dfrac{ημx}{συνx}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\{x \in IR : συνx \neq 0\}$

- Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π γιατί:εφ(π+x)=εφx για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους π.

✓ Η συνάρτηση συνεφαπτομένη

Η **συνάρτηση συνεφαπτομένη** ορίζεται ως το πηλίκο του συνημιτόνου προς το ημίτονο . Είναι $σφx=\dfrac{συνx}{ημx}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\{x \in IR : ημx \neq 0\}$

- Η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π γιατί:σφ(π+x)=σφx για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους π.

Μελέτη της συνάρτησης f(x)=ημx

1. **Πεδίο ορισμού:** Η f έχει πεδίο ορισμού το A =IR

2. **Σύνολο τιμών:** Η f έχει σύνολο τιμών το f(A)=[-1,1] ($-1 \leq ημx \leq 1$)

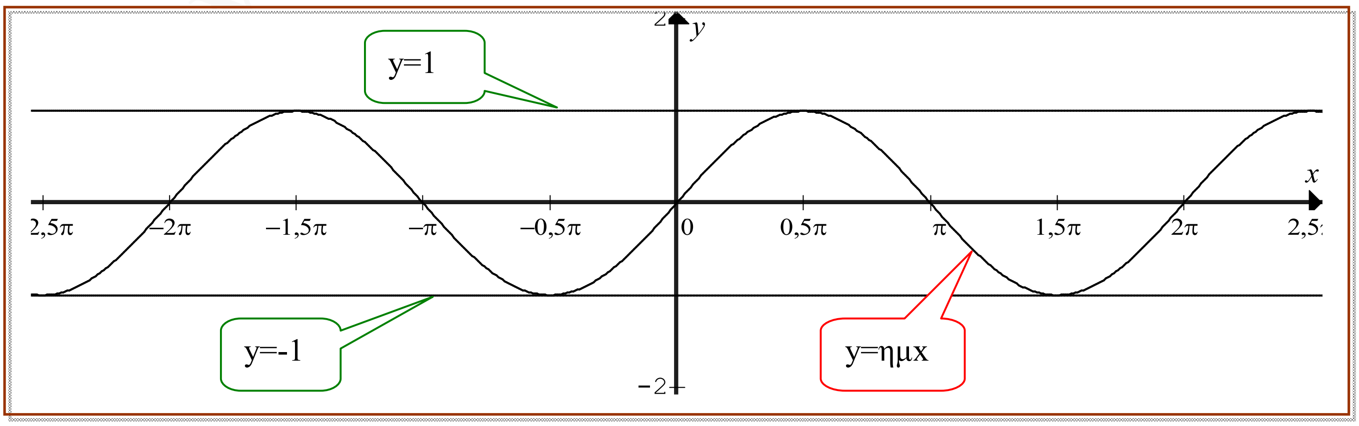
3. **Περιοδικότητα:** Η f είναι περιοδική με περίοδο T=2π.(Η μελέτη της f αρκεί να γίνει σε διάστημα πλάτους 2π π.χ. στο [0,2π]).

4. **Άρτια ή Περιττή:** Η f είναι περιττή στο IR. (έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O)

5. **Μονοτονία:** Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0,\frac{π}{2}]$, $[\frac{3π}{2},2π]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[\frac{π}{2},π]$, $[π,\frac{3π}{2}]$.

6. **Ακρότατα:** Για $x=\frac{π}{2}$ μέγιστο το $ημ\frac{π}{2}=1$ και για $x=\frac{3π}{2}$ ελάχιστο το $ημ\frac{3π}{2}=-1$

7. **Γραφική παράσταση:** Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη.



Μελέτη της συνάρτησης f(x)=συνx

1. **Πεδίο ορισμού:** Η f έχει πεδίο ορισμού το Α =IR

2. **Σύνολο τιμών:** Η f έχει σύνολο τιμών το f(A)=[-1,1] ($-1 \leq$ συνx ≤ 1)

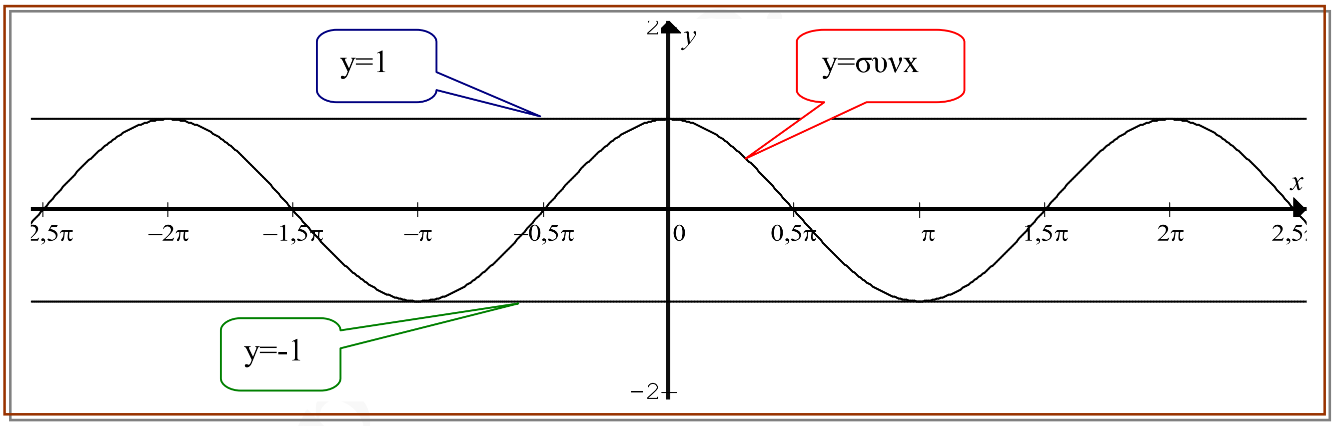
3. **Περιοδικότητα:** Η f είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π. .(Η μελέτη της f αρκεί να γίνει σε διάστημα πλάτους 2π π.χ. στο [0,2π]).

4. **Άρτια ή Περιττή:** Η f είναι άρτια στο IR.(έχει άξονα συμμετρίας των $y'y$).

5. **Μονοτονία:** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2},\pi]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[\pi,\frac{3\pi}{2}],[\frac{3\pi}{2},2\pi]$.

6. **Ακρότατα:** Για x=0 ,x=2π μέγιστο το $y_{max}=1$ και για x=π ελάχιστο το $y_{min}=-1$

7. **Γραφική παράσταση:** Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μελέτη της συνάρτησης f(x)=εφx

1. **Πεδίο ορισμού:** Η f έχει πεδίο ορισμού το Α =IR-$\left\{x \in IR / x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\right\}$

2. **Σύνολο τιμών:** Η f έχει σύνολο τιμών το f(A)=IR

3. **Περιοδικότητα:** Η f είναι περιοδική με περίοδο Τ=π. .(Η μελέτη της f αρκεί να γίνει σε διάστημα πλάτους π π.χ. στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$).

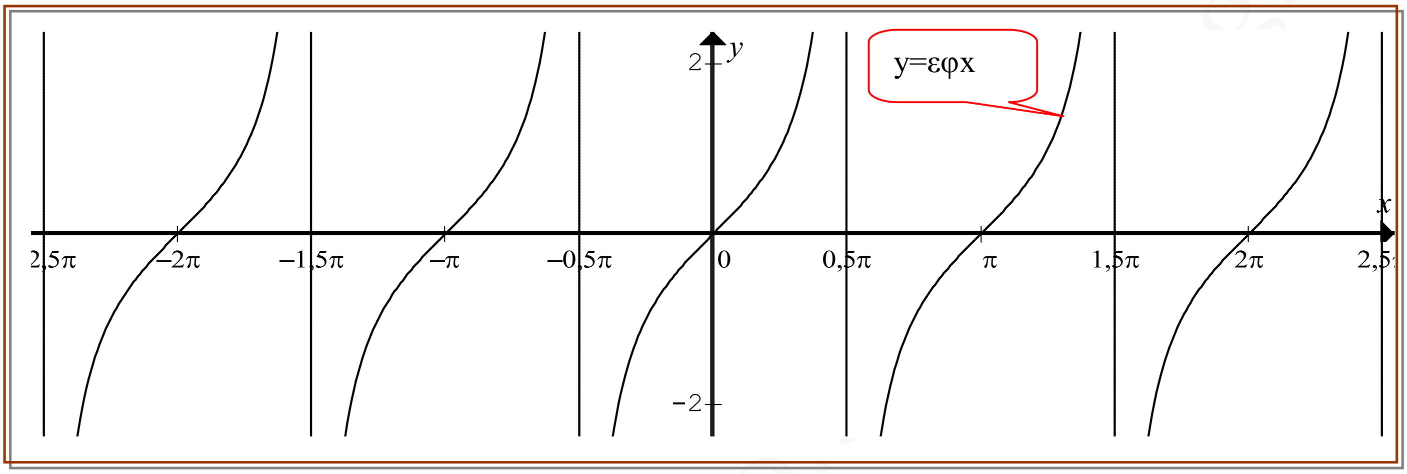
4. **Άρτια ή Περιττή:** Η f είναι περιττή στο Α , (έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο)

5. **Μονοτονία:** Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

6. **Ακρότατα:** Δεν έχει (Γιατί είναι γνησίως αύξουσα)

7. **Ασύμπτωτες:** Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

8. **Γραφική παράσταση:** Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχόλιο: Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο $-\infty$.

Γι΄ αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx «τείνει» στο ∞.

Γι΄ αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Μελέτη της συνάρτησης f(x)=σφx

1. **Πεδίο ορισμού:** Η f έχει πεδίο ορισμού το A =IR-$\{x\in IR \,/\, x=\kappa\pi, \kappa\in Z\}$

2. **Σύνολο τιμών:** Η f έχει σύνολο τιμών το f(A)=IR

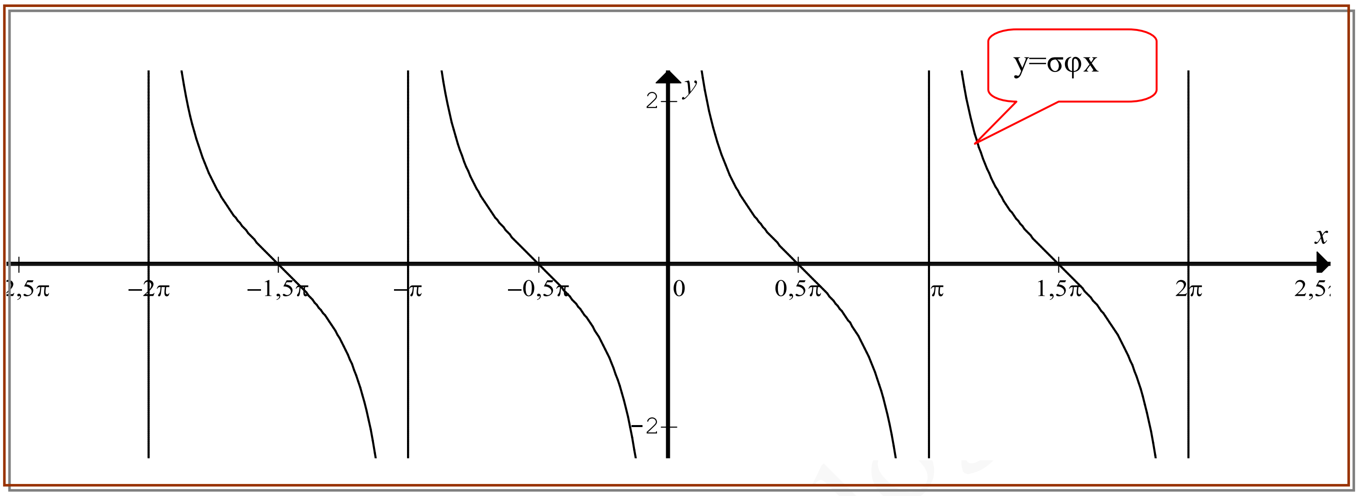
3. **Περιοδικότητα:** Η f είναι περιοδική με περίοδο T=π. .(Η μελέτη της f αρκεί να γίνει σε διάστημα πλάτους π π.χ. στο (0,π)).

4. **Άρτια ή Περιττή:** Η f είναι περιττή στο A , (έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O)

5. **Μονοτονία:** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,π)

6. **Ακρότατα:** Δεν έχει (Γιατί είναι γνησίως φθίνουσα)

7. **Ασύμπτωτες:** Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=\kappa\pi, \kappa\in Z$
8. **Γραφική παράσταση:** Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



➢ **Παρατηρήσεις Θεωρίας:**

Παρατήρηση 1: Οι συναρτήσεις f(x)=ρημ(ωx) και g(x)=ρσυν(ωx) , όπου ρ>0 ,ω>0 είναι περιοδικές με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$
Μέγιστη τιμή είναι το ρ και Ελάχιστη το –ρ

Παρατήρηση 2: Οι συναρτήσεις f(x)=εφ(αx) και g(x)=σφ(αx) ,$\alpha\neq 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=\frac{\pi}{|\alpha|}$

Παρατήρηση 3: Το σύνολο τιμών της f(x)=κημ(αx) είναι το [-|κ|,|κ|].
Το σύνολο τιμών της f(x)=κημ(αx)+λ είναι το [-|κ|+λ,|κ|+λ]

Παρατήρηση 4: Κάθε συνάρτηση της μορφής f(x)=ρημ[ω(x+κ)] έχει τα ίδια ακρότατα και την ίδια περίοδο με την συνάρτηση f(x)=ρημ(ωx)

Παρατήρηση 5: Αν f(x)=ρημ(ωx)+κ, ρ,ω>0 τότε η ελάχιστη τιμή είναι : -ρ+κ και η μέγιστη τιμή είναι: ρ+κ
Περίοδος $T=\frac{2\pi}{\omega}$

Παρατήρηση 6: Η γραφική παράσταση της –f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ,ως προς τον άξονα x′x .

4η Ενότητα

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=ημx , g(x)=2ημx φ(x)=-ημx στο διάστημα [-2π,2π].

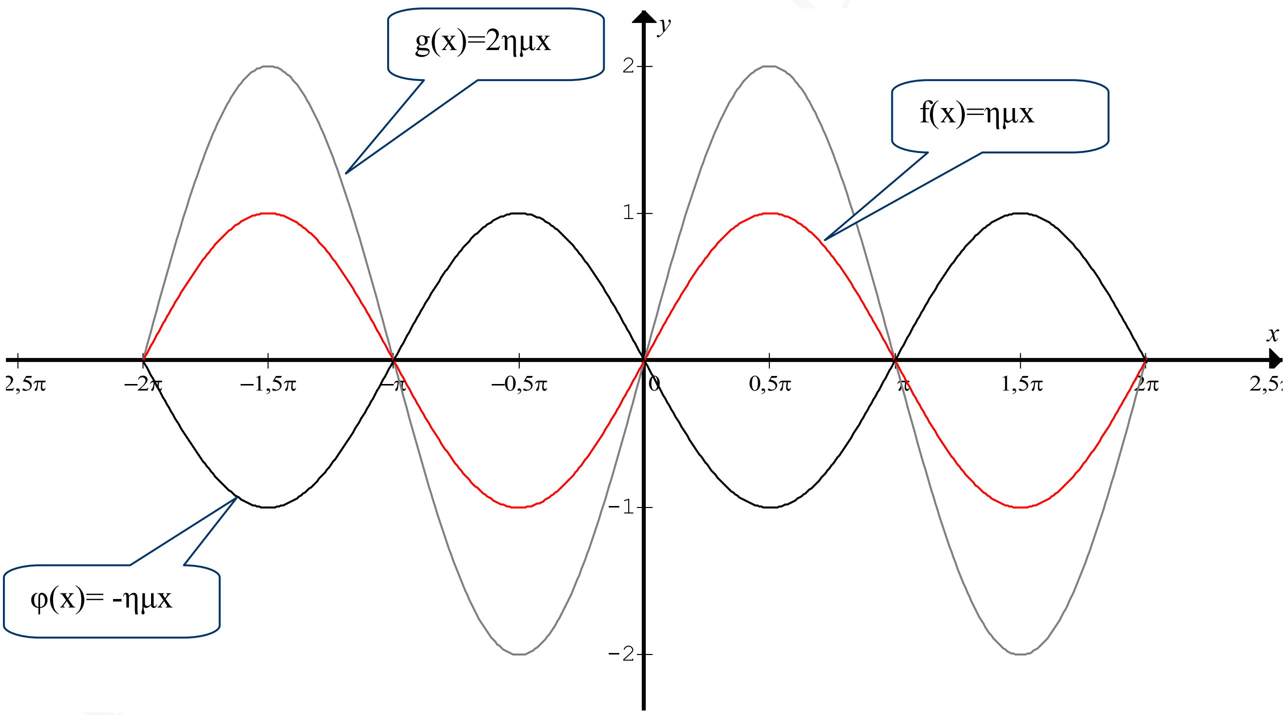
Λύση:

Οι συναρτήσεις f και φ είναι αντίθετες , οπότε οι γραφικές παραστάσεις τους θα είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x′x .

Η συνάρτηση g είναι περιοδική με περίοδο T=2π και οι τιμές της είναι διπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της f

Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
ημx	0	1	0	-1	0
2ημx	0	2	0	-2	0



Παράδειγμα 2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=3συν$\frac{x}{2}$, g(x)= 3συν$\frac{x}{2}$-1, h(x)= 3συν$\frac{x}{2}$+1

α. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή , η ελάχιστη τιμή ,και η περίοδος για καθεμία από τις παραπάνω συναρτήσεις

β. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Λύση:

α.Η συνάρτηση f είναι της μορφής f(x)=ρσυν(ωx) με ω=$\frac{1}{2}>0$ και ρ=3 οπότε έχει μέγιστο 3,ελάχιστο -3 και περίοδο T=$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

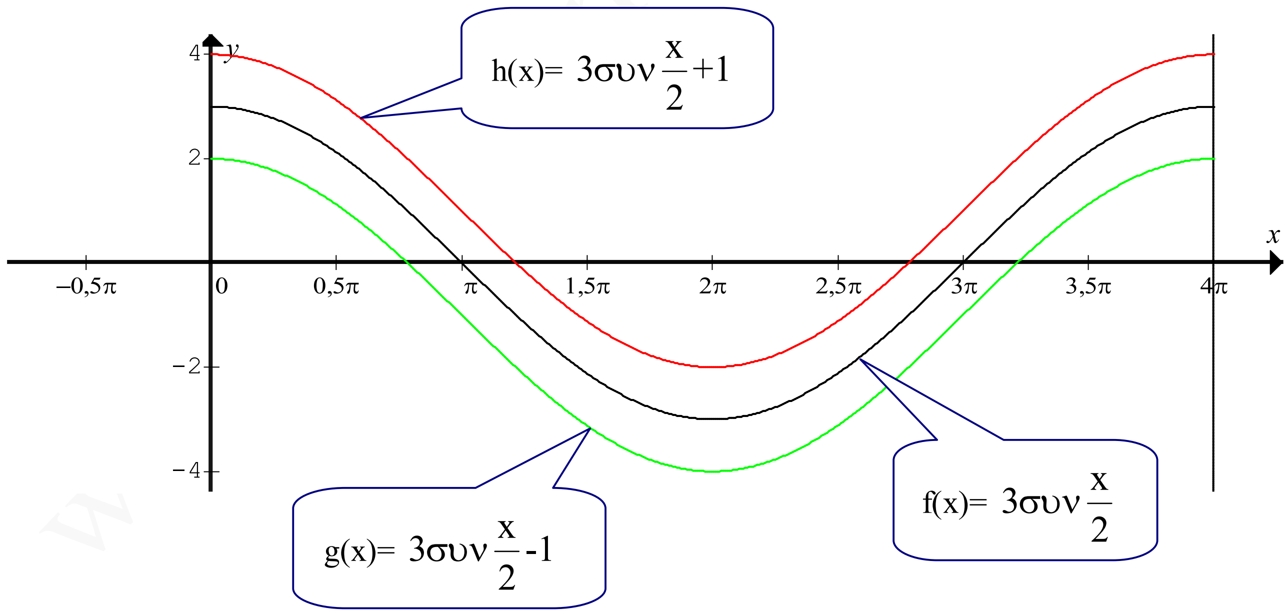
Η συνάρτηση g είναι της μορφής ρσυν(ωx)+κ οπότε έχει μέγιστο ρ+κ=3+(-1)=2 ελάχιστο –ρ+κ=-3+(-1)=-4 και περίοδο Τ=4π

Η συνάρτηση h είναι της μορφής ρσυν(ωx)+κ οπότε έχει μέγιστο ρ+κ=3+1=4 ελάχιστο –ρ+κ=-3+1=-2 και περίοδο Τ=4π

β.Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών:

x	0	π	2π	3π	4π
f(x)	3	0	-3	0	3

Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.
Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα:



Παράδειγμα 3.
Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αημ2x+1,α>0
α. Να υπολογίσετε τον αριθμό α αν η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 2
β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,2π].

Λύση:

α. μέγιστη τιμή της f : |α|+1. Άρα: |α|+1=2 ⇔ |α|=1 ⇔ α=1 ή α=-1 Απορρίπτεται.

β. Για α=1 είναι: f(x)=ημ2x+1

Η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

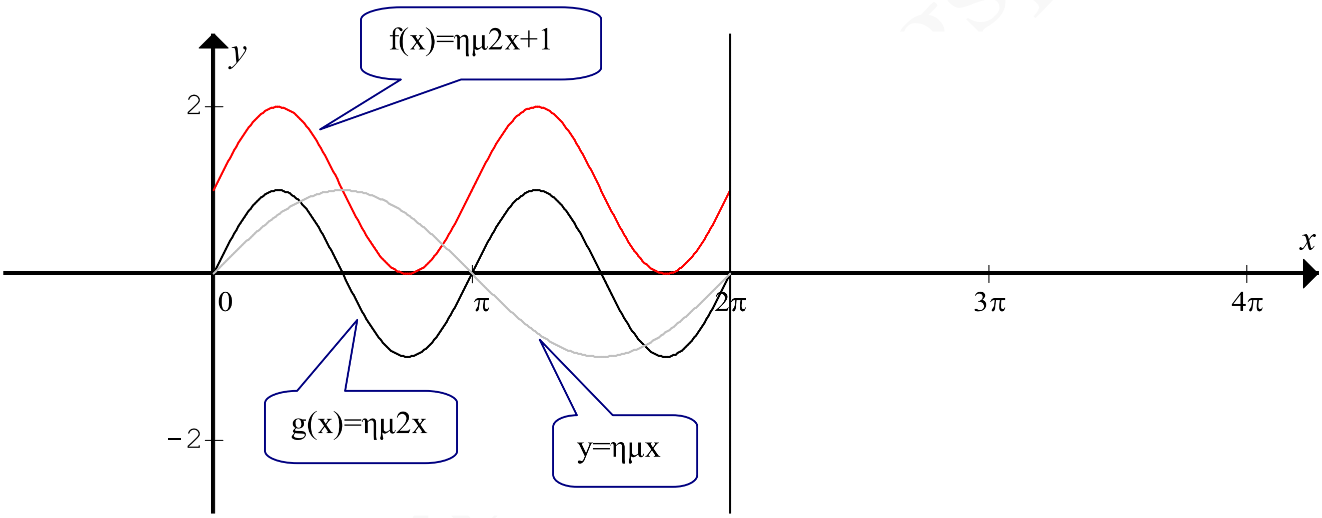
Έστω g(x)=ημ2x. Τότε f(x)=g(x)+1

Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών για την g

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
ημ2x	0	1	0	-1	0

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα:



Παράδειγμα 4.

Αν $3\pi<x_1<x_2<4\pi$ να συγκριθούν οι αριθμοί: $\eta\mu\frac{x_1}{2}$ και $\eta\mu\frac{x_2}{2}$

Λύση:

Επειδή $3\pi<x_1<x_2<4\pi$ θα είναι $\frac{3\pi}{2}<\frac{x_1}{2}<\frac{x_2}{2}<2\pi$

Η συνάρτηση f(x)=ημx στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή

$\frac{x_1}{2}<\frac{x_2}{2}$, έχουμε ότι: $\eta\mu\frac{x_1}{2}<\eta\mu\frac{x_2}{2}$.

4η Ενότητα **Ερωτήσεις Κατανόησης**

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Η συνάρτηση f(x)=συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2},\pi]$

2. Μια περίοδος της συνάρτησης f(x)=ρημ(ωx) όπου ρ>0 ,ω>0 είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$

3. Η συνάρτηση f(x)=-ημx+1 έχει ελάχιστο ίσο με 0

4. Η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ έχει περίοδο $T=\frac{1}{3}$

5. Η συνάρτηση f(x)=εφ2x έχει πεδίο ορισμού το $A=IR-\{\kappa\pi, \kappa\in Z\}$

6. Η συνάρτηση f(x)=-συνx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [2π,3π]

7. Η συνάρτηση f(x)=2-3συν5x έχει σύνολο τιμών το [-1,5]

8. Η συνάρτηση f(x)=εφx είναι γνησίως φθίνουσα στο IR

9. Είναι $\eta\mu 1<\eta\mu\frac{3}{2}$

10. Αν η συνάρτηση f:IR$\to$IR είναι περιοδική με περίοδο τον αριθμό Τ τότε:
α). f(x+T)=f(x-T)
β). T<0

Β. Σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την περίοδό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1.$f(x)=3\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}$	α.$3\pi^2$
2. f(x)=5ημ4x	β.2π
3. $f(x)=2\eta\mu\frac{2x}{3\pi}$	γ.$\frac{\pi}{2}$
4.$f(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$	δ.$\frac{4\pi}{3}$

Γ. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων ημx,συνx,εφx και σφx

1.

x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
ημx				
συνx				

2.

x	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
εφx	

3.

x	(0,π)
σφx	

Δ. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε τύπο συνάρτηση της στήλης Α με μια μόνο γραφική παράσταση της στήλης Β.

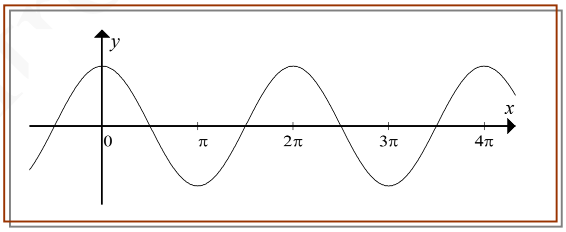
Στήλη Α **Στήλη Β**

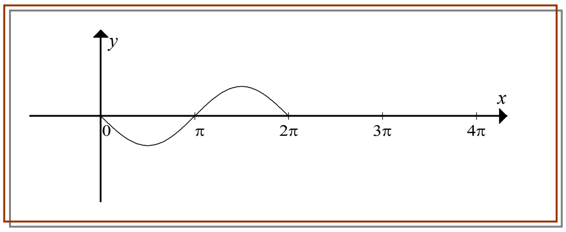
α. f(x)=-ημx

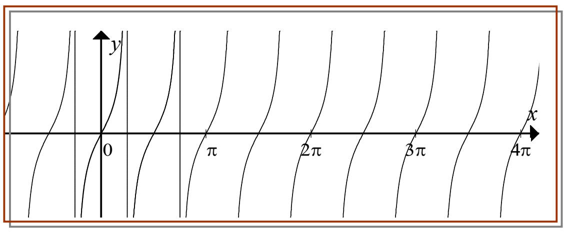
β. f(x)=ημ$\frac{x}{2}$

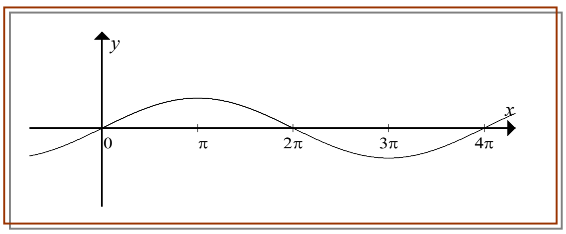
γ. f(x)=2συνx

δ. f(x)=εφ2x

i.


ii


iii.


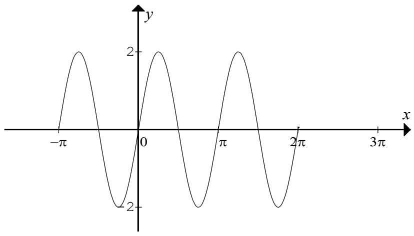
iv.


4η Ενότητα

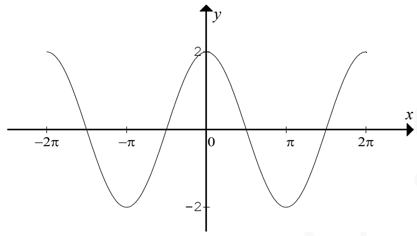
Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση που αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις

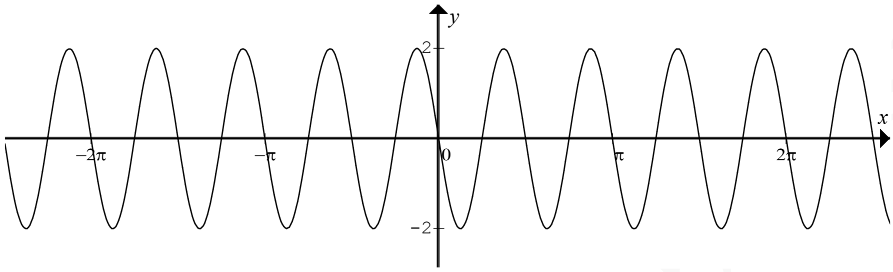
α.



β.



γ.



2. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=-2ημ($\sqrt{2}$x) , g(x)=$\sqrt{5}$συν($\frac{x}{3\pi}$)

Να βρείτε τα ακρότατα και την περίοδο των συναρτήσεων

3. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$

α. Να απλοποιήσετε τον τύπο της

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g(x)=$\frac{1-f(x)}{f(x)}$ σε πλάτος μιας περιόδου.

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=|συνx| στο διάστημα [0,2π].

5. Αν η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f(x)=x^2+2 είναι ίση με την μέγιστη τιμή της συνάρτησης g(x)=αημβπx α,β>0 και η g είναι περιοδική με περίοδο Τ=2

α. Να βρείτε τα α και β

β. Να δείξετε ότι: $g(\frac{1}{4})-g(-\frac{9}{4})=2\sqrt{2}$

6. Έστω η συνάρτηση f(x)=α+(β-1)ημ(γ-2)πx,γ>2,β>1

Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων ,έχει μέγιστη τιμή το 4 και περίοδο Τ=2, να βρείτε τα α, β, γ.

$4^{η}$ Ενότητα

Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

1. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι όλες περιοδικές με περίοδο 2π
2. Η συνάρτηση f(x)=-5ημ3x έχει ελάχιστο το -5
3. Η συνάρτηση f(x)=εφx είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της
4. Ισχύει $\sigma\varphi\frac{\pi}{3} > \sigma\varphi\frac{\pi}{6}$
5. Η συνάρτηση f(x)=συν(-2x) έχει περίοδο T=-π

ΘΕΜΑ Β

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο λέγεται………………καμπύλη έχει ……………………συμμετρίας το σημείο …………..δηλαδή είναι …….. συνάρτηση

2. Η συνάρτηση f(x)=εφx είναι γνησίως ………………..στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι περιοδική με μια περίοδο T=……….., οι ευθείες x=-$\frac{\pi}{2}$ και x=$\frac{\pi}{2}$ είναι ……………………της γραφικής παράστασης της f , η οποία έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο ………….., αφού η συνάρτηση f είναι…………..

ΘΕΜΑ Γ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αημx+β διέρχεται από τα σημεία $A(\frac{\pi}{2},2)$ και $B(\frac{3\pi}{2},0)$

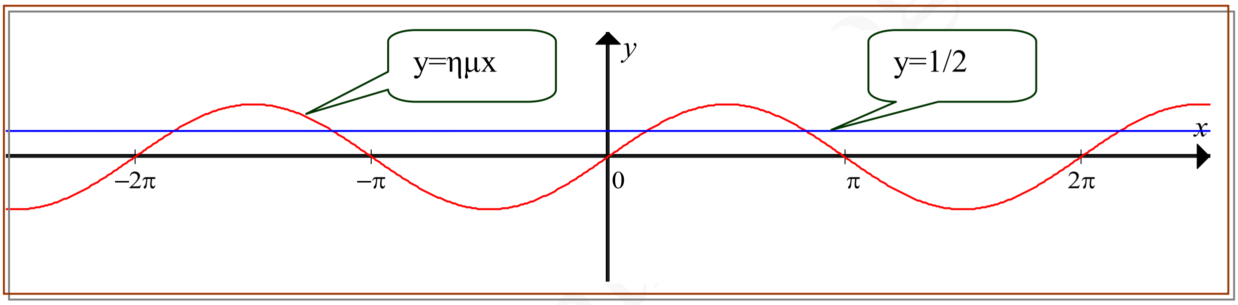
i. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β
ii. Να γραφεί ο πίνακας μονοτονίας και να βρεθούν τα ακρότατα της f
iii. Να γίνει η γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

5η Ενότητα ▪ Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

❖ Τριγωνομετρική Εξίσωση

Ορισμός: Τριγωνομετρική εξίσωση με έναν άγνωστο λέγεται κάθε εξίσωση που ο άγνωστος ή η παράσταση του αγνώστου περιέχεται σε ένα τουλάχιστον τριγωνομετρικό αριθμό

Παρατήρηση: Όταν θέλουμε να λύσουμε π.χ. την εξίσωση ημx=$\frac{1}{2}$ ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης y=ημx και της ευθείας y=$\frac{1}{2}$



Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα $x \in$ IR , για τα οποία η συνάρτηση f(x)=ημx παιρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, για να βρούμε τα ζητούμενα x που είναι άπειρα σε πλήθος , βρίσκουμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους 2π και σε καθένα από αυτά προσθέτουμε το 2κπ,κ ακέραιος. Με ανάλογες σκέψεις εργαζόμαστε και για τις τριγωνομετρικές εξισώσεις συνημίτονο ,εφαπτομένη, συνεφαπτομένη.

❖ Η εξίσωση ημx=α

- Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ η εξίσωση γράφεται ημx=ημθ . όπου θ γωνία με ημθ=α και οι λύσεις της δίνονται από τις ισότητες:

  $$x=2\kappa\pi+\theta \text{ ή } x=2\kappa\pi+(\pi-\theta),\ \kappa \in Z$$

- Αν α<-1 ή α>1 , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

❖ Η εξίσωση συνx=α

- Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ η εξίσωση γράφεται συνx=συνθ . όπου θ γωνία με συνθ=α και οι λύσεις της δίνονται από τις ισότητες:

  $$x=2\kappa\pi+\theta \text{ ή } x=2\kappa\pi-\theta,\ \kappa \in Z$$

- Αν α<-1 ή α>1 , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

❖ Η εξίσωση εφx=α

- Για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha \in IR$ η εξίσωση γράφεται εφx=εφθ, όπου θ γωνία με εφθ=α και οι λύσεις της δίνονται από την ισότητα:

$$x=\kappa\pi+\theta,\ \ \kappa\in Z \ \text{ με την προϋπόθεση } x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$$

❖ Η εξίσωση σφx=α

❖ Για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha \in IR$ η εξίσωση γράφεται σφx=σφθ, όπου θ γωνία με σφθ=α και οι λύσεις της δίνονται από την ισότητα:

$$x=\kappa\pi+\theta,\ \ \kappa\in Z \ \text{ με την προϋπόθεση } x\neq \kappa\pi, \kappa\in Z$$

➢ Τυπολόγιο:

- ημx=ημθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+θ ή x=2κπ+(π-θ) $\kappa\in Z$
- συνx=συνθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+θ ή x=2κπ-θ $\kappa\in Z$
- εφx=εφθ $\Leftrightarrow$ x= κπ+θ $\kappa\in Z$
- σφx=σφθ $\Leftrightarrow$ x= κπ+θ $\kappa\in Z$

➢ Ειδικές Μορφές

1). ημx=0 $\Leftrightarrow$ x=κπ	**2).** ημx=1 $\Leftrightarrow$ $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	**3).** ημx=-1 $\Leftrightarrow$ $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$
4). συνx=0 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	**5).** συνx=1 $\Leftrightarrow$ x=2κπ	**6).** συνx=-1 $\Leftrightarrow$ x=(2κ+1)π
7). εφx=0 $\Leftrightarrow$ x=κπ	**8).** εφx=1 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$	**9).** εφx=-1 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$
10).σφx=0 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	**11).** σφx=1 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$	**12).** σφx=-1 $\Leftrightarrow$ $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$

$\kappa\in Z$

5η Ενότητα

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Να λυθεί η εξίσωση ημx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση: ημx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ ημx=ημ$\frac{\pi}{4}$ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+$\frac{\pi}{4}$ ή x=2κπ+π-$\frac{\pi}{4}$=2κπ+$\frac{3\pi}{4}$ όπου κ$\in$ Z

Παράδειγμα 2.

Να λυθεί η εξίσωση συν$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Λύση: συν$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ συν$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=$ συν$\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\end{matrix}\right.$ κ$\in$ Z $\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\end{matrix}\right. \kappa\in Z\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right. \kappa\in Z$$

Σχόλιο:
Οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις , μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τους τύπους των αντίθετων –παραπληρωματικών γωνιών:
1. ημf(x)=-ημg(x) $\Leftrightarrow$ ημf(x)=ημ[-g(x)].
2. συνf(x)=-συνg(x) $\Leftrightarrow$ συνf(x)=συν[π-g(x)].
3. εφf(x)=-εφg(x) $\Leftrightarrow$ εφf(x)=εφ[-g(x)].
4. σφf(x)=-σφg(x) $\Leftrightarrow$ σφf(x)=σφ[-g(x)], όπου f(x),g(x) παραστάσεις του x.

Παράδειγμα 3.

Να λυθεί η εξίσωση συνx+συν2x=0

Λύση: συνx+συν2x=0 $\Leftrightarrow$ συν2x=-συνx $\Leftrightarrow$ συν2x=συν(π-x) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \pi - x \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \pi + x \end{cases}$

$\kappa \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \pi \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} \kappa \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} \kappa \in Z.$

Σχόλιο:
Οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις , μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τους τύπους των συμπληρωματικών γωνιών:

1.ημf(x)=συνg(x) $\Leftrightarrow$ ημf(x)=ημ$\left[\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right]$

2. συνf(x)=ημg(x) $\Leftrightarrow$ συνf(x)=συν$\left[\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right]$

3. εφf(x)=σφg(x) $\Leftrightarrow$ εφf(x)=εφ$\left[\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right]$

4. σφf(x)=εφg(x) $\Leftrightarrow$ σφf(x)=σφ $\left[\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right]$

Παράδειγμα 4.

Να λυθεί η εξίσωση εφ$\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) =$ σφ2x

Λύση: Περιορισμοί: συν$\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \neq 0$ και ημ2x$\neq 0$

$$εφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = σφ2x \Leftrightarrow εφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = εφ\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z$$

- (Εξισώσεις με γινόμενο παραγόντων = 0)

Παράδειγμα 5.

Να λυθεί η εξίσωση (1-ημx)(2ημx-$\sqrt{2}$)=0

Λύση:

$(1\text{-ημx})(2\text{ημx-}\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 1\text{-ημx}=0$ ή $2\text{ημx-}\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \text{ημx}=1$ ή $\text{ημx}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \text{ημx}=\text{ημ}\frac{\pi}{2}$ ή $\text{ημx}=\text{ημ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$ $\kappa\in Z$

Σχόλιο:

- Εξισώσεις της μορφής:
  - $\alpha\text{ημ}^2x+\beta\text{ημx}+\gamma=0$
  - $\alpha\text{συν}^2x+\beta\text{συνx}+\gamma=0$
  - $\alpha\text{εφ}^2x+\beta\text{εφx}+\gamma=0$
  - $\alpha\text{σφ}^2x+\beta\text{σφx}+\gamma=0$

  Θέτουμε όπου ημx ή συνx ή εφx ή σφx το y και οι εξισώσεις γίνονται $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$.
- Εξισώσεις της μορφής: $\alpha\text{ημ}^2x+\beta\text{συνx}+\gamma=0$. Θέτουμε $\text{ημ}^2x=1-\text{συν}^2x$
- Εξισώσεις της μορφής: $\alpha\text{συν}^2x+\beta\text{ημx}+\gamma=0$. Θέτουμε $\text{συν}^2x=1-\text{ημ}^2x$

Παράδειγμα 6.

Να λυθεί η εξίσωση $2\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=3\text{ημx}-1$

Λύση: $2\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=3\text{ημx}-1 \Leftrightarrow 2\text{ημ}^2x+1-\text{ημ}^2x-3\text{ημx}+1=0 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x-3\text{ημx}+2=0$

Θέτουμε ημx=y και η αρχική εξίσωση γράφεται $y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y_1=2$ ή $y_2=1$

Άρα ημx=2 αδύνατη ή $\text{ημx}=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$

Σχόλιο:
Όταν θέλουμε να λύσουμε τριγωνομετρική εξίσωση σε διάστημα (α,β) τότε:
Βρίσκουμε αρχικά τις άπειρες λύσεις της και στη συνέχεια από την ανισότητα $\alpha<x<\beta$ βρίσκουμε τις τιμές του $\kappa\in Z$ για τις οποίες οι λύσεις ανήκουν στο διάστημα (α,β).

Παράδειγμα 7.

Να λυθεί η εξίσωση $\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{ημx}$ στο διάστημα $\left[-\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Λύση: $\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{ημx} \Leftrightarrow \text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x \\ \text{ή} \\ x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{αδύνατη} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8}, \kappa\in Z$$

Θέλουμε να είναι: $-\pi\le x<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi\le \kappa\pi+\frac{\pi}{8}<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -1\le\kappa+\frac{1}{8}<\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{8}\le\kappa<\frac{11}{8}$

$\Leftrightarrow$ κ=-1 ή κ=0 ή κ=1 διότι $\kappa\in Z$

Αν κ=0 τότε $x=\frac{\pi}{8}$

Αν κ=1 τότε $x=\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$

Αν κ=-1 τότε $x=-\pi+\frac{\pi}{8}=-\frac{7\pi}{8}$

Παράδειγμα 8.

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^2x-\alpha\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{4}$ αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $\frac{\pi}{3}$ είναι μια λύση της.

Λύση: Επειδή ο αριθμός $\frac{\pi}{3}$ είναι λύση της εξίσωσης θα ισχύει:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\alpha\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{2}{4} \Leftrightarrow \alpha=1.$$

Για α=1 η εξίσωση γίνεται:

$\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4-4\sigma\upsilon\nu^2x-4\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow$

$4\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x-3=0$. Θέτουμε συνx=y, $-1\le y\le 1$ και η εξίσωση γράφεται:

$4y^2+4y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ ή $y=-\frac{3}{2}$ (απορρίπτεται). Άρα

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}, \kappa\in Z.$

Παράδειγμα 9.

Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi 5x\cdot\sigma\varphi 10x=1$

Λύση: Περιορισμός: Πρέπει: $\sigma\upsilon\nu 5x\neq 0$ και $\eta\mu 10x\neq 0$

Αν συν10x=0 τότε σφ10x =0 και η εξίσωση δεν έχει λύση.

Αν συν10x $\neq 0$ τότε:

$$\varepsilon\varphi 5x \cdot \sigma\varphi 10x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 5x \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 10x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 5x = \varepsilon\varphi 10x \Leftrightarrow 10x = \kappa\pi + 5x, \kappa \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5}, \kappa \in Z$$

Όμως για $x = \frac{\kappa\pi}{5}$ είναι ημ10x=ημ$\left(10 \cdot \frac{\kappa\pi}{5}\right)$=ημ(2κπ)=0. Άρα η αρχική εξίσωση δεν έχει λύση. Τελικά η εξίσωση είναι αδύνατη.

5η Ενότητα — Ερωτήσεις Κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Η εξίσωση συνx=α, α>1 είναι αδύνατη
2. $εφx=εφθ \Leftrightarrow x=2κπ+θ, κ\in Z$
3. Οι εξισώσεις ημx=συνx και σφx=1 είναι ισοδύναμες
4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1-ημx}$ είναι όλο το IR
5. Οι λύσεις της εξίσωσης ημx=α είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης y=ημx και της ευθείας y=α.
6. Η εξίσωση $εφ\left(x+\dfrac{π}{4}\right)=α$ έχει λύση μόνο όταν $-1\le α\le 1$
7. Οι εξισώσεις εφx=α και σφx=α έχουν την ίδια λύση x=κπ+α , $κ\in Z$
8. $ημx=συνx \Leftrightarrow x=κπ+\dfrac{π}{4}, κ\in Z$
9. Η $x=\dfrac{π}{2}$ είναι λύση της εφx=0
10. Ισχύει: $ημx=-συνx \Leftrightarrow εφx=-1$

Β. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις που βρίσκονται στη στήλη Α με τις ρίζες της που βρίσκονται στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Ρίζες
1. ημx=0	**α.** $x=2κπ+\dfrac{π}{2}$
2. συνx=0	**β.** x=(2κ+1)π
3. ημx=1	**γ.** x=κπ
4. συνx=1	**δ.** $x=2κπ-\dfrac{π}{2}$
5. ημx=-1	**ε.** $x=κπ+\dfrac{π}{2}$
6. συνx=-1	**στ.** x=2κπ

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ημ(Α-Β)=0 τότε το ΑΒΓ είναι :

α. ορθογώνιο **β.** ισοσκελές **γ.** ορθογώνιο και ισοσκελές

2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι συν(Β+Γ)=0 τότε το ΑΒΓ είναι :

α. ορθογώνιο **β.** ισοσκελές **γ.** οξυγώνιο

5η Ενότητα — **Προτεινόμενες Ασκήσεις**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. ημx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ β. ημx=-$\frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. σφx=-$\sqrt{3}$ δ. συνx=-$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2συν\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ β. $ημ\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=συν\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

γ. $συν\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=συν\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ δ. εφ2x=σφ$\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $ημ^2x=\frac{3}{4}$ β. $4συν^2x-1=0$

γ. $2ημ^2x+ημx=0$ δ. $εφ^2x\,(1-ημ^2x)=0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. (2ημx-1)($\sqrt{3}$ εφx+1)=0 β. $2ημ^2x+2ημx-\sqrt{2}\,ημx-\sqrt{2}=0$

γ. $συν^2x-4συνx+3=0$ δ. $ημ^2x-3συν^2x=-2$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. εφx=1 στο [π,2π] β. σφx=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

γ. $\frac{1}{ημ^2x}+2σφx=4$ στο $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ δ. $ημ\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ στο [0,2π]

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. συν(συνx)=1 στο [0,2π) β. $2ημ3x+\sqrt{2}=0$

γ. ημ2x=-ημx δ. συν2x+συν$\frac{x}{2}$=0

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. εφx-ημx=1-εφxημx β. 2ημ3xσυν2x=συν2x

γ. 2ημx=5+$\frac{3}{ημx}$ δ. $2συν^2x-\sqrt{3}\,ημx-2=0$

5η Ενότητα

Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της Στήλης Α με το πεδίο ορισμού της στη Στήλη Β

Στήλη Α Συνάρτηση	Στήλη Β Πεδίο Ορισμού
Α. $f(x)=\dfrac{1}{ημx}$	**1.** $IR-\left\{κπ+\dfrac{π}{2}, κ\in Z\right\}$
Β. $f(x)=\dfrac{1}{2ημx+1}$	**2.** $IR-\{2κπ, κ\in Z\}$
Γ. $f(x)=εφ^2x$	**3** $IR-\{κπ, κ\in Z\}$
Δ. $f(x)=\sqrt{συνx-1}$	**4.** $IR-\left\{2κπ-\dfrac{π}{6}, 2κπ+\dfrac{7π}{6}, κ\in Z\right\}$

ΘΕΜΑ Β

Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $ημx=-\dfrac{1}{2}$ β. $2συνx+\sqrt{3}=0$ γ. $εφx+\sqrt{3}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2συν\dfrac{x}{2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)+f(x-\dfrac{π}{4})=0$

6η Ενότητα

▪ Τριγωνομετρικοί αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Συνημίτονο		**Εφαπτομένη**	
Αθροίσματος	συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ	**Αθροίσματος**	$εφ(α+β)=\dfrac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$
Διαφοράς	συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ	**Διαφοράς**	$εφ(α-β)=\dfrac{εφα-εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$

Ημίτονο		**Συνεφαπτομένη**	
Αθροίσματος	ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ	**Αθροίσματος**	$σφ(α+β)=\dfrac{σφα\cdot σφβ-1}{σφα+σφβ}$
Διαφοράς	ημ(α-β)=ημασυνβ-συναημβ	**Διαφοράς**	$σφ(α-β)=\dfrac{σφα\cdot σφβ+1}{σφβ-σφα}$

❖ **Να αποδείξετε ότι: συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ**

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ
Αντικαθιστούμε το β με το –β και έχουμε:
συν[α-(-β)]=συνασυν(-β)+ημαημ(-β) ή συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ

❖ **Να αποδείξετε ότι: ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ**

Απόδειξη: $ημ(α+β)=συν[\frac{π}{2}-(α+β)]=συν(\frac{π}{2}-α-β)=συν[(\frac{π}{2}-α)-β]$

$$=συν\left(\frac{π}{2}-α\right)\cdot συνβ+ημ\left(\frac{π}{2}-α\right)\cdot ημβ=ημασυνβ+συναημβ$$

❖ **Να αποδείξετε ότι: ημ(α-β)=ημασυνβ-συναημβ**

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: ημ(α-β)=ημασυνβ-συναημβ
Αντικαθιστούμε το β με το –β και έχουμε:
ημ(α-β)=ημασυν(-β)+συναημ(-β)=ημασυνβ-συναημβ

❖ **Αν συν(α+β)$\neq$0, συνα$\neq$0, συνβ$\neq$0 να αποδείξετε ότι:**

$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$$

Διαιρούμε με συνασυνβ$\neq 0$

Απόδειξη: Είναι: $εφ(α+β)=\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=\frac{ημασυνβ+συναημβ}{συνασυνβ-ημαημβ}$

$$=\frac{\frac{ημασυνβ+συναημβ}{συνασυνβ}}{\frac{συνασυνβ-ημαημβ}{συνασυνβ}}=\frac{\frac{ημασυνβ}{συνασυνβ}+\frac{συναημβ}{συνασυνβ}}{\frac{συνασυνβ}{συνασυνβ}-\frac{ημαημβ}{συνασυνβ}}$$

$$=\frac{\frac{ημα}{συνα}+\frac{ημβ}{συνβ}}{1-\frac{ημα}{συνα}\cdot\frac{ημβ}{συνβ}}=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}.$$

❖ **Αν συν(α-β)$\neq$0, συνα$\neq$0, συνβ$\neq$0 να αποδείξετε ότι:**

$$εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: $εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$

Αντικαθιστούμε το β με το –β και έχουμε:

$$εφ(α-β)=\frac{εφα+εφ(-β)}{1-εφαεφ(-β)}=\frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}$$

❖ **Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:**

α). $σφ(α+β)=\frac{σφα\cdot σφβ-1}{σφα+σφβ}$ β). $σφ(α-β)=\frac{σφα\cdot σφβ+1}{σφβ-σφα}$

6η Ενότητα

Λυμένα παραδείγματα

Σχόλιο: Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας συγκεκριμένης γωνίας γράφουμε αυτή σαν άθροισμα ή διαφορά γωνιών ή πολ/σίων τους,άλλων γωνιών με γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 1.
Να υπολογιστεί το συν15^0
Λύση:

$$\sigma\upsilon\nu 15^0=\sigma\upsilon\nu(45^0-30^0)=\sigma\upsilon\nu 45^0\sigma\upsilon\nu 30^0+\eta\mu 45^0\eta\mu 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Παράδειγμα 2.
Να υπολογιστεί το ημ75^0
Λύση:

$$\eta\mu 75^0=\eta\mu(45^0+30^0)=\eta\mu 45^0\sigma\upsilon\nu 30^0+\sigma\upsilon\nu 45^0\eta\mu 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Παράδειγμα 3.
Να υπολογιστεί η εφ15^0
Λύση:

$$\varepsilon\varphi 15^0=\varepsilon\varphi(45^0-30^0)=\frac{\varepsilon\varphi 45^0-\varepsilon\varphi 30^0}{1+\varepsilon\varphi 45^0\varepsilon\varphi 30^0}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

Παράδειγμα 4.
Να υπολογιστεί το ημ165^0
Λύση:

$$\eta\mu 165^0=\eta\mu(120^0+45^0)=\eta\mu 120^0\sigma\upsilon\nu 45^0+\eta\mu 45^0\sigma\upsilon\nu 120^0$$
$$=\eta\mu(90^0+30^0)\sigma\upsilon\nu 45^0+\eta\mu 45^0\sigma\upsilon\nu(90^0+30^0)=\sigma\upsilon\nu 30^0\sigma\upsilon\nu 45^0-\eta\mu 45^0\eta\mu 30^0$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Σχόλιο: Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα συνήθως ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- Από το ένα μέλος ,συνήθως το πιο πολύπλοκο και με τη βοήθεια κατάλληλων τύπων και πράξεων προσπαθούμε να καταλήξουμε στο άλλο.
- Μετασχηματίζουμε την ταυτότητα μέχρι να καταλήξουμε σε ισοδύναμη ταυτότητα που να είναι φανερό ότι αληθεύει.
- Παίρνουμε κάθε μέλος ξεχωριστά και με τη βοήθεια κατάλληλων τύπων και πράξεων προσπαθούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 5.

Να αποδείξετε ότι: $συν\left(α+\frac{π}{4}\right)+συν\left(α-\frac{π}{4}\right)=\sqrt{2}συνα$

Απόδειξη:

$$συν\left(α+\frac{π}{4}\right)+συν\left(α-\frac{π}{4}\right)=συνασυν\frac{π}{4}-ημαημ\frac{π}{4}+συνασυν\frac{π}{4}+ημαημ\frac{π}{4}$$

$$=2συνασυν\frac{π}{4}=2συνα\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,συνα$$

Παράδειγμα 6.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}=εφα-εφβ$

Απόδειξη:

$$\frac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}=\frac{ημασυνβ-ημβσυνα}{συνασυνβ}=\frac{ημασυνβ}{συνασυνβ}-\frac{ημβσυνα}{συνασυνβ}=\frac{ημα}{συνα}-\frac{ημβ}{συνβ}$$

$=εφα-εφβ$.

Παράδειγμα 7.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1+εφα}{1-εφα}=εφ\left(\frac{π}{4}+α\right)$

Απόδειξη:

$$εφ\left(\frac{π}{4}+α\right)=\frac{εφ\frac{π}{4}+εφα}{1-εφ\frac{π}{4}εφα}=\frac{1+εφα}{1-εφα}$$

Σχόλιο: Αν δίνεται ισότητα γωνιών και θέλουμε να δείξουμε ισότητα τριγωνομετρικών αριθμών αυτών των γωνιών χρησιμοποιούμε τη συνεπαγωγή:

$$\text{Αν } α=β \text{ τότε : }\begin{cases} ημα=ημβ \\ συνα=συνβ \\ εφα=εφβ \\ σφα=σφβ \end{cases}$$

Προσοχή: Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει

Παράδειγμα 8.

Αν $\alpha+\beta=225^0$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\varphi\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\varphi\beta}{1+\sigma\varphi\beta}=\dfrac{1}{2}$

Απόδειξη:

$$\alpha+\beta=225^0 \Leftrightarrow \sigma\varphi(\alpha+\beta)=\sigma\varphi 225^0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}=\sigma\varphi(180^0+45^0)$$

Προσθέτω σφασφβ

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}=\sigma\varphi 45^0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}=1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1=\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta=1+\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta \Leftrightarrow 2\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta=(1+\sigma\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta}{(1+\sigma\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\beta)}=\frac{1}{2}$$

Σχόλιο: Όταν αναφερόμαστε σε τρίγωνο ΑΒΓ χρησιμοποιούμε την ισότητα Α+Β+Γ=π από όπου προκύπτουν:

- $\eta\mu(A+B)=\eta\mu(\pi-\Gamma)=\eta\mu\Gamma$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu(A+B)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$
- $\eta\mu\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}$

κ.λ.π.

Παράδειγμα 9.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

Απόδειξη:

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο ,ορίζονται οι εφΑ,εφΒ,εφΓ.

Επειδή επιπλέον $A+B=\pi-\Gamma\neq\dfrac{\pi}{2}$, ορίζεταιη εφ(Α+Β) και έτσι έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=-\varepsilon\varphi\Gamma(1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=-\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

Παράδειγμα 10.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu A}=2\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: $\dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu A}=2\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu(A+\Gamma)=2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu\Gamma-$
$2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma=0 \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A-\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma=0 \Leftrightarrow \eta\mu(\Gamma-A)=0 \Leftrightarrow \Gamma-A=\kappa\pi, \kappa\in Z$

Οπότε:: $-\pi<\Gamma-A<\pi \Leftrightarrow -\pi<\kappa\pi<\pi \Leftrightarrow -1<\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa=0$ γιατί $\kappa\in Z$. Άρα Α=Γ (ισοσκελές).

6η Ενότητα

Ερωτήσεις Κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Ισχύει: ημ(α+β)=ημα+ημβ

2. Ισχύει: $εφ(α+β)=\dfrac{εφα+εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$

3. Ισχύει: $εφ(α-β)=\dfrac{σφα\cdot σφβ+1}{σφβ-σφα}$

4. Ισχύει: ημασυνβ-συναημβ= ημ(α-β)

5. Ισχύει: συν(α+β)=συνασυνβ+ημαημβ

6. Ισχύει: $σφ(α+β)=\dfrac{σφα\cdot σφβ+1}{σφα-σφβ}$

7. Ισχύει: $ημ110^0ημ70^0-συν110^0συν70^0=1$

8. Ισχύει: $\dfrac{εφ165^0+εφ15^0}{1-εφ165^0εφ15^0}=0$

9. Ισχύει: ημ2xσυνx+συν2xημx=ημ3x

10. Ισχύει: $\dfrac{εφx-εφ2x}{1+εφxεφ2x}=εφx$

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της στη στήλη Β με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι περιορισμοί για τις γωνίες όπου χρειάζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
1.συν(α+β)	**α.** ημ(α+β)
2.σφ(α-β)	**β.** εφ(α-β)
3.ημασυνβ+συναημβ	**γ.** $\dfrac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$
4. $\dfrac{εφα-εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$	**δ.** συνασυνβ-ημαημβ
5.εφ(α+β)	**ε.**ημασυνβ-ημβσυνα
6. ημ(α-β)	**στ.** $\dfrac{σφα\cdot σφβ+1}{σφβ-σφα}$

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Η παράσταση Α=συν68^0συν78^0+συν22^0συν12^0-συν10^0 είναι ίση με

Α. 0 **Β.**1 **Γ.**$\frac{1}{2}$ **Δ.** 1-συν10^0

2. Η παράσταση $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{16}-\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{16}}{1+\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{16}\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{16}}$ είναι ίση με:

Α. 0 **Β.** $\sqrt{3}$ **Γ.**1 **Δ.** -$\sqrt{3}$

3. Η παράσταση ημ105^0 είναι ίση με:

Α. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **Β.**$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **Δ.**$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. Η παράσταση συν(45^0-α)συν(45^0-β)-ημ(45^0-α)ημ(45^0-β) είναι ίση με:

Α.ημ(α-β) **Β.** συν(α-β) **Γ.** ημ(α+β) **Δ.** ημ(β-α)

5. Η παράσταση Α=συνασυν3α-ημαημ3α είναι ίση με:

Α.συν2α **Β.** συν4α **Γ.** ημ4α **Δ.** ημ2α

Δ. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο πρόσημο , ώστε οι παρακάτω ισότητες να αληθεύουν για κάθε α, β:

1. συνασυνβ+ημαημβ= συν(α….β)

2. συνασυνβ….ημαημβ= συν(α-β)

3. ημαημβ…συνασυνβ=συν[π-(α+β)]

4. ημασυνβ…...ημβσυνα=ημ(α+β)

5. ημασυνβ….συναημβ=συν$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)$

6. εφ(α+β)=$\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+......}{1-.......\varepsilon\varphi\beta}$

7. σφ(α-β)=$\dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+.......}{.......-\sigma\varphi\alpha}$

8. ημ(α-β)=ημα……-……..ημβ

6η Ενότητα

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι:

α. $συν\frac{15π}{7}συν\frac{6π}{7} - ημ\frac{15π}{7}ημ\frac{6π}{7} = -1$ β. $ημ105^0+συν105^0=συν45^0$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$συν\left(x+\frac{π}{4}\right)συν\left(2x-\frac{π}{4}\right) - ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)ημ\left(\frac{π}{4}-2x\right) = ημx$$

3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ(α+β)ημ(α-β)}{συν^2ασυν^2β} = εφ^2α - εφ^2β$

4. Αν α ,β είναι οξείες γωνίες τέτοιες ώστε εφα=$\frac{1}{2}$ και εφβ=$\frac{1}{3}$ να δείξετε ότι:

$$α+β=\frac{π}{4}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

α. ημ(α-β)συνβ+ημβσυν(α-β)=ημα

β. $συν(36^0-α)συν(36^0+α)+συν(54^0+α)συν(54^0-α)=συν2α$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{εφ^2 2α - εφ^2α}{1-εφ^2 2αεφ^2α} = εφ3αεφα$$

7. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2συναημβ - ημ(α+β)}{2συνασυνβ - συν(α+β)} = εφ(β-α)$$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{σφ^2ασφ^2β - 1}{σφ^2β - σφ^2α} = σφ(α+β)σφ(α-β).$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2ημ(α-β)}{συν(α+β)+συν(α-β)} = εφα - εφβ$$

10. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(1-\varepsilon\phi\alpha)\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)}{1+\varepsilon\phi\alpha}=\sigma\upsilon\nu(45^0+\alpha)$

11. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{3}$συνα-ημ^{3}α-συν^{2}αημα=2συν(α+30^0).

12. Αν συν(α-β)=0 να αποδείξετε ότι ημ(α-2β)=ημα.

13. Αν ισχύει α+β=2004π-$\dfrac{\pi}{4}$ να αποδείξετε ότι: 1+εφα+εφβ=εφαεφβ

14. Αν Α ,Β ,Γ γωνίες τριγώνου να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\phi\frac{A}{2}\varepsilon\phi\frac{B}{2}+\varepsilon\phi\frac{B}{2}\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\phi\frac{A}{2}=1$$

15. Αν ημx-ημy=α και συνx+συνy=β να υπολογίσετε το συν(x+y) και να δείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2\le 4$$

16. Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α=ημ^{2}x-ημ^2(x+α)+2ημαημ(x+α)συνx είναι ανεξάρτητη του x

17. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: ημ(Α-Β)=1-2συνΑημΒ να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο

18. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\alpha-2\eta\mu(45^0-\alpha)}{2\eta\mu(60^0+\alpha)-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sqrt{2}$$

19. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=45^0$ να αποδείξετε ότι:

(1+σφΒ)(1+σφΓ)=2

20. Αν α-β=$\dfrac{\pi}{6}$ να αποδείξετε ότι: (σφβ+$\sqrt{3}$)(σφα-$\sqrt{3}$)=-4

21. Να αποδείξετε ότι: εφ70^0+εφ130^0+εφ160^0=εφ20^{0}εφ50^{0}εφ70^0

22. Αν 0<α,β<π/2 να αποδείξετε ότι: ημ(α+β)< ημα+ημβ

23. Αν εφx=$\dfrac{17}{87}$ να αποδείξετε ότι: 87συν2x+17ημ2x=87

6η Ενότητα

Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α. Αν $συν(α+β)\neq 0$, $συνα\neq 0$, $συνβ\neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$$

Β. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α. $Α=ημ10^0συν35^0+ημ35^0συν10^0$

β. $Β=\frac{εφ40^0+εφ5^0}{1-εφ40^0εφ5^0}$

ΘΕΜΑ Β

Α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ(α+β)}{ημ(α-β)}=\frac{εφα+εφβ}{εφα-εφβ}$

Β. Να αποδείξετε ότι: $ημ(x-\frac{π}{4})+ημ(x+\frac{π}{4})=\sqrt{2}\,ημx$

ΘΕΜΑ Γ

Α. Να υπολογιστούν το ημ(α-β) και το συν(α+β) αν είναι: $ημα=\frac{3}{5}$ και $συνβ=-\frac{5}{13}$,

$0<α<\frac{π}{2}$ και $\frac{π}{2}<β<π$

Β. Να λυθεί η εξίσωση $ημx=συν(x+\frac{π}{6})$

7η Ενότητα

▪ Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Τύποι που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α με αυτούς της γωνίας α **$2\alpha \to \alpha$**	$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
	$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Τύποι αποτετραγωνισμού	$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
	$\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$	$\sigma\varphi^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Ημίτονο και Συνημίτονο της γωνίας 2α με βάση την εφα	$\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Ημίτονο και Συνημίτονο της γωνίας 3α	$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

Τύποι που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α με αυτούς της γωνίας α/2 **$\alpha \to \alpha/2$**	$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$
	$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$	$\sigma\varphi\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}}$

❖ **Να αποδείξετε ότι: ημ2α=2ημασυνα**

Απόδειξη: $\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(\alpha+\alpha) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

❖ **Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$**

Απόδειξη: $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\eta\mu\alpha=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}$

$$=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\\(1-\eta\mu^2\alpha)-\eta\mu^2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha\end{cases}$$

❖ **Να αποδείξετε ότι:** $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Απόδειξη: $\varepsilon\varphi2\alpha=\varepsilon\varphi(\alpha+\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha}=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

❖ **Να αποδείξετε ότι:** $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

Απόδειξη: $\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1+\sigma\upsilon\nu2\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

❖ **Να αποδείξετε ότι:** $\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

Απόδειξη: $\sigma\upsilon\nu2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha\Leftrightarrow2\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu2\alpha\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

❖ **Να αποδείξετε ότι:** $\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

Απόδειξη: $\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}}{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

❖ **Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $\sigma\upsilon\nu\alpha\neq0$ ισχύει:** $\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Απόδειξη: $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

❖ **Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με συνα $\neq$ 0 ισχύει:** $συν2α=\dfrac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}$

Απόδειξη: $συν2α=συν^2α-ημ^2α=\dfrac{συν^2α-ημ^2α}{συν^2α+ημ^2α}=\dfrac{\dfrac{συν^2α}{συν^2α}-\dfrac{ημ^2α}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α}{συν^2α}+\dfrac{ημ^2α}{συν^2α}}=\dfrac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}$

❖ **Να αποδείξετε ότι: $ημ3α=3ημα-4ημ^3α$**

Απόδειξη: $ημ3α=ημ(2α+α)=ημ2ασυνα+συν2αημα=2ημασυν^2α+(1-2ημ^2α)ημα$
$= 2ημα(1-ημ^2α)+(1-2ημ^2α)ημα=2ημα-2ημ^3α+ημα-2ημ^3α$
$= \mathbf{3ημα-4ημ^3α}$

❖ **Να αποδείξετε ότι: $συν3α=4συν^3α-3συνα$**

Απόδειξη: $συν3α=συν(2α+α)=συν2ασυνα-ημ2αημα=(2συν^2α-1)συνα-2ημ^2ασυνα$
$= (2συν^2α-1)συνα-2(1-συν^2α)συνα=2συν^3α-συνα-2συνα+2συν^3α$
$= \mathbf{4συν^3α-3συνα}$.

❖ **Να αποδείξετε ότι:** $ημα=2ημ\dfrac{α}{2}συν\dfrac{α}{2}$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: ημ2α=2ημασυνα

Αντικαθιστούμε τα α με το $\dfrac{α}{2}$ και έχουμε: $ημα=2ημ\dfrac{α}{2}συν\dfrac{α}{2}$

❖ **Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι τύποι**

- $συνα=συν^2\dfrac{α}{2}-ημ^2\dfrac{α}{2}=2συν^2\dfrac{α}{2}-1=1-2ημ^2\dfrac{α}{2}$
- $εφα=\dfrac{2εφ\dfrac{α}{2}}{1-εφ^2\dfrac{α}{2}}$
- $σφα=\dfrac{σφ^2\dfrac{α}{2}-1}{2σφ\dfrac{α}{2}}$

7η Ενότητα

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$

Λύση: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}=\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$

Παράδειγμα 2.

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

Λύση: $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

Παράδειγμα 3.

Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$

Λύση: $\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}=\dfrac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$

Παράδειγμα 4.

Να λυθεί η εξίσωση: $2\text{-}\eta\mu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{2}$

Λύση: $2\text{-}\eta\mu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow 2\text{-}\eta\mu^2x=1+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 2\text{-}(1\text{-}\sigma\upsilon\nu^2x)=1+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x\text{-}\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x\text{-}1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0$ ή $\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$

Παράδειγμα 5.

Να υπολογίσετε το $\eta\mu 22{,}5^0$

Λύση: $\eta\mu^2 22{,}5^0=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 45^0}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ άρα $\eta\mu 22{,}5^0=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

7η Ενότητα **Ερωτήσεις Κατανόησης**

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Ισχύει: $συν2α=ημ^2α-συν^2α$
2. Ισχύει: $συν2α=2ημασυνα$
3. Ισχύει: $ημ2α=\dfrac{2εφα}{1+εφ^2α}$
4. Ισχύει: $συνα=συν^2\dfrac{α}{2}-ημ^2\dfrac{α}{2}$
5. Ισχύει: $εφ^2α=\dfrac{1+συν2α}{1-συν2α}$
6. Ισχύει: $ημ3α=4ημ^3α-3ημα$
7. Ισχύει: $συν2α=1-2συν^2α$
8. Ισχύει: $συνα=2συν^2\dfrac{α}{2}-1$
9. Ισχύει: $συν^2α=\dfrac{1-συν2α}{2}$
10. Ισχύει: $2ημασυνα=ημ^2α$

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $2ημασυνα$	**1.** $\dfrac{1+συν2α}{2}$
Β. $εφ2α$	**2.** $\dfrac{1-συν2α}{1+συν2α}$
Γ. $συν^2α$	**3.** $συν2α$
Δ. $συν^2α-ημ^2α$	**4.** $\dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$
Ε. $εφ^2α$	**5.** $ημ2α$

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Το ημ6α είναι ίσο με :

Α. $2ημ4ασυν2α$ **Β.** $2ημ3ασυν3α$ **Γ.** $1-2συν^23α$ **Δ.** $2ημ^23α-1$

2. Η παράσταση $συν^24α-ημ^24α$ είναι ίση με:

Α. $ημ2α$ **Β.** $1-2ημ^2 α$ **Γ.** $2συν^22α-1$ **Δ.** $συν8α$

3. Η παράσταση $2ημ75^0ημ15^0$ είναι ίση με :

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

7η Ενότητα

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $\eta\mu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ β. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}-1$ γ. $\frac{\varepsilon\varphi 75^0}{1-\varepsilon\varphi^2 75^0}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A=2\eta\mu\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)$ β. $B=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ β. $B=\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^3\alpha\eta\mu\alpha$

4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\sigma\varphi\alpha$ β. $\varepsilon\varphi(45^0-\alpha)=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$

5. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ β. $1-2\eta\mu^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)=\eta\mu\alpha$

6. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^4\alpha-6\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu 4\alpha$ β. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha+\eta\mu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}=1-\frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$

7. Να αποδείξετε ότι:

α. $\eta\mu 2\alpha=\frac{2}{\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}$ β. $\frac{2\eta\mu\alpha-\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}$

8. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 2\alpha-\eta\mu\alpha}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}$ β. $\frac{1+\eta\mu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$

9. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$ β. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

10. Να αποδείξετε ότι:

α. $συν^2 20^0 - συν^2 70^0 = συν40^0$ β. $4ημ18^0 συν36^0 = 1$

11. Να αποδείξετε ότι:

α. $εφ15^0 + εφ75^0 = 4$ β. $ημ10^0 συν20^0 συν40^0 = \frac{1}{8}$

12. Να αποδείξετε ότι:

α. $συνα = \frac{1}{2} \cdot \frac{ημ2α}{ημα}, α \neq κπ, κ \in Z$

β. $συν\frac{π}{13} \cdot συν\frac{2π}{13} \cdot συν\frac{3π}{13} \cdot συν\frac{4π}{13} \cdot συν\frac{5π}{13} \cdot συν\frac{6π}{13} = \frac{1}{64}$

13. α. Να αποδείξετε ότι: $συν4x = 8συν^4x - 8συν^2x + 1$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $16συν^4x - 16συν^2x + 3 = 0$.

14. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ3α}{ημα} - \frac{συν3α}{συνα} = 2$

15. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ4α + ημ2α}{1 + συν4α + συν2α} = εφ2α$

16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{συν^3α - συν3α}{συνα} + \frac{ημ^3α + ημ3α}{ημα} = 3$

17. Να αποδείξετε ότι:

α. $1 - εφ^2x = \frac{2εφx}{εφ2x}$

β. $\left(εφ^2\frac{π}{9} - 1\right) \cdot \left(εφ^2\frac{2π}{9} - 1\right) \cdot \left(εφ^2\frac{4π}{9} - 1\right) = 8$

18. α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{ημ3α}{1 + 2συν2α} = ημα$

β. Να υπολογίσετε το $ημ15^0$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $συν2x - ημx - 1 = 0$ β. $2 - συν^2x = 4ημ^2\frac{x}{2}$

20. Να λυθεί η εξίσωση: $συν^3xημx - ημ^3xσυνx = \frac{1}{4}$

7η Ενότητα

Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι: $συν2α=συν^2α-ημ^2α=2συν^2α-1=1-2ημ^2α$

Β. Να αποδείξετε ότι: $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$

ΘΕΜΑ Β

Α. Αν $3συν^2x+5συνx-2=0$ και $ημx>0$ να υπολογιστούν το ημ2x ,συν2x, εφ2x

Β. Αν $π<α<\frac{3π}{2}$ και $ημα=-\frac{4}{5}$ να υπολογιστεί η παράσταση $Α=συν2α-2ημ2α$

ΘΕΜΑ Γ

Να αποδείξετε ότι:

Α. $1-ημα=2\,ημ^2\left(\frac{α}{2}-45^0\right)$

Β. $\frac{ημ2α}{1-συν2α}\cdot\frac{1-συνα}{συνα}=εφ\frac{α}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Α. Να αποδείξετε ότι: $συνα+ημ^2\frac{α}{2}=συν^2\frac{α}{2}$

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $συνx+ημ^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$

1^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α. Να αποδείξετε ότι: $συν2α=2συν^2α-1$ Μονάδες 13

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ημ70^0$	α. $ημ40^0ημ30^0+συν40^0συν30^0$
2. $συν10^0$	β. $ημ40^0συν30^0-ημ30^0συν40^0$
3. $συν70^0$	γ. $ημ30^0συν40^0+ημ40^0συν30^0$
4. $ημ10^0$	δ. $συν40^0συν30^0-ημ40^0ημ30^0$
	ε. $ημ30^0συν40^0-ημ40^0συν30^0$.

Μονάδες 12

Θέμα Β

Α. Αν $f(x)=\frac{5}{3}συν\frac{2x}{3}$ να βρεθεί :

i. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f Μονάδες 5

ii. Να βρεθεί η περίοδος της f Μονάδες 5

Β. Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i. $ημx=-\frac{1}{2}$ ii. $συνx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ iii. $εφx=\sqrt{3}$ Μονάδες 15

Θέμα Γ

Α. Αν $x=συν^2α-ημ^2α$ και $y=2ημασυνα$,να δείξετε ότι $x^2+y^2=1$ Μονάδες 10

Β. Να δείξετε ότι:

$$\frac{συν^3α-συν3α}{συνα}+\frac{ημ^3α+ημ3α}{ημα}=3$$

Μονάδες 15

Θέμα Δ

Α. Να δείξετε ότι : $4ημ18^0συν36^0=1$ Μονάδες 12

Β. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Γ}=135^0$ να δείξετε ότι:

$(1+εφΑ)(1+εφΒ)=2$ Μονάδες 13

2^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ Μονάδες 12

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
i) ημ5ασυνα+ημασυν5α	α) συν4α
ii) ημασυν3α-ημ3ασυνα	β) -συν3α
iii) συν3ασυνα-ημαημ3α	γ). ημ6α
iv) ημαημ2α-συνασυν2α	δ). -ημ2α
	ε). συν3α

Μονάδες 8

Γ. Αν για τη γωνία Β τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = 1$ τότε:

α. $B = 45^0$ **β.** $B = 90^0$ **γ.** $B = 60^0$ **δ.** $B > 90^0$

Μονάδες 5

Θέμα Β

Α. Αν $f(x) = \frac{1}{3}\eta\mu\sqrt{2}x$ να βρεθεί :

i. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f Μονάδες 5

ii. Να βρεθεί η περίοδος της f Μονάδες 5

Β. Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ iii. $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$ Μονάδες 15

Θέμα Γ

Α. Να δείξετε ότι $(\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x)^2 + \eta\mu 4x = 1$ Μονάδες 10

Β. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu^3\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \sigma\varphi\alpha$ Μονάδες 15

Θέμα Δ

Α. Να δείξετε ότι : $\eta\mu 195^0 \eta\mu 75^0 = -\frac{1}{4}$ Μονάδες 12

Β. Αν $\alpha + \beta = 225^0$ να δείξετε ότι:

$(1+\sigma\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\beta) = 2\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta$ Μονάδες 13

3^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ Μονάδες 12

Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α= $\dfrac{\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{16}-\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{16}}{1+\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{16}\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{16}}$ Μονάδες 8

Γ. Αν για τις γωνίες Α, Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-1=1-2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$$ τότε είναι:

i.Α>Γ ii. Α<Γ iii. Α=2Γ iv. Γ=Α v. κανένα από αυτά

Μονάδες 5

Θέμα Β

Α. Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i. 2ημx+1=0 ii. 2συνx+$\sqrt{2}$=0 Μονάδες 12

Β. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 40^o-\sigma\upsilon\nu^2 50^o=\eta\mu 10^o$ Μονάδες 13

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση: f(x)=3ημαx με περίοδο το π.

i. Να βρείτε το α Μονάδες 7

ii. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f Μονάδες 8

iii. Για τη τιμή του α του ερωτήματος i) να λύσετε την εξίσωση $f(x)-3=0$

Μονάδες10

Θέμα Δ

Α. Να δείξετε ότι : $\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2 40^0}{1+\varepsilon\varphi^2 40^0}=\eta\mu 10^0$ Μονάδες 12

Β. να δείξετε ότι: $\dfrac{2\eta\mu\alpha-\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}$ Μονάδες 13

4^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α. Να αποδείξετε ότι: ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) η Λάθος (Λ)

α. Η συνάρτηση f(x)=ρ ημωx όπου ρ,ω>0 έχει περίοδο Τ= $\frac{2\pi}{\omega}$ Σ Λ

β. Ισχύει: ημx=ημθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ$\pm$ θ Σ Λ

γ. Ισχύει: $\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ Σ Λ

δ. Ισχύει: συν2α=$\eta\mu^2\alpha$-$\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ Σ Λ

ε. Ισχύει: $\eta\mu\alpha=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ Σ Λ

Μονάδες 5x2=10

Θέμα Β

Α. Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i. 2ημ3x=$\sqrt{3}$ Μονάδες 8

ii. ημ2x-συνx=0 Μονάδες 8

Β. Να δείξετε ότι: $\eta\mu(x+\frac{\pi}{3})+\eta\mu(x-\frac{\pi}{3})=\eta\mu x$ Μονάδες 9

Θέμα Γ

Α. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει 1-συνΑ=$\eta\mu\frac{A}{2}$ να αποδείξετε ότι $\hat{A}=60^0$

Μονάδες 10

Β. Αν x+y=45^0 και εφx=2 να βρεθεί η εφy Μονάδες 15

Θέμα Δ

Α. Να δείξετε ότι : $\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ Μονάδες 12

Β. Αν ημα=$\eta\mu^2\beta$ να δείξετε ότι: 4(συν2α-συν2β)=1-συν4β Μονάδες 13

Υποδείξεις – Απαντήσεις

Των Ασκήσεων Για Λύση

Κεφάλαιο 3^0

$1^η$ -$2^η$ -$3^η$ Ενότητα
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί
Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Ερωτήσεις Κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ

Β. 1. $\alpha \to v$ 2. v. 3.iv. 4.iii. 5.iv.
$\beta \to iii$
$\gamma \to v$

Γ. $\alpha \to 2$, $\beta \to 6$, $\gamma \to 1$, $\delta \to 4$, $\varepsilon \to 7$, $\sigma\tau \to 3$

Δ. $A \to 3$, $B \to 1$, $\Gamma \to 4$, $\Delta \to 2$, $E \to 6$
$\Sigma T \to 5$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. ΑΓ$=2\sqrt{3}$, ΑΗ$=\sqrt{3}$, ΑΒ=2
2. ΒΓ=37,5, ΑΓ=22,5, ΑΔ=18
3. h$=10\sqrt{3}$ Km
4. Α=-3
5. Από ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ: $ημB = \frac{AΔ}{AB}$
Από ορθογώνιο τρίγωνο
ΑΔΓ : $ημΓ = \frac{AΔ}{AΓ}$ Τότε:
$\frac{1}{ημB} + \frac{1}{ημΓ} = \frac{AB + AΓ}{AΔ}$ (1). Από τα τρίγωνα
ΑΒΕ και ΑΖΓ είναι:
ΒΕ=ΑΒ ημΑ και ΓΖ=ΑΓημΑ Άρα
ΒΕ+ΓΖ=(ΑΒ +ΑΓ)ημΑ ή ΑΔ=(ΑΒ+ΑΓ)ημΑ
ή $\frac{1}{ημA} = \frac{AB + AΓ}{AΔ}$ (2).
Από (1),(2)……..

7. Β=1

8. Πρέπει ημφ=1 και συνω=1
Άρα φ=π/2, ω=0
9. Είναι $|συνx| \le 1$…….
10. α). min 1, max 5 β). min-7 ,max 3
γ). min2 ,max 8
11. Δ>0
12. $S=-\frac{\beta}{\alpha}$, $P=\frac{\gamma}{\alpha}$…….
13. α). Θέτω συνω=x, Δ>0,……
β). $ημω=-\frac{4}{5}$,$εφω=\frac{4}{3}$, $σφω=\frac{3}{4}$
19. Α+Β+Γ=Π……..
21. Παρατηρήστε $ημ40^0=συν50^0$
$ημ20^0=συν70^0$ κ.λ.π.
22. $συν^2α=1-ημ^2α$…….
23. …….$(συνθ-1)^2 \ge 0$
25. $Α=εφ^3ω$ Β=εφω…..

1^0 Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1. Α. $\alpha \to 2$, $\beta \to 4$, $\gamma \to 1$, $\delta \to 6$, $\varepsilon \to 7$
$\sigma\tau \to 5$

Β.

1	2	3	4
Λ	Σ	Λ	Λ

Θ2. Α. $συνω=-\frac{4}{5}$, $εφω=-\frac{3}{4}$,$σφω=-\frac{4}{3}$

2^0 Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1. Α. $1 \to iv$, $2 \to iv$

Β. 1. α). συνω β). –σφω γ). συνθ
δ). –ημθ

2. α). $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $-\frac{1}{2}$ γ). $\frac{1}{2}$ δ).-1

Θ3. Παρατηρήστε $εφ420^0=εφ(360^0+60^0)=$
$εφ60^0$,$ημ510^0==ημ(360^0+150^0)=ημ150^0$
$=ημ30^0$ κ.λ.π………

4η Ενότητα
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης
Α.

1	2	3	4	5
Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

6	7	8	9	10
Σ	Σ	Λ	Σ	α.Σ β. Λ

Β. $1 \to \delta$, $2 \to \gamma$, $3 \to \alpha$, $4 \to \beta$
Γ. 1.
i). Γνησίως αύξουσα, Γνησίως φθίνουσα
Γνησίως φθίνουσα, Γνησίως αύξουσα
ii). Γνησίως φθίνουσα, Γνησίως φθίνουσα
Γνησίως αύξουσα, Γνησίως αύξουσα

2. Γνησίως αύξουσα
3. Γνησίως φθίνουσα

Δ. $\alpha \to$ ii, $\beta \to$ iv , $\gamma \to$ i, $\delta \to$ iii

Προτεινόμενες Ασκήσεις:

1. α). 2ημ2x β). 2συνx γ). -2ημ4x
2. Ελάχιστο της f: -2 , Μέγιστο της f : 2
$T=\sqrt{2}\,\pi$
Ελάχιστο της g: $-\sqrt{5}$, Μέγιστο της g : $\sqrt{5}$, $T=6\pi^2$
3. α). $f(x)=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}, x \neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$
β). $g(x)=\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x-1$, T=2π. Μετατόπιση της $\dfrac{1}{2}$συνx κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.
4. Η C_f αποτελείται από τα τμήματα της συνx πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$ της συνx που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. α). α=2 β=1
β). $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\eta\mu\dfrac{\pi}{4}=2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,
$g\left(-\dfrac{9}{4}\right)=2\eta\mu\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)=-2\eta\mu\dfrac{9\pi}{4}=$
$-2\eta\mu(\dfrac{8\pi+\pi}{4})=-2\eta\mu(2\pi+\dfrac{\pi}{4})=$
$-2\eta\mu\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$
άρα…..

6. α=0, β=5, γ=3

Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1.

1	2	3	4	5
Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

Θ2. 1. Ημιτονοειδής ,κέντρο,Ο(0,0),περιττή.
2. Αύξουσα, Τ=π, ασύμπτωτες, Ο(0,0),περιττή
Θ3. i). α=β=1
ii) Έχει περίοδο Τ=2π , Μεγιστο 2
Ελάχιστο 0……….

5η Ενότητα
Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης
Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ

Β. $1 \to \gamma$,$2 \to \varepsilon$,$3 \to \alpha$,$4 \to \sigma\tau$,$5 \to \delta$,$6 \to \beta$
Γ. 1 β). 2 α).

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. α). $x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$
β). $x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{4}$, $\kappa\in Z$
γ). $x=\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$
δ). $x=2\kappa\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}$, $\kappa\in Z$
2. α). $x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}$ ή $x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{9}$, $\kappa\in Z$
β). $x=-2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$
γ). $x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}+\dfrac{\pi}{18}$ ή $x=-2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$
δ). $x=\dfrac{\kappa\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18}$, $\kappa\in Z$

3. α). $x=2κπ+\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ+\frac{2π}{3}$ ή

$x=2κπ-\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ+\frac{4π}{3}$, $κ\in Z$

β). $x=2κπ\pm\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ\pm\frac{2π}{3}$, $κ\in Z$

γ). $x=κπ$ ή $x=2κπ-\frac{π}{6}$ ή $x=2κπ+\frac{7π}{6}$

δ). $x=κπ$ ή $=2κπ+\frac{π}{2}$ ή $x2κπ+\frac{3π}{2}$ ή

$x=2κπ-\frac{π}{2}$, $κ\in Z$

4. α). $x=2κπ+\frac{π}{6}$ ή $x=2κπ+\frac{5π}{6}$

ή $x=κπ+\frac{5π}{6}$, $κ\in Z$

β). $x=2κπ+\frac{3π}{2}$ ή $x=2κπ-\frac{π}{2}$ ή

$x=2κπ+\frac{π}{4}$ ή $x=2κπ+\frac{3π}{4}$, $κ\in Z$

γ). $x=2κπ$, $κ\in Z$

δ). $x=2κπ\pm\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ\pm\frac{2π}{3}$, $κ\in Z$

5. α). $x=\frac{5π}{4}$ β). $x=\frac{π}{3}$

γ). $x=\frac{5π}{4}$ δ). $x=\frac{7π}{12}$, $x=\frac{13π}{12}$

6. α). συν(συνx)=1 $\Leftrightarrow$ συνx=2κπ όμως

$-1\le συνx \le 1$ ……κ=0 άρα $x=\frac{π}{2}$

β). $x=\frac{2κπ}{3}-\frac{π}{12}$ ή $x=\frac{2κπ}{3}+\frac{5π}{12}$ $κ\in Z$

γ). $x=\frac{2κπ}{3}$ ή $x(2κ+1)π$, $κ\in Z$

δ). $x=\frac{4κπ}{5}+\frac{2π}{3}$ ή $x=\frac{4κπ}{3}-\frac{2π}{3}$, $κ\in Z$

7. α). $x=2κπ+\frac{3π}{2}$ ή $x=2κπ-\frac{π}{2}$ ή

$x=κπ+\frac{π}{4}$, $κ\in Z$

β). $x=κπ\pm\frac{π}{4}$ ή $x=\frac{2κπ}{3}+\frac{π}{12}$ ή

$x=\frac{2κπ}{3}+\frac{5π}{12}$, $κ\in Z$

γ). $x=2κπ-\frac{π}{6}$ ή $x=2κπ+\frac{7π}{6}$, $κ\in Z$

δ). $x=κπ$ ή $x=2κπ-\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ+\frac{4π}{3}$,

$κ\in Z$.

Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1. $Α\rightarrow 3$, $Β\rightarrow 4$, $Γ\rightarrow 1$, $Δ\rightarrow 2$

Θ2. α). $x=2κπ-\frac{π}{6}$ ή $x=2κπ+\frac{7π}{6}$, $κ\in Z$

β). $x=2κπ\pm\frac{5π}{6}$, $κ\in Z$

γ). $x=κπ-\frac{π}{3}$, $κ\in Z$

Θ3. α). Α=IR

β). $x=\frac{4κπ}{3}+\frac{3π}{4}$ ή $x=4κπ-\frac{9π}{4}$, $κ\in Z$

6η Ενότητα
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Ερωτήσεις Κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ

Β. $1\rightarrow δ$, $2\rightarrow στ$, $3\rightarrow α$, $4\rightarrow β$, $5\rightarrow γ$, $6\rightarrow ε$

Γ. 1 Α, 2 Γ, 3 Β ,4 Γ, 5 Β.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. β). Παρατηρήστε $ημ105^0=ημ(60^0+45^0)$……

5. β) Είναι: $συν(36^0-α)=συν[90^0-(54^0+α)]=$ $ημ(54^0+α)$ και $συν(54^0-α)=συν[90^0-(36^0+α)]=ημ(36+α)$ κ.λ.π.…

10. 1^0 μέλος: $\frac{\sqrt{2}}{2}(συνα-ημα)$

2^0 μέλος: $\frac{\sqrt{2}}{2}(συνα-ημα)$

12. $συν(α-β)=0 \Leftrightarrow α-β=κπ+\frac{π}{2}$, $κ\in Z$

$\Leftrightarrow β=α-κπ-\frac{π}{2}$.

Άρα: ημ(α-2β)=……

14. Είναι $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\Pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}$……..

15. συν(x+y)=$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-1$ ……

16. Α=ημ^{2}α

17. …..ημ(Α+Β)=1=ημ90^0 τότε

$\hat{A}+\hat{B}=90^0$ Άρα $\hat{\Gamma}=90^0$

19. Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=135^0$…….

21. Παρατηρήστε 70^0+130^0+160^0=360^0

Τότε 70^0+130^0=360^0-160^0 ….

22. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ συνα <1 και ημα>0

$0<\beta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ συνβ <1 και ημβ>

Τότε συναημβ<ημβ και συνβημα<ημα

Άρα συναημβ+συνβημα<ημβ+ημα δηλ.

ημ(α+β)<ημα+ημβ

23. Είναι 17=87εφx

Άρα 87συν2x+17ημ2x

87συν2x+87εφxημ2x=

87(συν2x+εφxημ2x)=

$\frac{87}{\text{συν}x}\text{συν}(2x-x)=87$.

Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1. Α. Θεωρία

Β. α). Α=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

β). Β=1

Θ3. Α. ημ(α-β)=$-\frac{63}{65}$

συν(α+β)=-$\frac{56}{65}$

Β. x=-κπ+$\frac{\pi}{6}$, κ$\in Z$.

7^η Ενότητα
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 2α

Ερωτήσεις Κατανόησης.

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ

Β. Α$\rightarrow$5, Β$\rightarrow$4, Γ$\rightarrow$1, Δ$\rightarrow$3, Ε$\rightarrow$2

Γ. 1 Β, 2 Δ, 3 Γ.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. i). $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ii). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ iii). -$\frac{\sqrt{3}}{6}$

2. i).Α=συνα ii). Β=συν2α

3. i).Α=ημ^{2}α ii). Β=$\frac{1}{2}$ημ2α

10. i).Είναι συν70^0=συν(90^0-20^0)=ημ20^0….

ii) Είναι:4ημ18^{0}συν36^0=

$$4\frac{\eta\mu 36^0}{2\sigma\upsilon\nu 18^0}\cdot\frac{\eta\mu 72^0}{2\eta\mu 36^0}=\frac{\eta\mu 72^0}{\sigma\upsilon\nu 18^0}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 18^0}{\sigma\upsilon\nu 18^0}=1$$

11. i). εφ15^0+σφ75^0=εφ15^0+σφ15^0=

$$\frac{\eta\mu 15^0}{\sigma\upsilon\nu 15^0}+\frac{\sigma\upsilon\nu 15^0}{\eta\mu 15^0}=\ldots=\frac{1}{\frac{1}{2}\eta\mu 30^0}=4$$

ii).ημ10^{0}συν20^{0}συν40^0=

$$\eta\mu 10^0\frac{\eta\mu 40^0}{2\eta\mu 20^0}\frac{\eta\mu 80^0}{2\eta\mu 40^0}=\eta\mu 10^0\frac{\eta\mu 80^0}{4\eta\mu 20^0}=$$

$$\eta\mu 10^0\frac{\sigma\upsilon\nu 10^0}{4\cdot 2\eta\mu 10^0\sigma\upsilon\nu 10^0}=\frac{1}{8}$$

12. ii). Εφαρμόζουμε τη σχέση i).

για x= $\frac{\pi}{13},x=\frac{2\pi}{13},,...,x=\frac{6\pi}{13}$

13. β). x=2κπ$\pm\frac{\pi}{6}$, x=2κπ$\pm\frac{5\pi}{6}$,x=2κπ$\pm\frac{\pi}{3}$

x=2κπ$\pm\frac{2\pi}{3}$, κ$\in Z$.

17. β). Εφαρμόζουμε τη σχέση α).

18. β). ημ15^0=$\frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}$

19. i). x=κπ ή x=2κπ-$\frac{\pi}{6}$ή$x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}$,

κ$\in Z$.

ii). x=2κπ$\pm\frac{\pi}{2}$, κ$\in Z$.

20. x=$\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$, κ$\in Z$.

Κριτήριο αξιολόγησης:

Θ1. Θεωρία

Θ2. Α. ημ2x=$\frac{4\sqrt{2}}{9}$,συν2x=-$\frac{7}{9}$,εφ2x=-$\frac{4\sqrt{2}}{7}$

Β. Α=-$\frac{31}{25}$

Θ4. Β. $x=4\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ή $x=4\kappa\pi\pm\frac{4\pi}{3}$, $\kappa\in Z$.

1^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θ1.

Α. Θεωρία

Β. $1\to\gamma$, $2\to\alpha$, $3\to\delta$, $4\to\beta$

Θ2.

Α. i). $f_{max}=\frac{5}{3}$,$f_{min}=-\frac{5}{3}$, ii). Τ=3π

Β. i) $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}$, $\kappa\in Z$

ii). $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in Z$

iii). $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in Z$

Θ4.Α. $4\eta\mu18^0\sigma\upsilon\nu36^0$=

$$4\frac{\eta\mu36^0}{2\sigma\upsilon\nu18^0}\cdot\sigma\upsilon\nu36^0=\frac{2\eta\mu36^0\sigma\upsilon\nu36^0}{\sigma\upsilon\nu18^0}=$$

$$\frac{\eta\mu72^0}{\sigma\upsilon\nu18^0}=\frac{\sigma\upsilon\nu18^0}{\sigma\upsilon\nu18^0}=1$$

Β. Είναι $\hat{A}+\hat{B}=45^0 \Leftrightarrow$ εφ(Α+Β)=1……….

2^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θ1.

Α. Θεωρία

Β. $i\to\gamma$, $ii\to\delta$, $iii\to\alpha$, $iv\to\beta$.

Γ. β

Θ2.

Α. i). $f_{max}=\frac{1}{3}$,$f_{min}=-\frac{1}{3}$, ii). Τ=$\sqrt{2}$ π

Β. i). $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}$, $\kappa\in Z$

ii). $x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$

iii). $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in Z$

Θ4. Α. $\eta\mu195^0\eta\mu75^0$=
$\eta\mu(180^0+15^0)+\eta\mu(90^0-15^0)$=
$-\eta\mu15^0\sigma\upsilon\nu15^0=-\frac{1}{2}\eta\mu30^0=-\frac{1}{4}$

Β. $\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\sigma\varphi(180^0+45^0)$=
$\sigma\varphi45^0=1$…………

3^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θ1.

Α. Θεωρία

Β. Α=1

Γ. iv).

Θ2.

Α. i). $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}$, $\kappa\in Z$

ii). $x=2\kappa\pi\pm\frac{5\pi}{4}$, $\kappa\in Z$

Θ3. i).α=2

ii).$f_{max}=3$, $f_{min}=-3$

iii). $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in Z$

4^0 Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Θ1.

Α. Θεωρία

Β.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

Θ2.

Α. i). $x=\frac{6\kappa\pi+\pi}{9}$ ή $x=\frac{6\kappa\pi+2\pi}{}9$, $\kappa\in Z$

ii). $x=\frac{-2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ή $x=-2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

Θ3. Β. εφy= -$\frac{1}{3}$

Θ4. Β. 1^0 μέλος: …….$2\eta\mu^2 2\beta$

2^0 μέλος:1-συν4β=1-συν2· 2β=
$1-(1-2\eta\mu^2 2\beta)=2\eta\mu^2 2\beta$

Βιβλιογραφία

1. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου - Θανάσης Ξένος –Εκδόσεις ΖΗΤΗ

2. Άλγεβρα Β΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου-α΄ τόμος-Γιάννης Βιδάλης,Βασίλης Γκιμίσης-Εκδόσεις Πατάκη

3. Άλγεβρα Β΄ Ενιαίου Λυκείου-Α΄τόμος-Αθ. Σκύφας, Νικ. Αντωνόπουλος, Χρ. Καγιάς, Παν. Γιαννάκος – Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

4. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου-Α΄τεύχος-Θ. Τζουβάρας, Κ. Τζιρώνης-Εκδόσεις Σαββάλας.

5. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου- Α΄τεύχος-Αν. Μπάρλας,Δ. Μανεσιώτης, Π. Κυριαζής-Ελληνοεκδοτική.

6. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου- α΄τεύχος-Ν. Λαμπρόπουλος-Εκδόσεις ΖΗΤΗ

7. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου-Β΄Έκδοση-Θ. Ξένος-Εκδόσεις ΖΗΤΗ

8. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)- Βιβλιομαθήματα-Εκδοτικές τομές ΟΡΟΣΗΜΟ

9. Άλγεβρα Β΄ Λυκείου-Κ. Γκατζούλης, Κ. Στράνης-Εκδόσεις Γκατζούλη

10. Ευκλείδης Β

11. Διαδίκτυο

Για απορίες σας , λάθη μου ή παραλείψεις

email: perikentrokk@gmail.com