ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΦΥΛΛΟ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ...
ΤΜΗΜΑ........ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....
ΣΧΟΛΙΑ ....
...
...

ΒΑΘΜΟΣ

Σύντομη Θεωρία

- **Βασική σκέψη στην διάταξη πραγματικών αριθμών**

  $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$ ή $\beta-\alpha<0$ και $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$ ή $\beta-\alpha>0$

Ιδιότητες

- Αν $(\alpha>0$ και $\beta>0) \Rightarrow \alpha+\beta>0$ και $(\alpha<0$ και $\beta<0) \Rightarrow \alpha+\beta<0$
- Αν α,β ομόσημοι έχουμε: $\alpha\cdot\beta>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}>0$

  Αν α,β ετερόσημοι έχουμε: $\alpha\cdot\beta<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0$

Σημαντική Ιδιότητα

$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Το ¨=¨ ισχύει όταν α = 0.

- $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$
- $\alpha^2+\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$
- $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

- $(\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma) \Rightarrow \alpha>\gamma$ ← *Μεταβατική Ιδιότητα*
- Αν $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\pm\gamma>\beta\pm\gamma$
- Αν $\gamma>0$ τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ και $\gamma<0$ τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$
- Αν $(\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta) \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\delta$
- Αν α, β, γ, δ > 0, ισχύει η συνεπαγωγή: $(\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta) \Rightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$
- Αν α, β >0 και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$ και

  $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$

Χρήσιμες Ανισοτικές Σχέσεις

- Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\cdot\beta$ και $\alpha^2+\beta^2 \geq -2\alpha\beta$
- Για κάθε $x,\psi \geq 0$, ισχύει $x+\psi \geq 2\sqrt{x\cdot\psi}$
- Αν $\alpha>0$, $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ και αν $\alpha<0$, τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$
- Αν α, β ομόσημοι τότε ισχύει $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$

Διαστήματα

Ανίσωση	$\alpha<x<\beta$	$\alpha<x\le\beta$	$\alpha\le x<\beta$	$\alpha\le x\le\beta$	$x\ge\alpha$	$x>\alpha$	$x\le\beta$	$x<\beta$
Διάστημα	$x\in(\alpha,\beta)$	$x\in(\alpha,\beta]$	$x\in[\alpha,\beta)$	$x\in[\alpha,\beta]$	$x\in[\alpha,+\infty)$	$x\in(\alpha,+\infty)$	$x\in(-\infty,\beta]$	$x\in(-\infty,\beta)$

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Να ελέγξετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις συμπληρώνοντας στον παρακάτω πίνακα το γράμμα Σ (για σωστή) ή Λ (για λανθασμένη) κάτω από τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν α > β και β > γ, τότε α > γ.
2. Αν $\alpha\ge 0$ και $\beta>0$ τότε $\alpha+\beta\ge 0$.
3. Αν $\alpha\ge 0$ και $\beta<0$ τότε $\alpha\cdot\beta\le 0$.
4. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha-\delta>\beta-\gamma$.
5. Αν $\alpha^2>0$ τότε $\alpha\ne 0$.
6. $\alpha^2\le 0 \Leftrightarrow \alpha=0$.
7. Αν $\alpha<\beta$ τότε $\alpha^2<\beta^2$.
8. Αν x > 0, τότε $x+\frac{1}{x}\ge 2$.
9. Αν α, β ετερόσημοι τότε: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$.
10. Ισχύει ότι $x^2+\psi^2+z^2\ne 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\psi=0$ ή $z=0$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Αν - 2 < α < 3, να βρείτε το πρόσημο της παρακάτω παράστασης :
$A=(\alpha+2)\cdot(\alpha-3)\cdot(\alpha+4)\cdot(\alpha-6)+2014$

2. Να αποδείξετε ότι:
α. $x^2\ge -9+6x$ **β.** $x\cdot(x-2)\ge -1$ **γ.** $x^2>2\cdot(x-3)$
δ. $x^2+\psi^2-2x+6\psi\ge -10$ **ε.** $x^2+\psi^2+4x-2\psi>-6$ **στ.** $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\ge 0$

3. Να βρείτε τις τιμές των $x,\psi\in\mathbb{R}$ αν:
α. $x^2+\psi^2-2x+6\psi=-10$ **β.** $x^2+\psi^2-10x+4\psi=-29$ **γ.** $2x^2+\psi^2+2x\psi-2x\le -1$

4. Να αποδείξετε ότι: **α.** $(x^2+\psi^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha x+\beta\psi)^2$.

β. $\frac{x^2+\psi^2}{2}\ge\left(\frac{x+\psi}{2}\right)^2$.

5. **α.** Αν $\alpha\ge 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha^3-\alpha$ και $1-\alpha^2$.
β. Αν α < 2 < β, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha\cdot\beta+4$ και $2(\alpha+\beta)$.

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς α^2+5 και $6\alpha-4$.

δ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 3^{34} και 2^{51}.

6. Αν $x^2<2\psi$, να αποδείξετε ότι: **α.** $\psi>0$ και **β.** $x^2-3\psi<0$

7. Αν x > 0 και x + ψ = 1, να αποδείξετε ότι: **α.** ψ < 1 και **β.** $x\cdot\psi<\frac{1}{2}$.

Θέματα από την τράπεζα θεμάτων

Β1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν $2\le\alpha\le4$ και $-4\le\beta\le-3$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha-2\beta$ και **β)** $a^2 - 2ab$

Μονάδες 12 + 13 = 25

Β2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 £ x £ 5$ και $-2 £ y £ -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ και **β)** x^2+y^2

Μονάδες 12 + 13 = 25

Β3. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με α > 0 και β > 0. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha+\frac{4}{\alpha}\ge4$ και **β.** $(\alpha+\frac{4}{\alpha})(\beta+\frac{4}{\beta})\ge16$

Μονάδες 12 + 13 = 25

Β4. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+b^2$ και Λ = 2αβ, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι: Κ ≥ Λ, για κάθε τιμή των α, β.

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ = Λ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12 + 13 = 25

Δ1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $a>1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0,\ 1,\ a,\ a^2,\ \sqrt{a}$

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας (με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha,\alpha^2,\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$

Μονάδες 8 + (10 + 7) = 25