

**Μαθητές με σχολικές δυσκολίες:  
Εμπόδια στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων  
και αντιμετώπισή τους**

**Γιώργος Μπάρμπας**

**Βασικά χαρακτηριστικά των μαθητών με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά**

Οι μαθητές με σχολικές δυσκολίες εμφανίζουν στη μαθησιακή διαδικασία της τάξης προβλήματα και εμπόδια, τα οποία δεν αφορούν μόνο στις διδασκόμενες σχολικές γνώσεις. Από την έρευνα στο χώρο της Παιδαγωγικής και της Ψυχολογίας έχουν συγκεντρωθεί πολλά στοιχεία και δεδομένα. Ειδικότερα, μπορούμε να αντλήσουμε ερευνητικά δεδομένα για τα μαθησιακά χαρακτηριστικά των μαθητών με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά από τους τομείς έρευνας που σχετίζονται με τα προβλήματα στη νοητική ανάπτυξη, με τις ειδικές διαταραχές στην αριθμητική, καθώς και τη διδακτική των Μαθηματικών. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να ταξινομήσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των σχολικών δυσκολιών στα μαθηματικά σε τρεις τομείς:

<b>Γνώσεις</b>	<b>Μέθοδοι</b>	<b>Αντιλήψεις Συμπεριφορές</b>
Έννοιες Ορισμοί Ιδιότητες Σχέσεις Κανόνες	Οργάνωση – Προ- γραμματισμός Μέθοδοι επεξεργασίας Στρατηγικές Τρόποι σκέψης	Νόημα των πραγμάτων Κίνητρα Αντίληψη του εαυτού Συναισθήματα

Οι δύο πρώτοι τομείς αναφέρονται σε δύο βασικά επίπεδα γνώσης:

α) Στο επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων και ειδικών μεθόδων. Στο επίπεδο αυτό εντάσσονται οι δυσκολίες στην αυτοματοποίηση και τη χρήση των συμβόλων, οι αδυναμίες στις έννοιες, τους αλγορίθμους και τους κανόνες, καθώς και οι αδυναμί-

ες σε ειδικές μεθόδους που συνδέονται με επιμέρους μαθηματικές γνώσεις (όπως είναι για παράδειγμα ο μηχανισμός της διαίρεσης, η απλή μέθοδος των τριών, ο τρόπος επίλυσης μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού, κ.α.).

β) Στο επίπεδο *των γενικών μεθόδων, διεργασιών και διαδικασιών* που είναι αναγκαίες για την επιτέλεση των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Στο επίπεδο αυτό εντάσσονται οι αδυναμίες στις γνωστικές στρατηγικές μάθησης, οι δυσκολίες στην ανάπτυξη του επαγωγικού και λογικο-μαθηματικού συλλογισμού, η χαμηλή ικανότητα συνδυασμού στοιχείων και αναγνώρισης σχέσεων, οι αδυναμίες στην οργάνωση και στον προγραμματισμό της επεξεργασίας των προβλημάτων, καθώς και οι αδυναμίες στον έλεγχο και την επαλήθευση της λύσης.

Η διάκριση των ανεπαρκειών ή δυσκολιών σε δύο επίπεδα θεμελιώνεται συνήθως με αναφορά στα διαφορετικά χαρακτηριστικά της γνώσης στο κάθε ένα απ' αυτά. Οι μαθηματικές έννοιες, οι κανόνες, οι αλγόριθμοι είναι δυνατόν να ενταχθούν στο είδος της γνώσης που χαρακτηρίζεται ως *ανακοινωτική* ή *δηλωτική* (declarative Knowledge) και η οποία αναφέρεται στο περιεχόμενο της γνώσης, στις πληροφορίες που διαθέτει το άτομο. Οι γενικές και ειδικές μέθοδοι και διαδικασίες είναι δυνατόν να ενταχθούν στο είδος της γνώσης που ονομάζεται *διαδικαστική* (procedural Knowledge). Η διαδικαστική γνώση θεωρείται ότι περιλαμβάνει όλες τις μορφές σκέψης του ατόμου. Αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο ένα άτομο σκέφτεται, όταν πρόκειται να προβεί σε μια ενέργεια ή να αξιολογήσει εκ των υστέρων μια πράξη του. ***Η ανακοινωτική και η διαδικαστική γνώση συνδέονται στενά μεταξύ τους. Αποτελούν συστατικά της γνώσης, ως ενιαίας οντότητας, η οποία εξελίσσεται στο βαθμό που αναπτύσσονται και οι δύο πλευρές της.*** (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 1997).

Μια πρώτη παρατήρηση που προκύπτει από την περιγραφή των χαρακτηριστικών των δυσκολιών στα σχολικά μαθηματικά είναι ότι οι μαθητές που εμφανίζουν αυτές τις δυσκολίες δεν αποτελούν μια ιδιαίτερη κατηγορία μαθητών. Πολλά από αυτά τα χαρακτηριστικά των σχολικών δυσκολιών είναι φυσικό να εμφανίζονται και σε μαθητές με μέτρια ή υψηλή επίδοση. Ωστόσο η ένταση και η συχνότητα εμφάνισης αυτών των χαρακτηριστικών φαίνεται, από την περιγραφή που προηγήθηκε, ότι είναι μεγαλύτερη στους μαθητές με πολύ χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά.

Μια άλλη παρατήρηση αφορά στην ιδιαίτερη σημασία που φαίνεται να έχουν οι δυσκολίες και τα εμπόδια στο επίπεδο των γενικών μεθόδων σκέψης και επεξεργασίας. Η διαπίστωση αυτή ενισχύει την ερμηνευτική προσέγγιση των ειδικών μαθησια-

κών δυσκολιών που βασίζεται στο μοντέλο των γνωστικών στρατηγικών. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση η δυσκολία των μαθητών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες να αναπτύξουν γνωστικές και μαθησιακές δεξιότητες συνδέεται κυρίως με τις ανεπάρκειες στις στρατηγικές που διαθέτουν. Θα μπορούσαμε κατά συνέπεια να υποθέσουμε ότι *οι αδυναμίες των μαθητών με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά στο επίπεδο των γενικών μεθόδων σκέψης και επεξεργασίας μπορεί να αποτελούν το πιο σοβαρό εμπόδιο για την απόκτηση της σχολικής μαθηματικής γνώσης.*

Σε ό,τι αφορά τον τρίτο τομέα προβλημάτων, τα συναισθηματικά χαρακτηριστικά και τα χαρακτηριστικά συμπεριφοράς, χρειάζεται να επισημάνουμε την ιδιαίτερα σημαντική σχέση του με την διαδικασία κατασκευής της γνώσης.

*Η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης* θεωρείται αποτέλεσμα της παράλληλης εξέλιξης *δύο διαδικασιών*: των *ψυχολογικών διεργασιών* του μαθητή, ως υποκειμένου που ενεργεί, επεξεργάζεται τις πληροφορίες και οικοδομεί τη μαθηματική γνώση και των διαδικασιών που αφορούν στην *κοινωνική αλληλεπίδραση* του μαθητή με τον εκπαιδευτικό και τους άλλους μαθητές της τάξης, μέσα από την οποία διαμορφώνεται το νόημα που ο κάθε μαθητής δίνει στη διδασκόμενη μαθηματική γνώση. Η συνισταμένη των δύο αυτών διαδικασιών έχει ως αποτέλεσμα τη σχολική γνώση που αποκτά ο μαθητής (Voigt, 1994).

Μέσα στη σχολική τάξη η διδασκόμενη μαθηματική γνώση αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης για τον προσδιορισμό του νοήματός της ανάμεσα στους μαθητές και τον εκπαιδευτικό. Σύμφωνα με τον Voigt (1994) *η διαπραγμάτευση είναι μια διαδικασία αμοιβαίας προσαρμογής που αναδεικνύει τις μεταβολές και τις μετατοπίσεις των νοημάτων, καθώς ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές προσπαθούν να συντονίσουν τις ατομικές τους δραστηριότητες.*

Το νόημα των πραγμάτων ή των καταστάσεων, σύμφωνα με τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης, προσδιορίζεται από το άτομο μέσα από κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και δεν υφίσταται ανεξάρτητα απ' αυτό. Τα άτομα που μοιράζονται την ίδια κατάσταση, αλληλοεπηρεάζονται στον τρόπο με τον οποίο την προσδιορίζουν. Η σύνθετη αυτή αλληλεπίδραση ανάμεσα στο άτομο και τους άλλους ανθρώπους που συμμετέχουν στην ίδια κατάσταση, δημιουργεί το νόημα για το άτομο (Bogdan, 1986).

Τα νοήματα είναι κοινωνικές κατασκευές και λειτουργούν στο επίπεδο της αλληλεπίδρασης. Από τη μια μεριά ο εκπαιδευτικός προβάλλει το πολιτισμικά καθορισμέ-

νο νόημα της γνώσης όπως ο ίδιος το ερμηνεύει. Από την άλλη, ο κάθε μαθητής μέσα από την αλληλεπίδραση διαμορφώνει το προσωπικό νόημα της καινούριας γνώσης, το οποίο βασίζεται στις εμπειρίες του, στις προηγούμενες γνώσεις, στην ικανότητα ανάλυσης και αναγνώρισης πληροφοριών και σχέσεων, στα κίνητρα και τα συναισθήματα της συγκεκριμένης στιγμής (Van Oers, 1996). Ο μαθητής ρυθμίζει τις ενέργειες του ανάλογα τόσο με τις δικές του εκτιμήσεις και υποθέσεις για το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο, όσο και με τις εκτιμήσεις του για τις προσδοκίες του εκπαιδευτικού και των άλλων μαθητών από αυτόν. Η διαπραγμάτευση του νοήματος είναι μια αναγκαία συνθήκη για τη μάθηση από τη στιγμή που οι γνώσεις των μαθητών διαφέρουν από τις γνώσεις που ο εκπαιδευτικός θέλει να αποκτήσουν. Αυτή η διαφορά, η οποία δεν είναι κατ' ανάγκην ανεπάρκεια, χαρακτηρίζει την επικοινωνία μέσα στην τάξη.

Η διαπραγμάτευση του νοήματος δεν αφορά μόνο στις διδασκόμενες μαθηματικές γνώσεις αλλά και στα σχολικά μαθηματικά συνολικά καθώς και στο χαρακτήρα της μαθησιακής διαδικασίας. Στις καθημερινές καταστάσεις μέσα στην τάξη ο δάσκαλος και οι μαθητές διαμορφώνουν τον χαρακτήρα και το περιεχόμενο των μαθηματικών μέσα από τις σταθερές καθημερινές πρακτικές τους, δίχως συνήθως συγκρούσεις και δίχως να έχουν επίγνωση των άδηλων συστατικών αυτού του νοήματος. Έτσι στην αντίληψη των συμμετεχόντων ο χαρακτήρας και το περιεχόμενο των μαθηματικών φαίνεται να είναι γνωστά και δεδομένα εξ αρχής, ενώ στην πραγματικότητα έχουν πολλές ασαφείς και άδηλες πλευρές. Το γεγονός, βέβαια, ότι η διαπραγμάτευση του νοήματος γίνεται συχνά δίχως συγκρούσεις, δεν σημαίνει ότι οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός διαμορφώνουν την ίδια αντίληψη για τα σχολικά μαθηματικά και τη διδασκαλία τους (Voigt, 1994).

Μέσα από αυτή την προσέγγιση μπορεί να γίνει κατανοητό γιατί τα αρνητικά κίνητρα για τη σχολική μάθηση, το χαμηλό επίπεδο αυτοεκτίμησης και αποδοχής από τους συμμαθητές, οι φοβίες και το άγχος, αποτελούν παράγοντες που σε πολλές περιπτώσεις επηρεάζουν σημαντικά την επίδοση των μαθητών και τη σχέση τους με τη μαθησιακή διαδικασία. Κατά συνέπεια ο σχεδιασμός της διδασκαλίας και της παιδαγωγικής δραστηριότητας μέσα στην τάξη δεν είναι δυνατόν να αγνοήσει αυτούς τους παράγοντες αλλά αντίθετα είναι αναγκαίο να σχεδιαστούν και να εφαρμοστούν μέτρα για την άμβλυνσή τους.

## Μαθηματική επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής

Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί μια από τις σημαντικότερες εκδηλώσεις της σκέψης στους διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. *Πρόβλημα θεωρείται μία κατάσταση που εγείρει ανοιχτές ερωτήσεις, προκαλώντας νοητικά κάποιον ο οποίος δεν είναι άμεσα εφοδιασμένος με μεθόδους, διαδικασίες και αλγορίθμους που να επιτρέπουν την απάντηση των ερωτήσεων και την επίλυσή του* (Niss M., 1988). Ειδικότερα σε ό,τι αφορά τα σχολικά μαθηματικά, η μαθηματική επίλυση ενός προβλήματος προσδιορίζει τη διαδικασία επίλυσης για την οποία είναι αναγκαία η χρήση μαθηματικών εννοιών και κριτηρίων. Στο πεδίο της αριθμητικής η πλειονότητα των προβλημάτων που περιέχονται στα σχολικά βιβλία αναφέρεται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Η έκφραση «προβλήματα της καθημερινής ζωής» αντιστοιχεί στην έκφραση «προβλήματα πρακτικής αριθμητικής», η οποία χρησιμοποιείται συνήθως στον ελληνικό εκπαιδευτικό χώρο.

Η μαθηματική επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής δεν αποτελεί ιδιαίτερο τομέα του Αναλυτικού Προγράμματος των σχολικών μαθηματικών. Αντίθετα αποτελεί συστατικό κάθε θεματικής του ενότητας. Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών η επίλυση προβλημάτων αποτελεί ένα από τα αποτελεσματικότερα διδακτικά μέσα για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και αλγορίθμων. Αυτή η διδακτική προσέγγιση μπορεί να διασφαλίσει καλύτερα τη σύνδεση των διδασκόμενων μαθηματικών γνώσεων με τις εμπειρικές γνώσεις και στρατηγικές των μαθητών και να υποστηρίξει τους μαθητές ώστε να κινητοποιήσουν στο μέγιστο δυνατό βαθμό το μαθησιακό τους δυναμικό.

Η μαθηματική επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής δεν αποτελεί μόνο μια πρόσφορη διδακτική προσέγγιση. Όλα τα Αναλυτικά Προγράμματα θέτουν επίσης ως ένα από τους βασικούς στόχους την ικανότητα των μαθητών να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τα προβλήματα και τις καταστάσεις που προκύπτουν στην καθημερινή κοινωνική δραστηριότητα (συναλλαγές, μετρήσεις, υπολογισμοί, εκτιμήσεις, προβλέψεις κ.ά.). Η ικανότητα αυτή συνδέεται τόσο με τη χρήση μαθηματικών γνώσεων όσο και με τη χρήση γενικών μεθόδων επεξεργασίας και στρατηγικών. Κατά συνέπεια η βελτίωση της ικανότητας σ' αυτό τον τομέα των μαθητών με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά, μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση των κοινωνικών τους δεξιοτήτων.

Τα περισσότερα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων στο χώρο των μαθηματικών βασίζονται στη θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών. Σύμφωνα μ' αυτήν, η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος συνίσταται σε μια αλληλουχία γνωστικών λειτουργιών που κατευθύνονται προς ένα ορισμένο στόχο και διακρίνεται σε δύο κυρίως φάσεις, στην **αναπαράσταση του προβλήματος** και στην αναζήτηση των **κατάλληλων μέσων για την επίλυσή του**. Κάθε μια απ' αυτές απαιτεί συγκεκριμένα βήματα τα οποία αναφέρονται σε διαφορετικές επιμέρους δραστηριότητες. Στο πρώτο βήμα για την αναπαράσταση του προβλήματος ο μαθητής πρέπει να **μεταφράσει** κάθε πρότασή του σε μια εσωτερική αναπαράσταση. Το επόμενο βήμα είναι η **ολοκλήρωση του σχήματος** με την σύνθετη των επιμέρους στοιχείων του προβλήματος σε μια λογικά συνεπή αναπαράσταση. Η επίλυση του προβλήματος απαιτεί κατ' αρχάς τον **σχεδιασμό της λύσης** με την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Ο μαθητής οδηγείται τέλος στην λύση με τη **χρήση αλγορίθμων** και την **εκτέλεση των αναγκαίων πράξεων** (Mayer, 1992).

Η προσέγγιση αυτή επικεντρώνεται στα βήματα που απαιτούνται για να λυθεί ένα πρόβλημα και δεν συμπεριλαμβάνει την πραγματικότητα του μαθητή που καλείται να εμπλακεί στη διαδικασία επίλυσης. Για το λόγο αυτό κρίνεται αναγκαίος ο διδακτικός μετασχηματισμός αυτού του μοντέλου παίρνοντας υπόψη τις κριτικές επισημάνσεις που έχουν διατυπωθεί για την προσέγγιση αυτή και οι οποίες μπορεί να συνοψιστούν στα εξής σημεία:

α) Η διδασκαλία που βασίζεται στη θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών αγνοεί τον **υποκειμενικό** χαρακτήρα του ίδιου του προβλήματος, όπως προκύπτει από τον προσδιορισμό της έννοιάς του. Επιπλέον το ίδιο πρόβλημα, όταν εμφανίζεται σε διαφορετικές συνθήκες, δεν έχει το ίδιο νόημα για τον μαθητή. Αυτό διαμορφώνει μια άλλη σχέση του μαθητή με το πρόβλημα, διαφορετικά κίνητρα για την εμπλοκή του στη διαδικασία επίλυσης, επηρεάζει τις μεθόδους και στρατηγικές που χρησιμοποιεί (Carragher, Carragher, Schliemann, 1995), καθώς και τη δυνατότητα να ελέγχει τις επιλογές και τις δραστηριότητές του (Lave, 1988). Αντίθετα τα σχολικά προβλήματα στις συνθήκες της μαθησιακής διαδικασίας υφίστανται συνήθως «αντικειμενικά», ανεξάρτητα από τον μαθητή ή από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται και έχουν ειδικές προκαθορισμένες λύσεις (Roth, 1995). Μ' αυτόν τον τρόπο υποβαθμίζεται η σημασία της επεξεργασίας του προσωπικού νοήματος που διαμορφώνει ο κάθε μαθητής για το πρόβλημα.

β) Τα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων στο πλαίσιο της θεωρίας της επεξεργασίας των πληροφοριών επικεντρώνονται συνήθως σε μεμονωμένες ικανότητες και τακτικές και αγνοούν άλλες όψεις της διαδικασίας επίλυσης, που σχετίζονται με τις επιλογές και τις αποφάσεις που απαιτούνται σ' αυτή τη διαδικασία. Η διδασκαλία προσανατολίζεται περισσότερο στην παροχή γνώσεων σχετικά με τους τύπους προβλημάτων που περιλαμβάνονται στα Αναλυτικά Προγράμματα εκπαίδευσης και λιγότερο σε *γενικές διαδικασίες*, σε *μεθόδους χειρισμού* των εμποδίων και δυσκολιών του προβλήματος (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 1997). Η συνθήκη αυτή, με δεδομένη τη μεγάλη ποικιλία καταστάσεων και προβλημάτων που συναντά ο μαθητής μέσα στην μαθησιακή διαδικασία αλλά και έξω απ' αυτήν, μειώνει τη δυνατότητα του μαθητή να μεταφέρει τη γνώση που απέκτησε σε καινούργιους τομείς δραστηριοτήτων.

Στον διδακτικό σχεδιασμό των βημάτων της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων είναι χρήσιμο επίσης να αξιοποιηθούν οι ερευνητικές διαπιστώσεις, σύμφωνα με τις οποίες η επεξεργασία των στοιχείων και της αρχικής αναπαράστασης του προβλήματος καθώς και η επεξεργασία για την αναγνώριση των σχέσεων του προβλήματος αποτελούν βασικούς παράγοντες για την επιτυχή έκβαση της διαδικασίας επίλυσης (Μπάρμπας, Τζουριάδου, 1999).

Με βάση τις παραπάνω επισημάνσεις και διαπιστώσεις τα βήματα που προτείνονται για τη διαδικασία μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, είναι τα ακόλουθα (Μπάρμπας, 2000):

- α) ***Οι μαθητές καλούνται και υποστηρίζονται να επεξεργαστούν και να αναγνωρίσουν τα στοιχεία του προβλήματος.*** Μέσα από αυτή τη διαδικασία ενεργοποιείται ένα σχήμα, με το οποίο συνδέονται τα στοιχεία που έχουν αναγνωριστεί. Η σύνθεση των στοιχείων που έχουν αναγνωρίσει οι μαθητές οδηγεί στη δημιουργία της αρχικής αναπαράστασης του προβλήματος.
- β) ***Οι μαθητές καλούνται και καθοδηγούνται να ελέγξουν τα στοιχεία που έχουν αναγνωρίσει και το σχήμα που έχει ενεργοποιηθεί.*** Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές διορθώνουν και μετασχηματίζουν την αρχική αναπαράσταση και εντοπίζουν ορισμένες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων.
- γ) ***Οι μαθητές καλούνται και υποστηρίζονται να επεξεργαστούν την αναπαράσταση του προβλήματος, να αναγνωρίσουν σχέσεις, να επιλέξουν τις σχέσεις που θεωρούν αναγκαίες και να επεξεργαστούν τη λογική τους ακολουθία, ώ-***

στε να μπορούν να οδηγηθούν στην επίλυση του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στην ολοκλήρωση της αναπαράστασης του προβλήματος.

- δ) **Οι μαθητές καλούνται και υποστηρίζονται να επιλέξουν τις πράξεις που θεωρούν κατάλληλες και να ελέγξουν το νόημα που διαμορφώνουν γι' αυτές,** ώστε αφενός να αντιστοιχούν στις σχέσεις που έχουν αναγνωριστεί και αφετέρου να έχουν οι μαθητές επίγνωση των χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των αριθμητικών αποτελεσμάτων τους.
- ε) **Οι μαθητές καλούνται και υποστηρίζονται να εφαρμόσουν τους αλγορίθμους των πράξεων και να επαληθεύσουν το τελικό αποτέλεσμα.**

### **Ολιστικός – Αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας του προβλήματος**

Από τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης που παρουσιάστηκαν επισημαίνεται η ιδιαίτερη σημασία που έχουν για την επιτυχή έκβασή της δύο τομείς:

- τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, και
- τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των σχέσεων του προβλήματος

Γενικότερα, ο τρόπος με τον οποίο ένας μαθητής επεξεργάζεται ένα μαθηματικό έργο αποτελεί ένα από τα βασικά συστατικά της συμπεριφοράς του απέναντι σ' αυτό. Η επιλεκτική χρήση διαδικασιών που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των ατόμων σε μια ποικιλία καταστάσεων και πλαισίων ορίζεται από τους ερευνητές των γνωστικών επιστημών ως **γνωστικό ύφος** (Waber, 1989).

Τις τελευταίες δεκαετίες η έρευνα για αποτελεσματικές μεθόδους στη διδασκαλία των μαθηματικών συνδέθηκε και με τη θεωρία του γνωστικού ύφους. Σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές, η ανάγκη για αυτή τη συσχέτιση προέρχεται από δύο βασικούς λόγους. Πρώτον, η παραδοσιακή αντίληψη για τις ικανότητες συνδέεται σχεδόν αποκλειστικά με τις παραμέτρους της αποτελεσματικότητας και της ακρίβειας και υπάρχει ανάγκη να διερευνηθούν νέες παράμετροι που να σχετίζονται με τον τύπο και τον τρόπο διαμόρφωσης της σχολικής επίδοσης. Δεύτερον, οι ερευνητές του γνωστικού ύφους επικεντρώνονται σε μια περιοχή που **συσχετίζει τη γνώση με άλλες πλευρές του ατόμου, μια περιοχή που βρίσκεται μεταξύ της γνώσης και της προσωπικότητας**, κάτι που είχε παλαιότερα αγνοηθεί και από τα δύο αυτά ερευνητικά πεδία (Kogan, 1980).



Το μεγάλο εύρος της περιοχής που καλύπτει η έρευνα του γνωστικού ύφους συνεπάγεται αντίστοιχα μια μεγάλη ποικιλία παραγόντων που το συνθέτουν. Τα διάφορα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας (νευροφυσιολογικά, γνωστικά, συναισθηματικά, κοινωνικο-πολιτισμικά κ.α.) αλληλεπιδρούν, συχνά με σταθερούς και προβλέψιμους τρόπους, και διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο το κάθε άτομο επεξεργάζεται τα έργα (Globerson, 1983). Η πληθώρα των παραγόντων οδήγησε στη διαμόρφωση ποικιλίας διπολικών μοντέλων που το κάθε ένα δίνει έμφαση σε διαφορετικά γνωστικά χαρακτηριστικά, όπως είναι η αντίληψη, η προσοχή, οι τρόποι σκέψης κ.α.

Τα περισσότερα μοντέλα γνωστικού ύφους έχουν μια κοινή διάσταση, την *ολιστική* κατ' αντιδιαστολή προς την *αναλυτική* (holistic vs analytic) (Riding, Rayner, 1999). Η διάσταση αυτή αναφέρεται στο τρόπο επεξεργασίας των πληροφοριών.

*Ο ολιστικός τρόπος επεξεργασίας αναφέρεται στην αντίληψη του έργου ή του αντικείμενου ως όλου, δίχως διάκριση των επιμέρους στοιχείων ή χαρακτηριστικών του* (Kemler-Nelson, 1984). Ειδικότερα σε ό,τι αφορά τον τρόπο επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, ο ολιστικός τρόπος αναφέρεται στον εντοπισμό μερικών μόνο στοιχείων και στην ταξινόμηση των στοιχείων με κριτήριο ορισμένα και όχι όλα τα χαρακτηριστικά τους. Διάφορες εκδοχές ολιστικού τρόπου επεξεργασίας των στοιχείων είναι η γρήγορη και βιαστική ανάγνωση του προβλήματος ο εντοπισμός μερικών μόνο στοιχείων, η επικέντρωση στα αριθμητικά μόνο δεδομένα, η αυθαίρετη προσθήκη ή η τροποποίηση στοιχείων, η ταξινόμηση των στοιχείων με κριτήριο ένα μόνο χαρακτηριστικό και η επικέντρωση στα εννοιολογικά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές με αποτέλεσμα να «χάνουν» άλλα στοιχεία και κυρίως το ζητούμενο. Η βιαστική ανάγνωση του προβλήματος συνδέεται επίσης με τα κίνητρα των μαθητών τη δεδομένη στιγμή. Σε ορισμένες περιπτώσεις τα κίνητρα μπορεί να εκφράζονται λεκτικά (π.χ. «αν τελειώσω το πρόβλημα θα μ' αφήσεις να πάω να παίξω μπάλα;») είτε μη λεκτικά, με την παθητική συμμετοχή στη συλλογική επεξεργασία κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Ο ολιστικός τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των σχέσεων του προβλήματος αναφέρεται στον εντοπισμό ορισμένων μόνο σχέσεων. Ο μαθητής δεν επιδιώκει την αναγνώριση του συνόλου των σχέσεων και της λογικής τους ακολουθίας. Σύνηθες χαρακτηριστικό των μαθητών είναι να μην έχουν επίγνωση της διαδικασίας αναγνώρισης των σχέσεων. Από τον τρόπο που επεξεργάζονται τα προβλήματα, φαίνεται ότι θεωρούν πως ένα πρόβλημα επιλύεται σε δύο φάσεις: η πρώτη είναι η κατανόηση του προβλήματος μέσα από την κατανόηση των στοιχείων του και η δεύτερη, η επιλογή

και η εκτέλεση των κατάλληλων πράξεων. Τα ερωτήματα των μαθητών περιστρέφονται συνήθως γύρω από αυτά τα δύο θέματα («τι σημαίνει αυτό που λει το πρόβλημα», «τι εννοεί μ' αυτό», «ποια πράξη θα κάνω», «είναι σωστή αυτή η πράξη ή να κάνω άλλη» κτλ). Το γεγονός ότι οι μαθητές δεν επιδιώκουν να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι δεν αναγνωρίζουν σχέσεις. Μέσα από τη διαδικασία αναγνώρισης των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των στοιχείων, της ταξινόμησης και της διάκρισής τους ή μέσα από τη χρήση εμπειρικών μεθόδων και στρατηγικών, εντοπίζονται σχέσεις που είναι συνήθως γνωστές και οικείες. Δεν φαίνεται όμως οι μαθητές να έχουν επίγνωση της αναγνώρισης αυτών των σχέσεων, επειδή δεν είναι συνήθως σε θέση να αναφερθούν με κάποιον τρόπο σ' αυτές ή να εξηγήσουν την επεξεργασία που τους οδηγεί εμπειρικά στον υπολογισμό του ζητούμενου.

*Ο αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας αναφέρεται στην παρατήρηση των λεπτομερειών και στην τελική σύνθεσή τους για τη συγκρότηση μιας συνολικής αναπαράστασης του έργου ή του αντικειμένου* (Kemler-Nelson, 1984). Ειδικότερα ο αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας των στοιχείων ενός προβλήματος αναφέρεται στον ένα προς ένα εντοπισμό και επεξεργασία όλων των στοιχείων και στην σύνθεσή τους στην συνολική αναπαράσταση του προβλήματος, δίχως αυτό να σημαίνει κατ' ανάγκη ότι ο μαθητής αναγνωρίζει όλα τα χαρακτηριστικά κάθε στοιχείου ή ότι διαμορφώνει πάντοτε τη σωστή ερμηνεία τους. Αντίστοιχα ο αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των σχέσεων του προβλήματος αναφέρεται στην μια προς μια επεξεργασία των σχέσεων, των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους και της λογικής τους ακολουθίας, έτσι ώστε να συσχετιστούν τα δεδομένα με το ζητούμενο του προβλήματος.

Οι δύο πόλοι της αναλυτικής - ολιστικής διάστασης δεν έχουν διχοτομικό χαρακτήρα αλλά θεωρείται ότι αντιπροσωπεύουν τα δύο άκρα ενός συνεχούς. Το κάθε άκρο εκφράζει αμιγώς τα χαρακτηριστικά του αντίστοιχου πόλου. Σε ελάχιστες όμως περιπτώσεις ένα άτομο μπορεί να τοποθετηθεί στον ένα ή στον άλλο πόλο της ολιστικής-αναλυτικής διάστασης. Τα περισσότερα άτομα τοποθετούνται ανάμεσα στους δύο πόλους και εμφανίζουν αναλυτικά και ολιστικά χαρακτηριστικά σε διαφορετικές διαβαθμίσεις (Morgan, 1997). Επίσης το ίδιο άτομο, ανάλογα με τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος, μπορεί να λειτουργεί με αναλυτικό τρόπο σε ορισμένες περιπτώσεις και με ολιστικό σε άλλες. Ισχύει δηλαδή ότι συγκεκριμένοι τύποι γνωστικού ύφους είναι κατάλληλοι για τα διάφορα είδη έργων και προβλημάτων που αντιμετωπίζει ο μαθητής. Έτσι, όπως προκύπτει από τα εμπειρικά δεδομένα, ορισμένοι

τύποι γνωστικού ύφους συνδέονται περισσότερο με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και την υψηλή σχολική επίδοση σε συγκεκριμένους τομείς.

Τα περισσότερα σχολικά μαθήματα απαιτούν από τους μαθητές να χρησιμοποιούν αναλυτικές διαδικασίες. Οι Riding και Read (1996) διαπίστωσαν ότι η φύση των σχολικών μαθημάτων επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ολοκληρώνουν ένα έργο. Στο σχολικό πλαίσιο, όταν το περιεχόμενο του μαθήματος γίνεται πιο επιτηδευμένο, απαιτείται συνδυασμός αναλυτικού τρόπου σκέψης και επάρκειας γνώσεων. Αυτό συναντάται περισσότερο σε μαθήματα όπως φυσική, χημεία, μαθηματικά, γλώσσα. Οι μαθητές που υπολείπονται στις αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας αποδίδουν λιγότερο στα μαθήματα αυτά, ιδιαίτερα στις ανώτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Σε αντίστοιχα συμπεράσματα κατέληξαν πολλές έρευνες για τη σχέση των ολιστικών ή αναλυτικών μεθόδων με την επίδοση μαθητών διαφόρων ηλικιών στα μαθηματικά, τόσο συνολικά όσο και σε επιμέρους τομείς τους (επίλυση προβλημάτων, υπολογισμοί, έννοιες, γεωμετρία) (Mroska, Black, Hardy, 1987).

Η σχέση που εντοπίζεται ανάμεσα στον ολιστικό ή αναλυτικό τρόπο επεξεργασίας των έργων και στην επίδοση στα μαθηματικά καθιστά αναγκαίο τον συνυπολογισμό αυτής της διάστασης στον τρόπο διδασκαλίας. Τα ερευνητικά δεδομένα για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί η βασική αυτή μεταβλητή του γνωστικού ύφους σε εκπαιδευτικά πλαίσια είναι ακόμα ανεπαρκή. Ωστόσο η εμπειρική έρευνα υποδεικνύει ότι όλα τα παιδιά, ανεξάρτητα από χαρακτηριστικά γνωστικού ύφους και προσωπικότητας, μπορεί να εκπαιδευτούν στη χρήση αναλυτικών μεθόδων για την επεξεργασία των σχολικών έργων. Αυτός ο προσανατολισμός της διδασκαλίας δεν στοχεύει στην αλλαγή του γνωστικού ύφους του μαθητή. Επιδίωξη είναι όλοι οι μαθητές να μπορούν να χειρίζονται αποτελεσματικά αναλυτικές και ολιστικές διαδικασίες ανάλογα με τις απαιτήσεις των καταστάσεων που αντιμετωπίζουν (Saracho, 1997).

### **Νόημα και τρόπος επιλογής των πράξεων**

Ένας άλλος παράγοντας που φαίνεται ότι επηρεάζει σημαντικά την επεξεργασία του προβλήματος είναι το νόημα που διαμορφώνουν οι μαθητές για τις πράξεις που επιλέγουν. Στο θέμα αυτό παρατηρούμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις συμπεριφορών (Μπάρμπας, 2000): *σαφές νόημα* και *μη σαφές νόημα* για τον μαθητή.

*Στην πρώτη περίπτωση οι επιλεγόμενες πράξεις αντιστοιχούν στην ερμηνεία των στοιχείων και των σχέσεων που αναγνώρισε ο μαθητής και τα αποτελέσματά*

*τους έχουν σαφή χαρακτηριστικά και ιδιότητες ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής χρησιμοποιεί μηχανιστικά τα σύμβολα, τους κανόνες και τους αλγορίθμους και τα αποτελέσματα των πράξεων δεν έχουν σαφή χαρακτηριστικά ή ιδιότητες μεγέθους.*

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές επιλέγουν τις πράξεις, συνδέεται όχι μόνο με τις γνώσεις τους σχετικά με τις έννοιες και τους αλγορίθμους των πράξεων αλλά και με τον τρόπο επεξεργασίας των σχέσεων και των στοιχείων του προβλήματος καθώς και με το είδος του ενεργοποιούμενου σχήματος. Εντοπίζονται δύο εκδοχές πράξεων που δεν έχουν σαφές νόημα για τους μαθητές:

*α) Τυχαία επιλογή πράξεων*

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές δεν έχουν αναγνωρίσει καμία σχέση μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος, δεν διατυπώνουν μια ερμηνεία που να υποδηλώνει την ενεργοποίηση κάποιου σχήματος ούτε διαφαίνεται η επίδραση κάποιου αλγορίθμου στην επεξεργασία. Οι μαθητές δοκιμάζουν διάφορους συνδυασμούς των αριθμητικών δεδομένων με τυχαίο τρόπο, ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες τους, «ψάχνοντας να δουν αν βγαίνει κάτι». Η επεξεργασία αυτή δεν φαίνεται να είναι η πιο συχνή στις περιπτώσεις επίλυσης προβλήματος. Χαρακτηριστικό αυτής της επεξεργασίας είναι ότι προτιμώνται κυρίως οι πιο απλές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και όχι ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση.

Οι πράξεις, στην περίπτωση της τυχαίας δοκιμής, δεν έχουν κανένα νόημα για τους μαθητές και τα αποτελέσματά τους είναι αριθμοί δίχως χαρακτηριστικά ή ιδιότητες ποσότητας ή μεγέθους. Η τυχαία δοκιμή πράξεων ως αποτέλεσμα της αδυναμίας στην αναγνώριση και επεξεργασία των σχέσεων, στην ένταξη του προβλήματος σε κάποιο σχήμα και στην ενεργοποίηση ενός αλγορίθμου, μπορεί να εκφράζει την αδυναμία εμπλοκής του μαθητή στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

*β) Η επιλογή των πράξεων επηρεάζεται από ένα γενικό και ασαφή αλγόριθμο*

Η επεξεργασία στην περίπτωση αυτή φαίνεται ότι επηρεάζεται από ένα ασαφή και γενικό αλγόριθμο, ο οποίος ενεργοποιείται μέσα από τον εντοπισμό μερικών χαρακτηριστικών των στοιχείων και των σχέσεων. Τα χαρακτηριστικά των αριθμητικών δεδομένων που χρησιμοποιούνται στις πράξεις αυτές, ταιριάζουν συνήθως με τον αλ-

γόριθμο που ενεργοποιείται. Η επεξεργασία αυτή παρατηρείται σε ένα σημαντικό ποσοστό περιπτώσεων. Οι πράξεις στην περίπτωση αυτής της επεξεργασίας αντιστοιχούν στους γενικούς αλγορίθμους που ενεργοποιούνται αλλά το νόημα τους για το μαθητή παραμένει ασαφές, αντανακλώντας την ασάφεια στην αναγνώριση των στοιχείων και των σχέσεων, καθώς και την ασάφεια του ενεργοποιούμενου αλγορίθμου. Τα αποτελέσματα αυτών των πράξεων είναι αριθμοί με ασαφή χαρακτηριστικά και ιδιότητες. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα μη σαφούς νοήματος στην επιλογή των πράξεων:

<i>Σε μια καφετέρια μια παρέα πλήρωσε για ένα καφέ και δύο τυρόπιτες 420 δραχμές, ενώ μια άλλη παρέα πλήρωσε για έναν ίδιο καφέ και πέντε τυρόπιτες 795 δραχμές. Πόσο κοστίζει ο καφές και πόσο η κάθε τυρόπιτα;</i>	
Επιλογή πράξεων	Επεξηγήσεις μαθητή
<b>Μαθητής Α</b>	
420 : 1 = .....	Πόσο κοστίζει ο καφές
420 : 2 = .....	Πόσο κοστίζει η τυρόπιτα
795 : 1 = .....	Πόσο κοστίζει ο καφές
795 : 5 = .....	Πόσο κοστίζει η τυρόπιτα
<b>Μαθητής Β</b>	
420 : 3 = .....	Πόσο κοστίζει το ένα

Η ασάφεια στην αναγνώριση των στοιχείων, των σχέσεων καθώς και η ασάφεια του ενεργοποιούμενου αλγορίθμου αντανακλάται στην ασάφεια της διευκρίνησης των αποτελεσμάτων των πράξεων. Χαρακτηριστική απάντηση των μαθητών στην ερώτηση «τι είναι αυτό που βρήκες;», είναι η έκφραση «πόσο κάνει», η οποία συνήθως υποδηλώνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγορίθμου της συγκεκριμένης πράξης και δεν προσδιορίζει τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες αυτού του αποτελέσματος.

Στις περιπτώσεις αυτής της επεξεργασίας η αρχική αναπαράσταση χαρακτηρίζεται συνήθως από ολιστική προσέγγιση στην αναγνώριση των χαρακτηριστικών των στοιχείων ή των σχέσεων ή και των δύο.

- *Επιλογή πράξεων δίχως λογικό - μαθηματικό νόημα*

Βασικό χαρακτηριστικό των πράξεων, στις οποίες αναφερθήκαμε προηγουμένως, είναι ότι δεν έχουν νόημα ή έχουν ασαφές νόημα για τους μαθητές. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την έλλειψη λογικού - μαθηματικού νοήματος. Σε άλλες περιπτώσεις οι πράξεις αυτές στερούνται λογικού - μαθηματικού νοήματος και σε άλλες όχι. Για παράδειγμα ή πράξη  $105+140$  (δραχμές και λίτρα) στερείται λογικού - μαθηματικού νοήματος, ενώ η πράξη  $105+240$  (άθροισμα τιμών μονάδας δύο ειδών πετρελαίου) δεν στερείται. Και οι δύο όμως μπορεί να ανήκουν στις περιπτώσεις των πράξεων που δεν έχουν σαφές νόημα για τους μαθητές. Αυτός ο τρόπος επιλογής των πράξεων φαίνεται να εκφράζει κατ' αρχάς την ασάφεια των χαρακτηριστικών των στοιχείων, των σχέσεων και των ενεργοποιούμενων αλγορίθμων. Επιπλέον σε ορισμένες περιπτώσεις φαίνεται να εκφράζει την ανεπάρκεια στις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες.

Πράξεις δίχως λογικό - μαθηματικό νόημα εντοπίζονται και σε περιπτώσεις όπου οι επιλεγόμενες πράξεις έχουν σαφές νόημα για τους μαθητές (για παράδειγμα ο υπολογισμός εμβαδού από πρόσθεση ή αφαίρεση μηκών). Σ' αυτή την περίπτωση οι πράξεις αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες σχέσεις που έχουν αναγνωριστεί και γι' αυτό έχουν νόημα για τους μαθητές. Αυτό φαίνεται τόσο από την σαφήνεια του συλλογισμού των μαθητών, όσο και από την απόδοση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών ή ιδιοτήτων στα αποτελέσματα των πράξεων. Φαίνεται δηλαδή ότι, ενώ δεν υπάρχει ασάφεια στην αναγνώριση των στοιχείων και των σχέσεων, η λανθασμένη επιλογή πράξεων καθορίζεται από την ανεπάρκεια στις μαθηματικές έννοιες.

### ***Τύποι επεξεργασίας προβλημάτων***

Με την ανάλυση που προηγήθηκε, καταγράφηκαν τα χαρακτηριστικά των μεθόδων και των γνώσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν επιλύουν προβλήματα, στους τρεις βασικούς τομείς: στην αναγνώριση των στοιχείων, στην αναγνώριση των σχέσεων και στον τρόπο επιλογής των πράξεων. Η ανάλυση αυτή ανέδειξε κυρίως τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μεθόδων που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε κάθε ένα από αυτούς τους τομείς. Ανέδειξε όμως και τη σχέση των μεθόδων ανάμεσα στους τρεις αυτούς τομείς. Η συσχέτιση των μεθόδων που χρησιμοποιούν οι μαθητές στους τρεις αυτούς τομείς δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε διάφορους τύπους επεξεργασίας των προβλημάτων. Συνοψίζοντας λοιπόν, τα στοιχεία αυτής της ανάλυσης, μπο-

ρούμε να περιγράψουμε τους διάφορους τύπους ως ακολούθως (Μπάρμπας, 2000):

α) Ολιστικός τρόπος επεξεργασίας του προβλήματος

Στις περιπτώσεις αυτού του τύπου ο μαθητής αναγνωρίζει ορισμένα στοιχεία του προβλήματος και εντοπίζει μερικά μόνο χαρακτηριστικά τους. Αδυνατεί να κατανοήσει σχέσεις ή αναγνωρίζει μερικές, δίχως να επιδιώκει την αναγνώριση του συνόλου των σχέσεων. Μέσα από αυτή τη διαδικασία ενεργοποιείται ένα «ασθενές» περιγραφικό σχήμα ή ένας γενικός και ασαφής αλγόριθμος. Η ασάφεια των χαρακτηριστικών των στοιχείων, των σχέσεων και του ενεργοποιούμενου σχήματος επηρεάζει το νόημα που διαμορφώνει ο μαθητής για τις πράξεις που επιλέγει. Οι πράξεις και τα αποτελέσματα τους δεν έχουν νόημα ή δεν έχουν σαφές νόημα για τον μαθητή.

β) Σχεδόν ολιστικός τρόπος επεξεργασίας του προβλήματος

Σ' αυτό το επίπεδο μπορεί να καταταχθούν δύο τύποι επεξεργασίας του προβλήματος.

β<sub>1</sub>) Στις περιπτώσεις αυτές ο μαθητής επικεντρώνεται σε ορισμένα στοιχεία του προβλήματος και εντοπίζει όλα τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις που συνδέονται μ' αυτά. Δεν επιδιώκει την αναγνώριση του συνόλου των στοιχείων και των σχέσεων. Η αναγνώριση μερικών στοιχείων και σχέσεων ενεργοποιεί επιμέρους αλγορίθμους, οι οποίοι όμως δεν είναι επαρκείς για την επίλυση του προβλήματος. Οι πράξεις που επιλέγονται αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά των στοιχείων και των σχέσεων που έχουν αναγνωριστεί καθώς και στους επιμέρους αλγορίθμους, γι' αυτό και έχουν σαφές νόημα για το μαθητή.

β<sub>2</sub>) Στις περιπτώσεις αυτές ο μαθητής επιδιώκει με αναλυτικές μεθόδους την αναγνώριση όλων των στοιχείων του προβλήματος. Εντοπίζει ορισμένα μόνο χαρακτηριστικά των στοιχείων, μερικές σχέσεις και ενεργοποιείται ένα «ασθενές» σχήμα ή ένας γενικός και ασαφής αλγόριθμος. Ο μαθητής δεν επιδιώκει την αποσαφήνιση των χαρακτηριστικών των στοιχείων και την αναγνώριση του συνόλου των σχέσεων. Η ασάφεια των χαρακτηριστικών των στοιχείων, των σχέσεων και του ενεργοποιούμενου σχήματος επηρεάζει το νόημα που διαμορφώνει ο μαθητής για τις πράξεις που επιλέγει. Οι πράξεις και τα αποτελέσματα τους δεν έχουν σαφές νόημα για το μαθητή.

γ) Σχεδόν αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας του προβλήματος

Στις περιπτώσεις αυτές ο μαθητής επιδιώκει με αναλυτικές μεθόδους την αναγνώριση όλων των στοιχείων του προβλήματος. Εντοπίζει και ταξινομεί όλα τα χαρακτη-

ριστικά τους δίχως όμως να αναγνωρίζει όλες τις σχέσεις. Η αναγνώριση μερικών σχέσεων ενεργοποιεί επιμέρους αλγορίθμους, οι οποίοι όμως δεν είναι επαρκείς για την επίλυση του προβλήματος. Οι πράξεις που επιλέγονται αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά των στοιχείων και των σχέσεων που έχουν αναγνωριστεί καθώς και στους επιμέρους αλγορίθμους, γι' αυτό και έχουν σαφές νόημα για τον μαθητή.

#### δ) Αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας του προβλήματος

Στις περιπτώσεις αυτές ο μαθητής επιδιώκει με αναλυτικές μεθόδους την αναγνώριση όλων των στοιχείων του προβλήματος. Εντοπίζει και ταξινομεί όλα τα χαρακτηριστικά τους και αναγνωρίζει μερικές σχέσεις. Ενεργοποιείται ένα κατάλληλο σχήμα ή αλγόριθμος που γίνεται αντικείμενο επιπλέον επεξεργασίας καθώς ο μαθητής επιδιώκει την αναγνώριση του συνόλου των σχέσεων. Οι πράξεις που επιλέγονται αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά των στοιχείων και των σχέσεων που έχουν αναγνωριστεί καθώς και στους ενεργοποιούμενους αλγορίθμους, γι' αυτό και έχουν σαφές νόημα για τον μαθητή.

### **Σχεδιασμός της διδασκαλίας των μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων**

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας των μεθόδων για την επίλυση ενός προβλήματος βασίζεται στο σχεδιασμό των βημάτων της διαδικασίας επίλυσης που αναλύθηκε προηγουμένως. Σύμφωνα με την ανάλυση που εκτέθηκε διαμορφώθηκαν πέντε βήματα, τα οποία αφορούσαν την επεξεργασία των στοιχείων του προβλήματος: ο έλεγχος της αρχικής αναπαράστασης, η επεξεργασία των σχέσεων, ο έλεγχος του νοήματος των επιλεγόμενων πράξεων, η εφαρμογή των αλγορίθμων και ο έλεγχος του τελικού αποτελέσματος. Κατ' αντιστοιχία προς τα βήματα αυτά, η διδασκαλία των μεθόδων για την επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να περιλαμβάνει τα εξής:

α) Διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος

β) Διδασκαλία μεθόδων ελέγχου και αυτοδιόρθωσης της αρχικής αναπαράστασης

γ) Διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων για την αναγνώριση του συνόλου των λογικο-μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος

δ) Διδασκαλία μεθόδων ελέγχου του νοήματος των πράξεων που επιλέγουν οι μαθητές

ε) Διδασκαλία των αλγορίθμων, των πράξεων και των κανόνων (όπου χρειά-



ζεται) καθώς και διδασκαλία μεθόδων για την επαλήθευση του τελικού αποτελέσματος.

Ο σχεδιασμός των διδακτικών τακτικών έχει ως στόχο να διασφαλίσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των μεθόδων που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζονται άμεσες και έμμεσες διδακτικές τακτικές. Ο σχεδιασμός τους, μπορεί να βασιστεί στις θεωρητικές επεξεργασίες για τις μεθόδους διδασκαλίας στρατηγικών που εφαρμόζονται σε εναλλακτικά προγράμματα παιδαγωγικής παρέμβασης, όπως αυτές αναλύονται στη συνέχεια.

Η έννοια της στρατηγικής αναφέρεται στην προσέγγιση ενός έργου από ένα άτομο, στον τρόπο δηλαδή με τον οποίο κάποιος σκέφτεται και δρα όταν προγραμματίζει, εκτελεί και αξιολογεί την επίδοση του σ' ένα έργο και στα αποτελέσματά του (Lenz, 1992). Οι αναλυτικές μέθοδοι επεξεργασίας των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος, ο έλεγχος των επεξεργασιών και του νοήματος που διαμορφώνει ο μαθητής για τις πράξεις που επιλέγει, είναι δυνατόν να θεωρηθούν συστατικά της στρατηγικής που ακολουθεί στη διαδικασία επίλυσης, καθώς αυτά αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει το πρόβλημα και στις κριτικές κατευθύνσεις που σχετίζονται με τις επιλογές του.

Η διδασκαλία στρατηγικών μπορεί να σχεδιαστεί με άμεσες ή έμμεσες διδακτικές τακτικές. Η έμμεση τακτική επικεντρώνεται στην ενθάρρυνση του μαθητή να χρησιμοποιεί στρατηγικές που διαθέτει ή ανακαλύπτει στην πορεία επίλυσης του προβλήματος. Ο εκπαιδευτικός κατευθύνει τον μαθητή μέσα από υποδείξεις, ερωτήσεις, διορθώσεις και τον ενισχύει να αναλάβει σταδιακά περισσότερες ευθύνες για την αποτελεσματική και επαρκή ολοκλήρωση της προσπάθειάς του. Στην άμεση διδακτική τακτική ο εκπαιδευτικός καθορίζει τη στρατηγική που θεωρεί πιο αποτελεσματική για το συγκεκριμένο πρόβλημα, διδάσκει τις απαραίτητες δεξιότητες που προαπαιτούνται, παρουσιάζει τη στρατηγική στους μαθητές και τους καθοδηγεί στην εφαρμογή και στην αξιολόγησή της.

Οι άμεσες διδακτικές τακτικές έχουν το πλεονέκτημα της διευκόλυνσης του μαθητή στην κατανόηση της διδασκόμενης στρατηγικής και της γενίκευσης της εφαρμογής της. Οι έμμεσες διδακτικές τακτικές έχουν το πλεονέκτημα της ενεργοποίησης του μαθητή και της ουσιαστικής εμπλοκής του στη μαθησιακή διαδικασία. Ταυτόχρονα όμως προϋποθέτουν ένα ικανοποιητικό επίπεδο γνώσεων και δεξιοτήτων για να μπορεί ο μαθητής να αυτενεργεί. Στις περιπτώσεις των μαθητών με σχολικές δυσκολίες η

αποκλειστική χρήση έμμεσων διδακτικών τακτικών μπορεί να οδηγήσει σε χρονοβόρες, κουραστικές και γι' αυτό αναποτελεσματικές διαδικασίες. Για το λόγο αυτό, ως αποτελεσματικότερη μέθοδος μπορεί να επιλεγεί ο κατάλληλος συνδυασμός άμεσων και έμμεσων διδακτικών τακτικών.

Με βάση τις παραπάνω θεωρητικές επεξεργασίες τα βασικά χαρακτηριστικά των διδακτικών τακτικών μπορεί να είναι τα εξής:

- *Διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων καθώς και διδασκαλία μεθόδων ελέγχου και αυτοδιόρθωσης της αρχικής αναπαράστασης.*

Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει και αναλύει τη μέθοδο σχετικά με τον αναλυτικό εντοπισμό όλων των στοιχείων, και των χαρακτηριστικών τους (προσεκτική ανάγνωση του προβλήματος, επιλογή των αναγκαίων πληροφοριών, κατασκευή σχεδίου - όπου αυτό είναι εφικτό - ή καταγραφή των δεδομένων, ώστε να μπορούν οι μαθητές να αναπαράγουν το πρόβλημα μόνο από το σχέδιο ή τα στοιχεία της καταγραφής, σύγκριση του σχεδίου ή της καταγραφής με το κείμενο του προβλήματος).

Συζήτηση μέσα στην ομάδα για το νόημα του προβλήματος. Μέσα από τις διαφορές στην παρουσίαση του προβλήματος, τις εκατέρωθεν εξηγήσεις και τα επιχειρήματα του καθενός, οι μαθητές οδηγούνται στον έλεγχο και την αυτοδιόρθωση της ερμηνείας των στοιχείων και της αναπαράστασης του προβλήματος.

- *Διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας για την αναγνώριση των σχέσεων*

Ο εκπαιδευτικός υποδεικνύει στους μαθητές να συγκρίνουν τα στοιχεία, να βρουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των χαρακτηριστικών τους, να βάλουν σε μια σειρά τις σχέσεις που εντοπίζουν με κριτήριο την εύρεση της λύσης του προβλήματος.

Συζήτηση μέσα στην ομάδα για τα κοινά και τα διαφορετικά σημεία στις σχέσεις που έχει εντοπίσει ο κάθε μαθητής. Μέσα από τις εξηγήσεις και τα επιχειρήματα που προβάλλουν οι μαθητές, οδηγούνται στον έλεγχο και στην αυτοδιόρθωση της ερμηνείας των στοιχείων καθώς και στην κατανόηση των σχέσεων.

Εφόσον η κατανόηση του συνόλου των σχέσεων δεν είναι εφικτή με άμεσο τρόπο, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν μια εμπειρική μέθοδο ή στρατηγική (προσεγγιστικό υπολογισμό, «δοκιμή και αποτυχία», αναλογία) για να επιλύσουν το πρόβλημα. Μέσα από τη σύγκριση των διαφορετικών απαντήσεων οι

μαθητές οδηγούνται στον έλεγχο των σχέσεων που αναγνώρισαν και στην κατανόηση των πραγματικών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων.

· *Διδασκαλία μεθόδων ελέγχου του νοήματος των επιλεγόμενων πράξεων και των αποτελεσμάτων τους*

Ο εκπαιδευτικός υποδεικνύει στους μαθητές, όταν επιλέγουν μια πράξη, να είναι σε θέση να απαντούν με σαφήνεια στα ερωτήματα: γιατί επιλέγουν αυτή την πράξη, ποια είναι τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες του αριθμού που προκύπτει ως αποτέλεσμα, αν έχει λογικό νόημα αυτή η πράξη με τους αριθμούς που επιλέχτηκαν.

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να παρουσιάσουν και να εξηγήσουν τις ενέργειες που έκαναν για να λύσουν το πρόβλημα, να σχολιάσουν ο ένας τα αποτελέσματα του άλλου, να κρίνουν αν θεωρούν λογικά και αναμενόμενα τα αποτελέσματα και να αιτιολογήσουν την άποψή τους. Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές αναστοχάζονται την επεξεργασία που πραγματοποίησαν, ελέγχουν το νόημα των πράξεων, επαληθεύουν τα αποτελέσματα και οδηγούνται στην αυτοδιόρθωση.

## **Συμπέρασμα**

Η μελέτη που προηγήθηκε για τα εμπόδια που εμφανίζουν οι μαθητές με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά όταν επιλύουν προβλήματα, επικεντρώθηκε σε ορισμένα βήματα αυτής της διαδικασίας και δεν συμπεριέλαβε ό,τι είχε σχέση με την εκτέλεση των πράξεων. Η έρευνα από το χώρο της διδακτικής στον τομέα αυτό είναι πολύ πλούσια. Επιπλέον οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για τις αδυναμίες των μαθητών αυτών στις μαθηματικές γνώσεις φαίνεται να είναι ιδιαίτερα επαρκής, ώστε μια ακόμα επισήμανσή τους να έχει τη βαρύτητα της κατάδειξης του αυτονόητου. Αντίθετα, αυτό που θεωρούμε ότι έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η διαπίστωση ότι σημαντικό τμήμα των επεξεργασιών για την μαθηματική επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής συνδέονται με τη χρήση μεθόδων (αναλυτικών – ολιστικών) που δεν αφορούν μόνο τα μαθηματικά και έχουν γενικότερο χαρακτήρα. Επίσης σημαντικό στοιχείο αυτής της ανάλυσης πρέπει να θεωρείται η ανάδειξη της σημασίας των ιδιαίτερων προσωπικών νοημάτων που διαμορφώνουν οι μαθητές τόσο για το συγκεκριμένο σχολικό έργο, όσο και γενικότερα για τη μαθησιακή διαδικασία και τα σχολικά μαθηματικά. Κατά συνέπεια θεωρούμε ότι ενισχύεται η άποψη, σύμφωνα με την οποία η επιτυχής και αποτελεσματική έκβαση μιας σχολικής δραστηριότητας όπως είναι η μαθηματική ε-

πίλυση προβλήματος προϋποθέτει τη συνέργια παραγόντων τριών κατηγοριών: επαρκής προϋπάρχουσα γνώση, αποτελεσματικές γενικές μέθοδοι επεξεργασίας και σύγκλιση των νοημάτων που διαμορφώνουν οι μαθητές με τα αντίστοιχα του δασκάλου. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κειμένου, οι μαθητές με σχολικές δυσκολίες στα μαθηματικά υστερούν και στους τρεις αυτούς τομείς. Κατά συνέπεια μια παιδαγωγική παρέμβαση για να έχει ελπίδες αποτελεσματικότητας χρειάζεται να περιέχει και του τρεις τομείς που εντοπίστηκαν.

## **Βιβλιογραφία**

- Bogdan, R., 1986, The sociology of Special Education, In Morris, R., Blatt, B., (eds), *Special Education, Research and Trends*, Pergamon Press, New York
- Carraher, T. N., Carraher, D.W., Schliemann A.D., (1995), Mathematics in the streets and in schools, στο *Η ψυχολογία των μαθηματικών*, επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, Gutenberg, Αθήνα
- Globerson, T., 1983, Mental capacity, mental effort and cognitive style, *Developmental Review*, 3, 272 – 302.
- Kemler-Nelson, D.G., 1984, The effect of intention on what concepts are acquired, *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 23, 734-759
- Kogan, N., 1980, A cognitive – style approach to metaphoric thinking, in Snow R.E., Federico P.A., Montague W.E., (ed) *Aptitude, learning and instruction: Cognitive process analyses*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.
- Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α., 1997, *Ψυχολογία της Σκέψης*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα
- Lave, J., 1988, *Cognition in practice: Mind, Mathematics and Culture in every day life*, Cambridge University Press, Cambridge
- Lenz, B.K., 1992, In the Spirit of Strategies Instruction: Cognitive and Metacognitive Aspects of the Strategies Intervention Model, In S. Vogel (Ed.) *Educational Alternatives for Students with Learning Disabilities*, Springer Verlag, New York
- Mayer, R.E., 1992, *Thinking, Problem Solving, Cognition*, W.H. Freeman and Company, New York
- Morgan, H., 1997, *Cognitive styles and classroom learning*, Praeger Publishers, Westport, USA.
- Μπάρμπας, Γ., 2000, *Σχολική υποεπίδοση στα Μαθηματικά και ενισχυτική διδασκαλία*,

Διδακτορική Διατριβή, Ιωάννινα

- Μπάρμπας, Γ., Τζουριάδου, Μ., (1999), Ένα πρόγραμμα ενισχυτικής παρέμβασης για εφήβους με σχολικές δυσκολίες. Παρέμβαση στο Μαθηματικό συλλογισμό, στα Πρακτικά του Η' Διεθνούς Επιστημονικού Συνεδρίου *Σχολική Αποτυχία και κοινωνικός αποκλεισμός, Αιτίες, συνέπειες και αντιμετώπιση*, Παιδαγωγική Εταιρεία Ελλάδος-Σχολή Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα
- Mroska, H., Blak, W.L., Hardy, C.A., 1987 Cognitive learning style and achievement in mathematics, *Journal of Instructional Psychology*, 14,26-28.
- Niss, M., 1988, Problem Solving Modeling and Applications in *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, Ann and Keith Hirst, (ed) Malev, Budapest.
- Riding, R., Rayner, S., 1999, *Cognitive styles and learning strategies*, David Fulton Publishers, London
- Riding, R., Read, G., 1996, Cognitive style and pupil learning preferences. *Educational Psychology*, 1, 81-106.
- Roth, W. – M., 1995, *Authentic School Science, Knowing and learning in Open – Inquiry Science Laboratories*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Saracho, O. N., 1997, *Teachers' and Students' Cognitive Styles in Early Childhood Education*, Bergin & Garvey, Greenwood Publishing Group, USA.
- Van Oers, B., 1996, Learning Mathematics as a Meaningful Activity, in L.Steffe, P.Neher, P. Cobb, G. Goldin, B.Greer, (eds), *Theories of Mathematical Learning*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
- Voigt, J., 1994, Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics, in P. Cobb, *Learning Mathematics, constructivist and interactionist theories of mathematical development*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands
- Waber, D.P., 1989, The Biological Boundaries of Cognitive Styles: A Neuropsychological Analysis, in Globerson T., Zelniker T., (ed) *Cognitive Style and Cognitive Development*, Ablex Publishing Corporation, New Jersey.