Χρησιμοποιώντας τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ

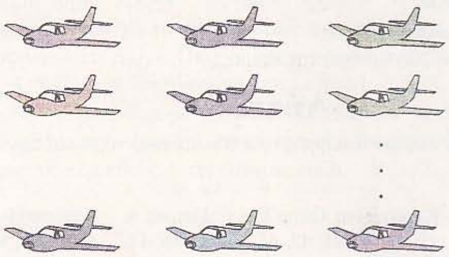
Στέργιος Τουρναβίτης

Όσο περισσότερο καταπιανόμαστε με τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ το περισσότερο ανακαλύπτουμε ότι αυτοί οι αριθμοί σχετίζονται με άλλες απλούστερες έννοιες όπως τη διαιρετότητα και τη μέτρηση. Η μέτρηση όμως αντικειμένων, ποσοτήτων, μεγεθών συνδέεται με τη σειρά της με τις πρακτικές δραστηριότητες του ανθρώπου και την προσπάθειά του να βρίσκει στα μεγέθη του, πολ/σια ενός μικρότερου μήκους, εμβαδού, όγκου κ.λπ. που εκ των προτέρων έχει ορίσει σαν μονάδα μέτρησης.

ΜΚΔ – διαιρετότητα και μέτρηση

Όπως φανερώνει και το ίδιο το όνομά του, ΜΚΔ είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσοτέρων αριθμών. Τι είναι όμως διαιρέτες ενός αριθμού;

21 αεροπλανάκια στο τραπέζι ή ... στη πίστα ενός αεροδρομίου, σε τριάδες



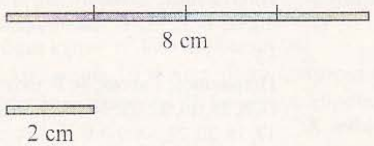
1η τριάδα

2η τριάδα

7η τριάδα

Παίρνουμε γι' αυτό ένα τυχαίο γινόμενο από μονοψήφιους αριθμούς π.χ. $3 \times 7 = 21$. Οι 3, 7 είναι διαιρέτες του 21, χωρίζουν δηλαδή τον 21 σε 7 και 3ίσα μέρη αντίστοιχα, ή μπορούν να μετρήσουν τον 21. Αν ο 21 παριστάνει τα αεροπλανάκια που υπάρχουν στο τραπέζι ενός παιδικού σταθμού, χωρίζουμε τον 21 σε 7 τριάδες και δεν περισσεύει τίποτε. Μπορούμε επίσης να μοιράσουμε τον 21 σε 3 επτάδες και πάλι να μην περισσέψει αεροπλανάκι. Αυτές όμως οι μικρότερες ομάδες των 3 ή 7 αεροπλάνων, είναι ικανές να μετρήσουν τον 21, αφού μπορεί να μοιραστούν σε 7 ή 3 παιδιά αντίστοιχα, χωρίς να παραπονεθεί κανένα από αυτά και στις δύο περιπτώσεις, ότι κάποιο άλλο παιδί πήρε περισσότερα από το ίδιο.

Η ιδιότητα των διαιρετών σαν μονάδα μέτρησης των αριθμών που διαιρούν, αναδεικνύεται και από το παρακάτω γεωμετρικό παράδειγμα του διαιρέτη 2, του 8.



Σχήμα 1

Το ευθύγραμμο τμήμα 2 cm, αποτελεί μονάδα μέτρησης για το τμήμα 8 cm, αφού χωράει 4 φορές σ' αυτό.

Οι αριθμοί 8, 21 που διαλέξαμε παραπάνω, έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός του εαυτού τους και της μονάδας και τους λέμε **σύνθετους**. Άλλοι σύνθετοι, είναι οι: 4, 6, 10, 12,14,15,... ενώ οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... δεν μπορούν να μετρηθούν από άλλους, πέραν της μονάδας και του εαυτού τους λέγονται **πρώτοι**. Τα παραπάνω δεν ισχύουν για τους δύο πρώτους φυσικούς, τον 0 και 1. Ο μεν 0 διαιρείται από όλους τους φυσικούς εκτός του εαυτού του. Ο δε 1 παρ' όλο που διαιρεί όλους τους φυσικούς, διαιρείται μόνο από τον εαυτό και δεν θεωρείται ούτε πρώτος, ούτε σύνθετος.

Οι διαιρέτες, άρα και οι κοινοί διαιρέτες (που είναι πιο λίγοι) δύο ή περισσοτέρων αριθμών είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αφού είναι μικρότεροι ή ίσοι από αυτούς. **Τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες, ονομάζουμε Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη.** Αν είναι γνωστές οι αναλύσεις δοσμένων αριθμών σε πρώτους παράγοντες, τότε ο ΜΚΔ προκύπτει ως το γινόμενο των πρώτων παραγόντων, που εμφανίζονται ταυτόχρονα σε όλες τις αναλύσεις και τον καθένα από τους κοινούς αυτούς πρώτους παράγοντες παίρνουμε με τον ελάχιστο αριθμό φορών που συναντάται στις αναλύσεις.

Παράδειγμα: Βρείτε τον ΜΚΔ(24, 54).

24	2	54	2
12	2	27	3
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

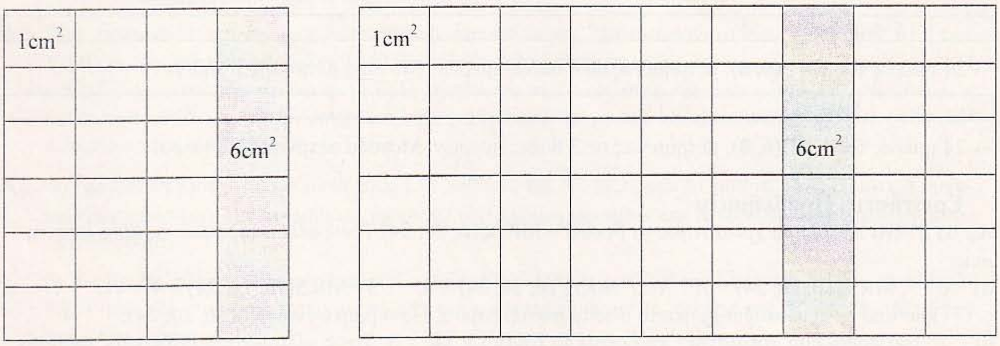
$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad$ $54 = 2 \cdot 3^3$

Για το μέγιστο κοινό διαιρέτη, παίρνουμε το γινόμενο $2 \cdot 3 = 6$. Οι πρώτοι αριθμοί 2, 3 εμφανίζονται στις αναλύσεις των 24 ,54 (είναι κοινοί πρώτοι παράγοντες) και ο μικρότερος αριθμός φορών που τους συναντάμε ή η μικρότερη δύναμη που εμφανίζονται είναι για μεν τον 2 στην ανάλυση του 54 0 1, για δε τον 3 στην ανάλυση του 24 πάλι ο 1.

Στο σχήμα 2 που ακολουθεί έχουμε σχεδιάσει δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις 4 x 6 και 9 x 6 αντίστοιχα, για να δούμε ξανά τι εκφράζει ο ΜΚΔ(24, 54) = 6 του προηγούμενου παραδείγματος, όταν οι αριθμοί 24 cm^2, 54 cm^2 αντιστοιχούν στα εμβαδά δύο ορθογωνίων.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα, ένα ορθογώνιο στήλη πλάτους 1 cm και ύψους 6 cm, αποτελούμενο από 6 τετραγωνάκια εμβαδού 1 cm^2, μπορεί να αποτελέσει τη μεγαλύτερη κοινή μονάδα μέτρησης των δύο ορθογωνίων. Το μεν πρώτο ορθογώνιο αποτελείται από 4 τέτοια ορθογώνια στήλες, το δε δεύτερο από 9. Το εμβαδό του κάθε ορθογώνιου στήλη είναι:

$6 \times 1\ cm^2 = 6\ cm^2$, όσο ο ΜΚΔ(24,54).



ΕΚΠ – διαιρετότητα και μέτρηση

Ενώ λοιπόν ο ΜΚΔ είναι η μεγαλύτερη κοινή μονάδα μέτρησης δύο ή περισσοτέρων αριθμών **το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, όπως φανερώνει και το όνομά του, είναι το μικρότερο κοινό πολ/σιο ή όπως εικάζουμε ο μικρότερος που μπορεί να μετρήσουν δύο ή περισσότεροι αριθμοί.**

Ας δούμε ένα παράδειγμα από την καθημερινή μας ζωή.

Δύο διανομείς αναχωρούν από τη κεντρική αποθήκη της εταιρείας με καθορισμένα δρομολόγια στο εξωτερικό. Ο πρώτος επιστρέφει μετά από 6 ημέρες και ο δεύτερος μετά από 8 ημέρες. Μετά από πόσες τουλάχιστον ημέρες θα ξαναφύγουν μαζί;

Λύση: Οι επιστροφές του πρώτου διανομέα από το 1^o, 2^o, 3^o, ... δρομολόγιο και οι ταυτόχρονες αναχωρήσεις του για το επόμενο, γίνονται μετά από $1 \cdot 6$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 6$,...ημέρες αντίστοιχα.

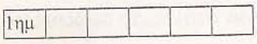
Ανάλογα για τον 2^o διανομέα έχουμε για τις ημέρες της επιστροφής του ότι γίνονται σε διάστημα $1 \cdot 8$, $2 \cdot 8$, $3 \cdot 8$,... ημέρες από τότε που έφυγαν μαζί. Καταλαβαίνουμε δηλ. ότι πρέπει να βρούμε έναν αριθμό ημερών που να βρίσκεται στα πολ/σια του 6 και στα πολ/σια του 8. Μόνο σε τέτοιους αριθμούς που είναι κοινά πολ/σια των 6, 8 θα γίνονται οι συναντήσεις των δύο διανομέων και οι ταυτόχρονες αναχωρήσεις για τα επόμενα δρομολόγια. Το γινόμενο $6{\cdot}8 = 48$, είναι ένα κοινό πολ/σιο των (6, 8). Ένα δεύτερο ΚΠ(6,8) = $2{\cdot}48$, κ.ο.κ. Υπάρχουν επομένως κάποια κοινά πολ/σιατων 6,8,άρα θα υπάρχει και το μικρότερο από τα κοινά πολ/σια, το ΕΚΠ. Για να βρούμε το ΕΚΠ(6, 8), αναλύουμε τους 6, 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μέθοδο που ακολουθήσαμε και στο ΜΚΔ. Έτσι έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

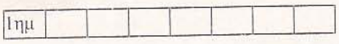
$$6 = 2{\cdot}3 \qquad 8 = 2^3$$

Μόνο που εδώ **τους παίρνουμε όλους τους πρώτους παράγοντες τους κοινούς και μη κοινούς και τους μη κοινούς και καθένα από αυτούς τον παίρνουμε στο γινόμενο για το ΕΚΠ, με το μεγαλύτερο αριθμό φορών που εμφανίζεται στις αναλύσεις των δοσμένων αριθμών. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι το ΕΚΠ διαιρείται ακριβώς με τον καθένα αριθμό και είναι ελάχιστο.**

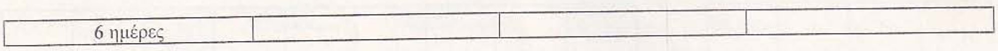
Σύμφωνα με αυτά, έχουμε για το ΕΚΠ(6,8) = $2^3{\cdot}3$. Στο σχήμα 3, κάθε ημέρα παριστάνουμε με 1 κουτάκι.



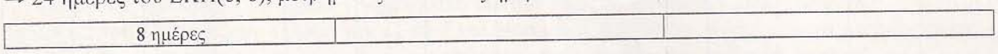
→ 6 ημέρες του 1ου διανομέα



→ 8 ημέρες του 2ου διανομέα



→ 24 ημέρες του ΕΚΠ(6, 8), μετρημένες σε 4 6άδες ημερών. Μονάδα μέτρησης 1 6ήμερο.



→ 24 ημέρες του ΕΚΠ(6, 8), μετρημένες σε 3 8άδες ημερών. Μονάδα μέτρησης 1 8ήμερο.

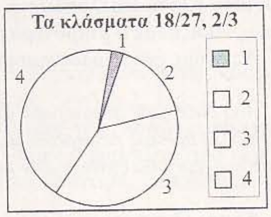
Ερωτήσεις, Προβλήματα

A_4. α) Σ' ένα πρόβλημα χρειάστηκε να βρεθεί ο ΜΚΔ(16, 20, 24).Τρεις φίλοι, έγραψαν τις εξής απαντήσεις:

α) ο 1ος, ΜΚΔ(16, 20, 24) = 2, ο 2ος ΜΚΔ(16, 20, 24) = 8, ο 3ος ΜΚΔ(16, 20, 24) = 4.
Ποιο από τα τρία παιδιά βρήκε το σωστό αποτέλεσμαα; Ποιο βρήκε έναν ΚΔ(16, 20, 24);

β) Σ' ένα πρόβλημα χρειάστηκε να βρεθεί το ΕΚΠ(15, 18, 27). Τρεις φίλοι έγραψαν τις εξής απαντήσεις:
ο 1ος ΕΚΠ(15, 18, 27) = 90, ο 2ος ΕΚΠ(15, 18, 27) = 270, ο 3ος = 810. Ποιο από τα τρία παιδιά βρήκε το σωστό αποτέλεσμα; Ποιο παιδί βρήκε ένα ΚΠ(15, 18, 27);

A_5. Τα μέρη του κύκλου 1,2 παριστάνουν τις κλασματικές μονάδες 1/27 και 1/3, στις οποίες έχει χωριστεί. Το μέρος 3 του κύκλου, είναι το διπλάσιο του 2, ενώ το 4 είναι 18 φορές του μέρους 1. Χρησιμοποιώντας τον ΜΚΔ(18,27), απλοποιείστε το κλάσμα 18/27, για να καταλήξετε ότι τα μέρη του κύκλου 4,3 παριστάνουν τους ίδιους κλασματικούς αριθμούς, όπως άλλωστε φαίνεται και από το μέγεθος των ίσων κομματιών 3,4 του σχήματος.



A_6. Σκεφτήκατε ποτέ άραγε γιατί όταν έχουμε να προσθέσουμε, αφαιρέσουμε συγκρίνουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα, αν μεν είναι ομώνυμα έχουν δηλ. τους ίδιους παρονομαστές προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές ή συγκρίνουμε μόνο τους αριθμητές και βάζουμε παρονομαστή τον ίδιο ενώ αν αυτά είναι ετερώνυμα τα τρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα βρίσκοντας το ΕΚΠ των παρονομαστών και κατόπιν τα προσθέτουμε, αφαιρούμε ή συγκρίνουμε όπως προηγούμενα; Γιατί π.χ. δεν μπορούμε να εκτελέσουμε την πρόσθεση $\frac{4}{9}+\frac{2}{15}$, την αφαίρεση $\frac{7}{4}-\frac{1}{2}$ ή να κάνουμε τις σύγκριση των $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ αν δεν βρούμε πρώτα το ΕΚΠ των παρονομαστών; Αφού απαντήσατε στην ερώτηση, εκτελέστε τις παραπάνω πράξεις, τόσο με τα παραπάνω κλάσματα αλλά και με δικά σας.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τι εκφράζει ένα κλάσμα, π.χ. ο πρώτος προσθετέος της πρόσθεσης $\frac{4}{9}+\frac{2}{15}$ και τι ο δεύτερος προσθετέος. 4 φορές την κλασματική μονάδα 1/9 είναι το κλάσμα $\frac{4}{9}$ και 2 φορές την 1/15 είναι $\frac{2}{15}$.

A_7. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει ένας ανθοπώλης, αν διαθέτει 180 γαρύφαλλα, 120 τριαντάφυλλα και 100 γλαδιόλες;

Υπόδειξη: Η κάθε ανθοδέσμη περιέχει ίσο αριθμό λουλουδιών από κάθε είδος. Αν υποθέσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ανθοπώλης μας έχει φτιάξει x ανθοδέσμες, τότε διαιρώντας τους 180, 120, 100 με το x, βρίσκουμε τα γαρύφαλλα, τριαντάφυλλα, γλαδιόλες, της κάθε ανθοδέσμης αντίστοιχα. Οι παραπάνω διαιρέσεις δεν αφήνουν υπόλοιπα είναι τέλειες, αφού θέλουμε τα πηλίκα αυτών των διαιρέσεων να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό από τα τρία διαφορετικά είδη λουλουδιών.
Ενδιαφερόμαστε δηλ. να βρούμε έναν ΚΔ(180, 120, 100) και μάλιστα μέγιστο, όπως υποδεικνύει η λέξη «το πολύ» του προβλήματος.

A_8. Σε μια κατασκήνωση συμμετέχουν 126 αγόρια και 147 κορίτσια. Μπορείτε να βοηθήσετε τον αρχηγό της κατασκήνωσης να χωρίσει τα παιδιά σε ομάδες ίσης δυναμικότητας από τα δύο φύλα, ώστε αυτές να συναγωνιστούν σε διάφορες αθλητικές και πνευματικές δραστηριότητες; Σε πόσες το πολύ τέτοιες ομάδες μπορεί να χωριστούν τα παιδιά;

A_9. Ένα εργοστάσιο παραγωγής αυτοκινήτων κατασκεύασε 714 αυτοκίνητα των 1000 cm^3, 612 των 1200 cm^3 και αυτοκίνητα των x 1400 cm^3 όπου x είναι ένας φυσικός που περιέχεται μεταξύ των 289 και 323. Αν είναι γνωστό ότι αυτά κατανεμήθηκαν στο μεγαλύτερο δυνατό αριθμό 17 χωρών και η κάθε χώρα πήρε ίσα αυτοκίνητα από κάθε κατηγορία, να βρεθεί πόσα αυτοκινήτων των 1400 cm^3 κατασκευάστηκαν από το εργοστάσιο.

A_{10}. α) Να τοποθετήσετε σε τμήματα τους 135 μαθητές της Α΄ τάξης και 81 μαθητές της Β΄ ενός Γυμνασίου, αν γνωρίζετε ότι τα τμήματα έχουν το ίδιο πλήθος μαθητών και το πλήθος αυτό είναι το μεγαλύτερο δυνατό.

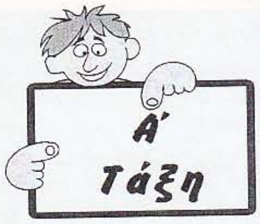
β) Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο και Λύκειο μαζί με την υπόθεση ότι δεν είναι λιγότεροι από 325 και περισσότεροι από 485 και αν διαιρεθούν με το πλήθος της Α΄ και Β΄ τάξης δεν περισσέψει κανένας.

γ) Υπολογίστε το ΜΚΔ(135, 81), ΕΚΠ(135, 81), αφού αναλύσετε τους 135, 81 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. Κατόπιν κάντε το ίδιο και για το ΜΚΔ, ΕΚΠ που βρήκατε. Μπορείτε τώρα να εξηγήσετε γιατί ισχύει η ισότητα ΜΚΔ(135, 81) · ΕΚΠ(135, 81) = 135·81;

A_{11}. Εξηγήστε από το 7γ) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε γιατί το περιεχόμενο ενός ποτηριού 216 cm^3, μπορεί να «μετακομίσει» διαδοχικά σε δύο άλλα, της ίδιας με το αρχικό χωρητικότητας χρησιμοποιώντας πρώτα εξ' ολοκλήρου ένα κύβο πλευράς 2cm και κατόπιν ένα δεύτερο κύβο πλευράς 3 cm για να μεταφέρουμε το περιεχόμενο από το 2^o στο 3^o.

Βιβλιογραφία

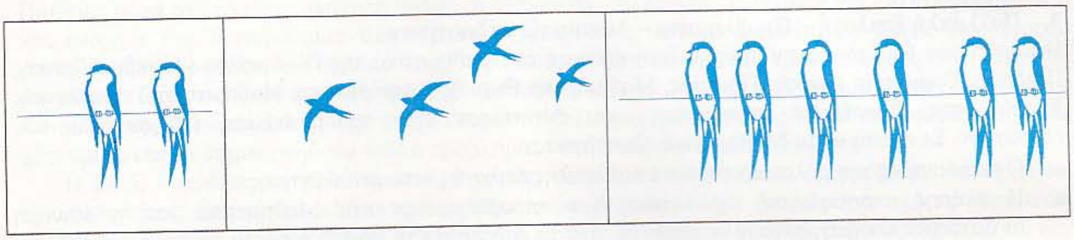
1. Μαθηματικά Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού Εκδόσεις ΣΤ΄ 1989, Ζ 1990, Θ 1993, Ι 1994
2. Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου Έκδοση Η 1994
3. Μ.Σ.Ε. στις λέξεις για το ΜΚΔ και ΕΚΠ Εκδοτική Εταιρεία Ακάδημος, Αθήνα
4. Θεωρία Αριθμών Δημήτριος Πουλάκης, Εκδόσεις Ζήτη Θεσ/νίκη 1997
5. Η Αριθμητική των ακεραίων Β. Πολυδούρης Εκδόσεις Δωδώνη Αθήνα – Ιωάννινα 1991
6. Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου Γιάννης Κ. Μαραγούσιας Εκδόσεις Σαβάλλα Αθήνα.



Προβλήματα και ... προβλήματα!!!

Στέργιος Τουρναβίτης

Α$_1$. Αν σας ζητήσει κάποιος, να πείτε μια ιστορία για την παρακάτω εικόνα, τι θα του αφηγηθείτε; Η αντίστοιχη **αριθμητική ισότητα** είναι η $2 + 4 = 6$.



Α$_2$. Ας παραλείψουμε το μεσαίο κομμάτι της εικόνας. Τώρα δεν γνωρίζουμε πόσα χελιδόνια έρχονται να καθίσουν στο τηλεγραφικό σύρμα. Πως διαμορφώνεται τώρα η ιστοριούλα μας;
Η **εξίσωση** που εκφράζει τις 3 μικρές εικόνες όταν το μεσαίο κομμάτι απουσιάζει, είναι η

$$2 + x = 6$$

Α$_3$(α). Με αφετηρία την εξίσωση $22 - x = 17$, ας "φτιάξουμε" ένα προβληματάκι που να λύνεται με τη βοήθεια της:

Η μαμά του Γιάννη έφτιαξε ένα πρωινό, γλυκό βερίκοκο και έβαλε 22 κομμάτια σ' ένα βάζο. Το απόγευμα της ίδιας μέρας κέρασε τη παρέα του γιου της από το γλυκό αυτό. Μόλις έφυγαν τα παιδιά, ο Γιάννης μέτρησε τα κομμάτια στο βάζο και τα βρήκε 17. Πόσα κομμάτια έφαγαν τα παιδιά;

(β) Αν σας δοθεί μια άλλη εξίσωση π.χ. η $x - 7 = 3$
Μπορείτε να φτιάξετε και εσεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με τη βοήθεια της;
Ποια είναι η λύση για το προβληματάκι που μόλις φτιάξατε;
Τοποθετήστε στη θέση του x, τον αριθμό που βρήκατε, για να δείτε αν την επαληθεύει.

(γ) Φτιάξτε επίσης ένα σχέδιο με όποιο θέμα επιθυμείτε, όπως αυτό του προβλήματος Α$_1$, το οποίο να αντιστοιχεί στην παραπάνω εξίσωση.

Α$_4$. Ενας καθηγητής Μαθηματικών "έγραψε" στον υπολογιστή του ένα πρόγραμμα για την εξάσκηση των μαθητών του στις εξισώσεις μ' έναν άγνωστο. Κατά την εκτέλεση του προγράμματος, τα παιδιά έπρεπε να πληκτρολογούν τους κατάλληλους αριθμούς και ο υπολογιστής ανάλογα με την απάντηση, τους επιβράβευε και εμφάνιζε στην οθόνη την επόμενη εξίσωση, ή επέμενε στην ίδια εξίσωση μέχρις ότου να του "δοθεί" η σωστή απάντηση. Εσείς ποιούς αριθμούς θα πληκτρολογούσατε αν είσαστε στη θέση του παιδιού που εκτελούσε αυτό το πρόγραμμα;

1. $x + 89 = 187$, $x=\ldots\ldots$
2. $56 + x = 465$, $x=\ldots\ldots$
3. $x - 64 = 653$, $x=\ldots\ldots$
4. $96 - x = 79$, $x=\ldots\ldots$

A_5. Σε μια σχολική τάξη υπάρχουν 27 παιδιά και τα κορίτσια είναι **διπλάσια** από τα αγόρια. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια βρίσκονται στη τάξη αυτή;

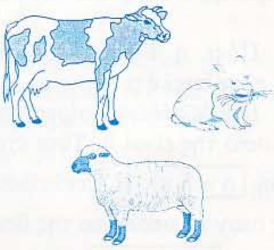
(Απ. 9 αγόρια, 18 κορίτσια)

A_6. Οι εκδρομείς ενός πολιτιστικού συλλόγου, βρίσκονται σε δύο πούλμαν που έχει το καθένα 55 θέσεις, έτοιμοι για αναχώρηση. Στο πρώτο πούλμαν οι μεγάλοι είναι 36 και τα παιδιά 3 **περισσότερα** από το **1/3** των μεγάλων. Στο δεύτερο, οι μεγάλοι καταλαμβάνουν τα **3/5 των θέσεών του** και τα παιδιά είναι **τετραπλάσια του 1/3** των παιδιών του πρώτου λεωφορείου. Λίγο πριν την αναχώρηση, εμφανίζεται στον πρόεδρο του συλλόγου μια τετραμελής οικογένεια, διατεθειμένη και αυτή να συμμετάσχει στην εκδρομή, με την προϋπόθεση όμως να βρίσκονται όλοι μαζί (ο μπαμπάς, η μαμά και τα δύο παιδιά) **σ' ένα λεωφορείο**. Θα μπορέσουν να ταξιδέψουν και αυτοί; Πόσες τελικά **κενές θέσεις** μένουν και στα δύο λεωφορεία μαζί;

(Ναι, 2 κενές θέσεις στο 2ο λεωφορείο)

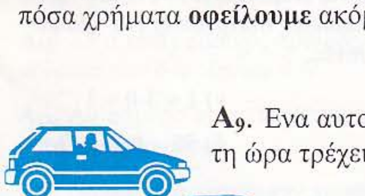
A_7. Ενας χωρικός είχε κότες, κουνέλια, πρόβατα και αγελάδες. Τα ζώα **όλα** ήταν 149. Τα πρόβατα ήταν 7 **περισσότερα** από τις αγελάδες, τα κουνέλια ήταν 4 **λιγότερα** από το **τριπλάσιο** των γαλακτοπαραγωγών ζώων και οι κότες 5 **περισσότερες** από το **μισό** όλων των τετράποδων. Πόσα ζώα από κάθε είδος είχε ο χωρικός;

(Απ. αγελάδες 9, πρόβατα 16, κουνέλια 71 και κότες 53)



A_8. Από ένα κατάστημα αγοράσαμε μια τηλεόραση και ένα ραδιόφωνο αξίας 288.000 δρχ. Δώσαμε 72.000 προκαταβολή και το **υπόλοιπο** συμφωνήσαμε να το πληρώσουμε σε 12 ισόποσες δόσεις μια δόση κάθε πρώτη του μήνα. Στο τέλος του 5ου μήνα ενώ **έχουμε πληρώσει** 5 δόσεις, πόσα χρήματα **οφείλουμε** ακόμη;

(Απ. 126.000)



A_9. Ενα αυτοκίνητο τρέχει σε μια ευθύγραμμη διαδρομή δύο ωρών. Την πρώτη ώρα τρέχει με 83 km/h και τη δεύτερη ώρα με 103 km/h. Με ποια σταθερή ταχύτητα θα μπορούσε να τρέξει ένα δεύτερο αυτοκίνητο, ώστε να καλύψει στον ίδιο χρόνο, την ίδια διαδρομή;

(Απ. 93 km/h)

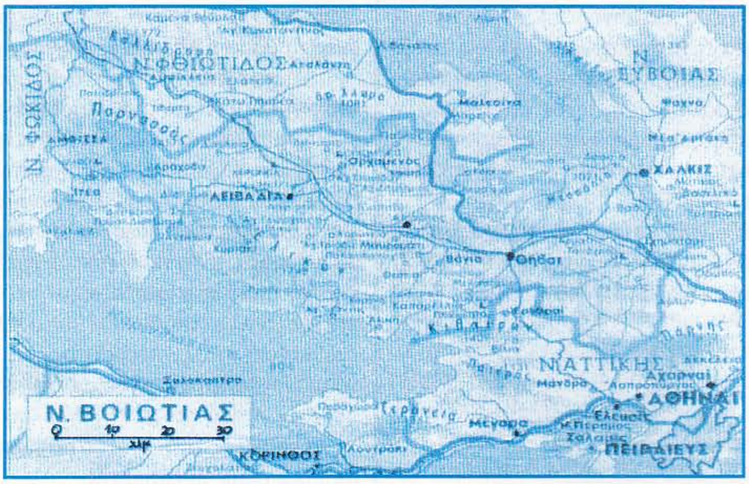
A_{10}. Λέει ο Γιώργος τον Γιάννη:

-Αν σου δώσω 3 **λιγότερες από τις μισές** καραμέλες μου, θα έχεις 14.
Πόσες καραμέλες **λιγότερες** έχει ο Γιάννης από τον Γιώργο;

(Απ: 20)

Ανάλογα ποσά και αριθμητικές κλίμακες

Στ. Τουρναβίτης



Χρησιμοποιώντας τον χάρτη του νομού Βοιωτίας, με την κλίμακα που φαίνεται στο υπόμνημα, κάτω αριστερά, προτείνουμε:

Δραστηριότητες:

Α. Μετρήστε τις αποστάσεις Θήβας-Λιβαδειάς και Θήβας-Αλιάρτου, βρείτε τις ευθύγραμμες χιλιομετρικές αποστάσεις των παραπάνω πόλεων.

Ξεκινάμε από Θήβα με προορισμό τη Λιβαδειά. Όταν βρεθούμε στην Αλίαρτο, κοιτάζουμε το χιλιομετρικό δείκτη του αυτοκινήτου μας και βλέπουμε ότι έχουμε διανύσει 27 χλμ. Που οφείλεται η διαφορά στην οδική απόσταση των δύο πόλεων, με αυτή που βρήκατε προηγουμένως;

Β. Σ' έναν άλλο χάρτη του ίδιου νομού η απόσταση Θήβας-Λιβαδειάς είναι ~ 9 cm. Πόση είναι η κλίμακα του χάρτη αυτού;

Γ. Ένας αρχιτέκτονας σχεδιάζει το μήκος μιας αίθουσας 12 m 150 φορές μικρότερο. Πόσα εκατοστόμετρα θα είναι το μήκος αυτό και ποια η κλίμακα του σχεδίου;

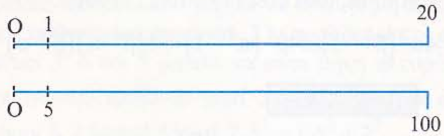
Δ. Όταν ένα σχέδιο αποδίδεται στο φυσικό μέγεθος του αντικειμένου, τι κλίμακα χρησιμοποιείται; Και όταν σχεδιάζεται με εικοσαπλάσια μεγέθυνση ποια είναι η κλίμακα;

Οι Βαθμοί

Ας αλλάξουμε σκηνικό και να μεταφερθούμε προς τα τέλη Ιούνη με αρχές Ιούλη σ' ένα σχολείο όπου τα γραπτά 25 μαθητών της Α΄ Λυκείου, βαθμολογήθηκαν δύο φορές, στην **20-βαθμη** (με άριστα το 20) και στην **100-βαθμη** (με άριστα το 100). Οι βαθμοί γράφτηκαν σε δύο στήλες, αλλά σε μερικά σημεία χύθηκε μελάνι και σβήστηκαν κάποιοι αριθμοί. Μπορείτε να βοηθήσετε τον αρμόδιο καθηγητή να τους ξαναγράψει;

Α/Α	Βαθμοί στην 100-βάθμια	Βαθμοί στην 20-βάθμια
1	89	
2		13,2
3	20	4
4	90	
5	49	9,8
6		16
7	87	17,4
8		19
9	38	

Πριν ασχοληθούμε με τη λύση αυτού του προβλήματος, θα πρέπει να έχουμε ξεκαθαρίσει, που αντιστοιχίζονται μερικοί χαρακτηριστικοί αριθμοί στις δύο κλίμακες. Στα ερωτήματα που ακολουθούν θα μας βοηθήσει, το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα:



Πήραμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα π.χ. μήκους 20 εκ., όπου στο τέλος του πρώτου, τοποθετήσαμε το άριστα 20 της 20-βαθμης κλίμακας και στο τέλος του δεύτερου το άριστα 100 της 100-βαθμης.

Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος, αλλά η μονάδα (ο βαθμός 1) στην 20-βαθμη, θα βρίσκεται σε απόσταση 1 εκ., που βρίσκεται αν διαιρέσουμε το μήκος 20 εκ., σε 20 ίσα μέρη.

Γεννιέται τώρα το ερώτημα: Σε ποιον βαθμό της 100-βαθμης αντιστοιχεί ο 1, της 20-βαθμης;

Σκεφτόμαστε, ότι στα 20 εκ. τοποθετήσαμ το άριστα 100 της 100-βαθμης δηλαδή στη μισή απόσταση στα 10 εκ., τοποθετούμε το μέσον της κλίμακας $\frac{100}{2}=50$

στο 1 εκ. (το $\frac{1}{20}$ της απόστασης) τοποθετούμε τον βαθμό, $\frac{100}{20}=5$ της 100-βαθμης.

Αφού βρήκαμε σε ποιον βαθμό αντιστοιχεί ο 1 της 20-βαθμης, είναι εύκολο να μετατρέψουμε οποιονδήποτε βαθμό αυτής της κλίμακας, στην 100-βαθμη. Ας το διατυπώσουμε πάλι:

Στον x της 20-βαθμης (x φορές 1), αντιστοιχεί ο 5x της 100-βαθμης. Αν τώρα αυτόν τον τελευταίο αριθμό καλέσουμε y, έχουμε την ισότητα: $y=5x$ (1)

$$\text{ή} \quad \frac{y}{x}=5 \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{5}y=\frac{2}{10}y$$

Όταν μας δίνεται ο βαθμός της 20-βαθμης έστω 14 η (1) μας λέει, τον πολλαπλασιάζουμε με 5 και έχουμε τα μόρια της 100-βαθμης. Για να έχουμε όμως περισσότερη ακρίβεια βαθμολογούμε με άριστα το 100 (γιατί;) και **μετατρέπουμε στην 20-βαθμη** βρίσκοντας έναν ακέραιο ή δεκαδικό με το πολύ ένα δεκαδικό ψηφίο (γιατί;). Θέλουμε π.χ. να βρούμε στα 93 μόρια ποιος βαθμός της 20-βαθμης αντιστοιχεί, όπως προκύπτει και από την (2) εκτελούμε την διαίρεση $93:5=18,6$. Αντί γι' αυτό (μην ξεχνάτε ότι εργαζόμαστε στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και οι διαιρέσεις με τον 10 είναι οι ευκολότερες) διπλασιάζουμε τον 93 (που κι αυτό είναι εύκολο να γίνει χωρίς χαρτί και μολύβι ιδίως για διψήφιους αριθμούς) και χωρίζουμε ένα δεκαδικό ψηφίο από τα δεξιά.

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το κλάσμα $\frac{2}{10}$, στη θέση του $\frac{1}{5}$.

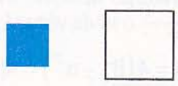
Επίσης με βάση τα παραπάνω, είστε σε θέση να γράψετε τους σβησμένους αριθμούς.

Προβλήματα:

B_{19}. Υπολογίστε χωρίς να χρησιμοποιήσετε χαρτί και μολύβι τα $\frac{2}{5}$ των 160 χιλιάδων δραχμών.

B_{20}. Στις Β΄ και Γ΄ Λυκείου κάθε γραπτό στις εξετάσεις του Ιουνίου, βαθμολογείται από δύο καθηγητές στην 100-βαθμη κλίμακα. Αν η διαφορά των δύο βαθμών δεν είναι μεγαλύτερη των 15 μορίων, βρίσκουμε τον μέσο όρο των δύο καθηγητών και τον αριθμόν αυτόν τον ανάγουμε στην κλίμακα με άριστα το 20, όπως προηγουμένως. Ένας καθηγητής για να βρει τον Μ.Ο. στην 20-βαθμη κλίμακα, **σκέφτηκε να προσθέσει τους δύο βαθμούς των συναδέλφων του και κατόπιν να διαιρέσει με 10**. Τι λέτε, βρήκε αυτό που ήθελε;

B_{21}. Αν ο λόγος των πλευρών των δύο τετραγώνων είναι $\frac{3}{5}$, να εκφράσετε το εμβαδόν του **μαύρου** τετραγώνου σαν ποσοστό του εμβαδού του άσπρου.

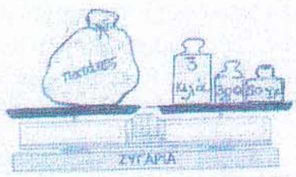


Η ζυγαριά και ... οι εξισώσεις μ' έναν άγνωστο

Στέργιος Τουρναβίτης

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποτελέσει μια εισαγωγή στις εξισώσεις με τη βοήθεια του φυσικού μοντέλου της ζυγαριάς. Τα παιδιά με τη ζυγαριά καταλαβαίνουν την έννοια της ισοδύναμης εξίσωσης, μιας εξίσωσης που έχει την ίδια λύση με μια προηγούμενή της. Οι τρόποι που μας επιτρέπουν να πάμε από μια εξίσωση στην ισοδύναμή της, είναι τρόποι που δεν μεταβάλλουν την ισότητα ανάμεσα στα μέλη της, όπως ακριβώς δεν μεταβάλλεται η ισορροπία της ζυγαριάς.

Η εικόνα της ζυγαριάς, όπως η παρακάτω με τους δύο δίσκους, που μας δείχνει το βάρος από ένα τσουβάλι πατάτες, έχει εκλείψει βέβαια από την σημερινή ζωή μας, υπάρχει όμως ακόμη σε μερικά παλαιοπωλεία ή αίθουσες εργαστηρίων φυσικής, για να μας θυμίζει παλαιότερα χρόνια του απόγειου της δόξας της.



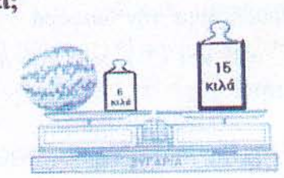
Αν βγάλουμε από το δεξιό δίσκο της εικόνας, το βάρος 300 γραμμάρια, πρέπει να αφαιρέσουμε από τον αριστερό της δίσκο μερικές πατάτες, που το βάρος τους να είναι ίσο με 300 γραμμάρια, ώστε να πετύχουμε ξανά ισορροπία της ζυγαριάς.

Γενικά: **ό,τι προσθέτουμε ή αφαιρούμε στον έναν δίσκο, πρέπει να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε ίση ποσότητα, στον άλλο δίσκο.**

Ας δούμε στη συνέχεια πώς με την βοήθεια της ζυγαριάς, μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού ως προς έναν άγνωστο x. Είναι βέβαια απαραίτητο να επισημάνουμε, ό,τι είναι για τη ζυγαριά η ισορροπία, ο αριστερός και δεξιός δίσκος, είναι για την εξίσωση το ίσον, το αριστερό και δεξιό μέλος αντίστοιχα.

Πρόβλημα 1

Πόσο ζυγίζει το καρπούζι, αν ζυγαριά ισορροπεί;



Λύση:

Αν x τα κιλά του καρπουζιού, τότε:

$$x+6=15 \qquad (1)$$

[κατάσταση ισορροπίας της ζυγαριάς]

Μέχρις εδώ, καταφέραμε το πιο δύσκολο. Να εκφράσουμε τα δεδομένα του προβλήματος, με μια μαθηματική σχέση (με μια ισότητα). Παραμένει το θέμα της τεχνικής, πώς θα επιλύσουμε αυτή την εξίσωση. Ή με όρους της ζυγαριάς, σε ποιο άθροισμα, πρέπει να αναλυθεί ο αριθμός 15, ώστε αφαιρώντας κατόπιν το ίδιο υπάρχον βάρος από τους δύο δίσκους της, να πετύχουμε να έχουμε το καρπούζι μόνο του (**ή γενικά ένα άγνωστο βάρος x**) στον αριστερό δίσκο;

Εύκολα βρίσκουμε ότι $15 = 9 + 6$

Παρατήρηση:

Αν είχαμε μια άλλη εξίσωση με πιο μεγάλους αριθμούς; όπως π.χ. $x + 79 = 156$ για να το βρούμε θα κάναμε αφαίρεση

$$156 - 79 = 77.$$

Άρα θα την γράφαμε

$$x + 79 = 77 + 79$$

και συνεχίζοντας από την (1), έχουμε:

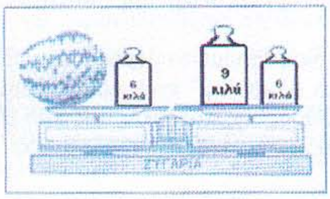
$$x+6=9+6$$

[αναλύουμε το βάρος 15 σε άθροισμα $9+6$]

ή

$$x+6-6=9+6-6$$

[αφαιρούμε το βάρος 6 κιλά και από τους δύο ζυγούς]

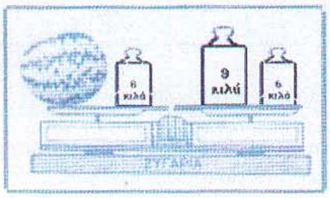


ή

$$x+0=9+0$$

ή

$$x=9 \text{ κιλά}$$



Παρατήρηση:

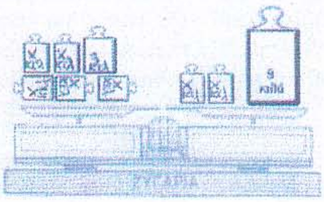
Οι εκφράσεις ισορροπίας των ζυγαριών αυτών θυμίζουν τις ισοδύναμες μεταξύ τους εξισώσεις που χρησιμοποιούμε για να βρούμε τον άγνωστο x. Αρκεί βέβαια, όποιες πράξεις κάνουμε στο 1^{ο} μέλος, να κάνουμε τις ίδιες και στο 2^{ο} μέλος της εξίσωσης.

Ερώτηση:

Καταστρέφεται η ισορροπία μιας ζυγαριάς, εάν και στους δύο δίσκους της, προσθέσουμε, αφαιρέσουμε το ίδιο βάρος, ή αντικαταστήσουμε τα βάρη που υπάρχουν στους δύο δίσκους της, με αυτά που προκύπτουν με τον πολλαπλασιασμό ή την διαίρεση με τον ίδιο αριθμό;

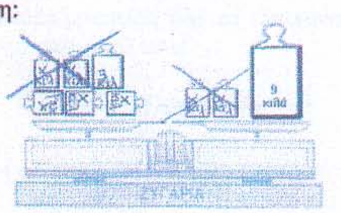
Πρόβλημα 2

Να εκφράσετε με μια εξίσωση την ισορροπία της διπλανής ζυγαριάς. Κατόπιν να σχεδιάσετε κατάλληλες ζυγαριές, που η περιγραφή των ισορροπιών τους, να δίνουν ισοδύναμες μεταξύ τους εξισώσεις, που οδηγούν στη λύση (απομόνωση) του x, σ' ένα μέλος.



Λύση:

Πέντε σταθμά των x κιλών, προστίθενται με το βάρος 3 κιλών και ισορροπούν από την άλλη μεριά, δύο σταθμά του άγνωστου βάρους x και το βάρος 9 κιλά. Άρα οδηγούμαστε στην εξίσωση:

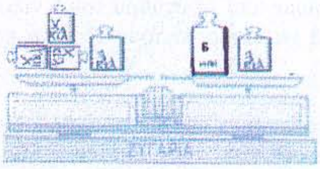


$$5x+3=2x+9$$

ή

$$5x+3-2x=2x+9-2x$$

[αφαιρούμε το 2x από τα μέλη της εξίσωσης]



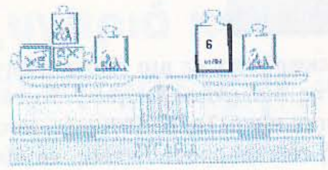
ή

$3x+3=9$ [αναγωγές ομοίων όρων]

ή

$$3x+3=6+3$$

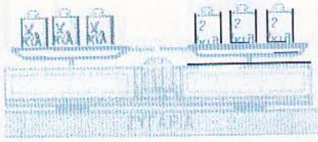
[αναλύουμε τον 9 σε άθροισμα $6+3$]



ή

$$3x+3-3=6+3-3$$

[αφαιρούμε τον 3 από τα δύο μέλη]



ή

$$3x=3\cdot 2$$

ή

$$\frac{3x}{3}=\frac{3\cdot 2}{3}$$

[διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον 3]

ή

$$x=2$$

Προβλήματα

B_8. Από πόσα σταθμά του 1 κιλού πρέπει να αφαιρέσουμε 6 σταθμά, ώστε η διαφορά να ζυγίζει όσο ένα δοχείο λάδι των 18 κιλών;

B_9. Πόσα σταθμά του 1 κιλού πρέπει να αφαιρέσουμε από 24 σταθμά του 1 κιλού, ώστε αυτά να ισορροπήσουν 15 κιλά πορτοκάλια;

B_{10}. Τοποθετούμε 7 όμοια σφαιρίδια (του ίδιου βάρους) στον έναν από τους δύο ζυγούς μιας ζυγαριάς, ενώ στον άλλον βρίσκεται μια μεγαλύτερη σφαίρα βάρους 56 κιλά. Πόσο ζυγίζει το καθένα από τα 7 σφαιρίδια;

Με τα παρακάτω προβλήματα 4 και 5 (που φαινομενικά μοιάζουν να λύνονται με την βοήθεια της ζυγαριάς), σας καλούμε να απομακρυνθείτε από την εικόνα της ζυγαριάς και να χρησιμοποιήσετε **μόνο τις τεχνικές** που μάθατε μέχρι τώρα, για να περάσετε από μια εξίσωση, στην ισοδύναμή της.

B_{11}. Στο $\frac{1}{9}$ μιας σοκολάτας άγνωστου βάρους εκφρασμένου σε γρ. προσθέτουμε το μισό της βάρος και βρίσκουμε όσο ολόκληρη τη σοκολάτα, ελαττωμένη κατά 28 γρ. Πόσο ζυγίζει ολόκληρη η σοκολάτα;

B_{12}. Αν διαιρέσουμε το βάρος μιας κυρίας που είναι 63 κιλά μ' έναν αριθμό, βρίσκουμε το βάρος της κορούλας της που ζυγίζει 9 κιλά. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

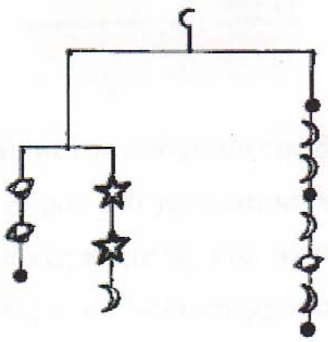
B_{13}. Χρησιμοποιήστε την τεχνική των ισοδυνάμων εξισώσεων, για να βρείτε τις λύσεις (γραμμένες με τη μορφή δυνάμεων του 2) για τις εξισώσεις του παρακάτω πίνακα:

1	2	3	4	5	6
$\frac{4}{x}=28$	$8x-1=0$	$2x-3=-2$	$x+7=3x+3$	$\frac{5x}{8}-\frac{x}{4}=\frac{x}{2}-1$	$36-x=4$
…….	…….	…….	…….	…….	…….

Είναι οι λύσεις αυτές που ισαπέχουν από τα άκρα αντίστροφοι αριθμοί;

Ποιος είναι ο λόγος δυο διαδοχικών λύσεων;

Μαζί με την προηγούμενη εργασία είχα γράψει για δημοσίευση και την παρακάτω άσκηση που θεωρήθηκε από τους συναδέλφους της Σ.Ε. κάπως δύσκολη για το επίπεδο της Γ΄ Γυμνασίου…

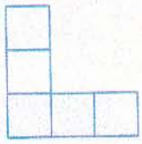


Αν το διπλανό παιχνίδι ισορροπεί και ο «ήλιος» και το «φεγγάρι» ζυγίζουν 2 και 4 γρ. αντίστοιχα, να βρείτε πόσο ζυγίζουν, ο «κρόνος» και το «άστρο».

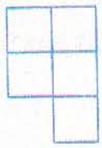
<u>Υπόδειξη</u>: Συμβολίστε με x τα γραμμάρια του «κρόνου» και y του «άστρου». Ολόκληρη τη διάταξη, μπορείτε να την παρομοιάσετε με μια μεγάλη ζυγαριά, της οποίας το αριστερό της σκέλος, είναι μια μικρότερη. Αν λάβετε υπόψιν, ότι οι δύο «ζυγαριές» ισορροπούν, θα καταλήξετε να έχετε ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, το οποίο θα λύσετε με την ευκολότερη μέθοδο, που εσείς θεωρείτε.

Ο συνάδελφος **Τουρναβίτης Στέργιος** προτείνει δύο ακόμα προβλήματα:

ΜΔ$_{12}$. Με 16 μπλε ισομήκη ξυλάκια, σχηματίζουμε 5 τετράγωνα, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να αφαιρέσετε δύο ξυλάκια και να τα προσθέσετε κάπου, ώστε να σχηματιστούν πάλι 5 τετράγωνα αλλά σε άλλη διάταξη.



ΜΔ$_{13}$. Με 15 ξυλάκια αυτή τη φορά, σχηματίζουμε το παρακάτω σχήμα, που αποτελείται από 5 τετράγωνα. Να αφαιρέσετε 3 ξυλάκια, ώστε το σχήμα που θα προκύψει να αποτελείται από 3 τετράγωνα.



Οι συνάδελφοι **Γ. Λυμπερόπουλος – Τ. Μπακάλης** προτείνουν δύο ακόμα προβλήματα:

ΜΔ$_{14}$. Τοποθετούμε τρία ζάρια το ένα πάνω στο άλλο. Οι έδρες τους που φαίνονται δείχνουν αριθμούς με άθροισμα 45. Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό της κάτω έδρας του ζαριού, που είναι πάνω από τα άλλα δύο;

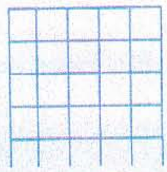
Στο Κελάρι του γερολαδά υπάρχουν έξι βαρέλια, αριθμημένα από το 1 έως το 6. Τον ρώτησε ο γείτωνας του, πόσα λίτρα λάδι έχει το κάθενα και ο γερολαδάς του απάντησε: Όλα μαζί τα βαρέλια χωρίς το 1^{ο} έχουν 3400 λίτρα, χωρίς το 2^{ο}, 3100 λίτρα χωρίς το 3^{ο}, 320 λίτρα, χωρίς το 4^{ο}, 3000 λίτρα χωρίς το 5^{ο}, 3300 λίτρα και χωρίς το 6^{ο}, 3500 λίτρα. Μπορείτε να βρείτε πόσα λίτρα λάδι έχει το κάθε βαρέλι;

Και τέλος μια δραστηριότητα από τον συνάδελφο **Κ. Γράψα**:

ΜΔ$_{15}$. Δραστηριότητα για να γεμίζετε τον χρόνο σας
(και όχι να τον σκοτώνετε!!)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ

τα μαύρα να τοποθετηθούν από εσάς



Οριζοντίως	Καθέτως
1) α)Το αποτέλεσμα: $4+2\cdot5^2$ [….] β)Δύναμη του 2. [……..] 2) α) Πολλαπλάσιο του 7. […….] β) Επαληθεύει την εξίσωση $10x=610$ [….] 3) Για να τρέψουμε ακέραιο σε κλάσμα αυτό βάζουμε συνήθως παρανομαστή. [….] 4) α) $80+100\cdot3^2$ [….] β) Ο μεγαλύτερος μονοψήφιος διαιρέτης του 16 (ή η κυβική του ρίζα είναι το 2) [….] 5) α) Η τετραγωνική του ρίζα είναι το 30. [….] β) Το αποτέλεσμα του γινομένου με έναν παράγοντα μηδέν.	1) α) ΟΙ συντελεστές του x στο σύστημα $5x+4\psi=6$ $2x+\ \psi=3$ γραμμένοι με την σειρά. […..] β) Ο μεγαλύτερος διψήφιος. […..] 2) α) Οι συντελεστές του ψ στο προηγούμενο σύστημα 1)α […..] β) Το εμβαδόν σε m^2 ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση 16m και ύψος 5m […..] 3) Ο μικρότερος τριψήφιος. […..] 4) Η περίμετρος σε μέτρα παραλληλογράμμου με πλευρές 2m και 16 m […..] 5 α) Οι απόλυτες τιμές των αριθμών x και ψ που επαληθεύουν το σύστημα στην 1) α κάθετα γραμμένες μαζί. […..] β) Το αποτέλεσμα $-3^2\cdot7+143$ […..]

Όταν ήμουνα στο 8ο Γυμνάσιο Αχαρνών η «προγύμναση» για τον διαγωνισμό Θαλής, έπιασε τόπο…

1. Γ' Γυμνασίου 2012-2013 | Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
www.hms.gr/node/637

ΛΕΟΝΤΙΔΗ, **ΔΕΣΠΟΙΝΑ**, 8ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΧΑΡΝΩΝ, ΑΝΑΤΟΛΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ.