ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 10

2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ):

α) Η εξίσωση $z+\overline{z}=0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τον φανταστικό άξονα.

Μονάδες 2

β) Αν για την $1-1$ συνάρτηση f ισχύει $f(x)\cdot f(1-x)=f(\kappa x+\lambda)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\kappa=0$.

Μονάδες 2

γ) Αν για μια συνάρτηση f συνεχή στο (α,β) ισχύουν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$, τότε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

Μονάδες 2

δ) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.

Μονάδες 2

ε) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f'(1)=0$, τότε το $f(1)$ είναι πάντα τοπικό ακρότατο.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με:

$$g(x)=x\ln x+cx+1$$

όπου $c\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο της $A(e,g(e))$ είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\varepsilon:\ x-y+2015=0$$

α) Να βρείτε τον αριθμό c.

Μονάδες 5

β) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Μονάδες 7

δ) Με τη βοήθεια του Συνόλου Τιμών της g, ή με οποιονδήποτε άλλο ενδεδειγμένο τρόπο, μπορείτε να αποδείξετε ότι:

$$x^x\ge e^{x-1}$$

ισχύει για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμες, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο ίδιο σημείο του άξονα $y'y$ και ισχύει ότι:

$$f''(x)=g''(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επίσης η $g(x)$ έχει δύο ρίζες $x_1<x_2$ τέτοιες, ώστε για τον μιγαδικό $w=x_1+x_2 i$ να ισχύει ότι:

$$|w-\overline{w}i|>|w+wi|$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x) - g(x) = kx \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 < 0 < x_2$.

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f(2) = \ln 2$, $f\left(\frac{1}{e}\right) < e$ και για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ισχύουν τα εξής:

- η f είναι παραγωγίσιμη
- $|xf(x) - 1| + |x(x-1)|f'(x) = 0$
- $f(x) \neq \frac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$.

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $F(x) = (x-1)f(x)$ και $G(x) = \ln x$ είναι παράλληλες σε όλα τα σημεία με ίδια τετμημένη $x_0 \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Μονάδες 4

3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (Μονάδες 4) και να εξετάσετε την παραγωγισιμότητά της στο $x_0 = 1$ (Μονάδες 2).

Μονάδες 6

Αν είναι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$, τότε:

4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ (Μονάδες 4) και ότι $f(x)\leq 1$ για κάθε $x \geq 1$ (Μονάδες 2).

Μονάδες 6

5. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $\Phi(x)$ με $\Phi(x)=\dfrac{x-1}{e^x}+1$, τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Α επιμελήθηκε ο **Δρακάκης Γεώργιος,** Μαθηματικός.

Το θέματα Β και Γ επιμελήθηκε ο **Τουρναβίτης Στέργιος,** Μαθηματικός του 6ου Γενικού Λυκείου Αχαρνών.

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος,** Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
3° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο, σελίδα 224

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο, σελίδα 188, 189.

3. α) ΣΩΣΤΟ, διότι $z+\overline{z}=0 \Leftrightarrow x+yi+x-yi=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$, άρα η εικόνα του z βρίσκεται στον φανταστικό άξονα.

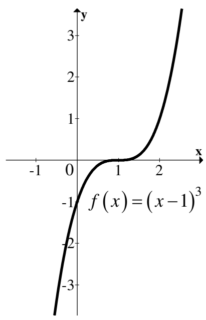
β) ΣΩΣΤΟ, διότι για $x=0$ είναι $f(0)\cdot f(1)=f(\lambda)$ και για $x=1$ είναι $f(1)\cdot f(0)=f(\kappa+\lambda)$,

άρα: $f(\lambda)=f(\kappa+\lambda) \overset{f:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} \lambda=\kappa+\lambda \Leftrightarrow \kappa=0$.

γ) ΣΩΣΤΟ, διότι προκύπτει από το θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]\subset(\alpha, \beta)$, όπου $x_1>\alpha$, με $f(x_1)<0$ και $x_2<\beta$, με $f(x_2)>0$.

δ) ΣΩΣΤΟ, διότι η 2^{η} παράγωγος είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού, άρα μηδενίζεται και εκατέρωθεν της ρίζας του αλλάζει πρόσημο.

ε) ΛΑΘΟΣ, διότι π.χ. $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$, αλλά το $f(1)=0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.



ΘΕΜΑ Β

α) $g'(x)=\ln x+x\dfrac{1}{x}+c \Rightarrow g'(x)=\ln x+1+c$ **για κάθε** $x>0$.

Ισχύει ότι $g'(e)=1$**, οπότε βρίσκουμε ότι** $2+c=1\Leftrightarrow \boxed{c=-1}$ **.**

β) Ο τύπος της $g(x)$ **γίνεται** $g(x)=x\ln x-x+1$ **και της παραγώγου** $g'(x)=\ln x$ **. Για τη μονοτονία και το ακρότατο κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:**

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	Ολ. ελάχιστο	$\nearrow$	

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα για $x=1$ έχουμε ολικό ελάχιστο $g(1)=0$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε $g(1)=0\le g(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x-x+1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)$ (απροσδιόριστη μορφή), εφαρμόζουμε de l' hospital και

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=0$.

Το ζητούμενο $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0-0+1=1$ και επίσης

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}[x(\ln x-1)+1]=+\infty.$

δ) Για κάθε $x>0$ έχουμε

$x^x\ge e^{x-1}\overset{\ln x\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow}\ln x^x\ge \ln e^{x-1}\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 0\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$ το οποίο ισχύει από το ερώτημα β), αφού $g(1)=0$ ολικό ελάχιστο.

Β’ τρόπος

Από το β) ερώτημα έχουμε $g(A)=[0,+\infty)$ άρα

$$g(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow \ln x^x\ge x-1\overset{e^x\ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} e^{\ln x^x}\ge e^{x-1}\Leftrightarrow x^x\ge e^{x-1}$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Σύμφωνα με τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής επειδή $f''(x)=g''(x)$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=g'(x)+kx\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=(kx)'$$

β) Από την υπόθεση έχουμε :

$$|w-\bar{w}i|>|w+wi| \Leftrightarrow |w-\bar{w}i|^2>|w+wi|^2 \Leftrightarrow (w-\bar{w}i)(\bar{w}+wi)>(w+wi)(\bar{w}-\bar{w}i) \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w}+w^2i-\bar{w}^2i-\cancel{w\bar{w}(-1)}>w\bar{w}-\cancel{w\bar{w}i}+\cancel{w\bar{w}i}-\cancel{w\bar{w}(-1)} \Leftrightarrow \boxed{(w^2-\bar{w}^2)i>0} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $w=x_1+x_2i$ και $\bar{w}=x_1-x_2i$ οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} w^2=x_1{}^2+2x_1x_2i-x_2{}^2 \\ \bar{w}^2=x_1{}^2-2x_1x_2i-x_2{}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow w^2-\bar{w}^2=4x_1x_2i$$ και σε συνδυασμό με την (1) έχουμε ότι $-4x_1x_2i>0 \Leftrightarrow x_1x_2<0$, δηλαδή x_1, x_2 ετερόσημες και επειδή $x_1<x_2$ θα ισχύει $\boxed{x_1<0<x_2}$.

γ) Η f ως δύο φορές παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq\mathbb{R}$.

Άρα
- $f'/[x_1,x_2]$ συνεχής **(2)** και
- $f(x_1)\cdot f(x_2)=k^2x_1x_2\le 0$ **(3).**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το k:

- Αν $k=0$ τότε $f(x_1)=0$ ή $f(x_2)=0$ ο.ε.δ. (Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα τη x_1 ή τη x_2)
- Αν $k\neq 0$ τότε η **(3)** ισχύει ως ανισότητα $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ **(3α)**

Οι **(2)**, **(3α)** εξασφαλίζουν τις υποθέσεις του Θ.Bolzano από το οποίο έχουμε ότι:

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, οπότε $\xi\in(x_1,x_2)$ ρίζα της $f(x)=0$ και $(x_1,x_2)\subseteq\mathbb{R}$ ο.ε.δ.

ΘΕΜΑ Δ

1. Η σχέση $f(x)\neq\frac{1}{x}$ δίνει $f(x)-\frac{1}{x}\neq 0$ άρα η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$ ως συνεχής στο $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ (επειδή προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών), διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Επιπλέον, επειδή $g\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)-e<0$ και

$g(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-\ln e}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\right)>0$ (διότι $\frac{4}{e}>1$), άρα

$g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Άρα $f(x)<\frac{1}{x},\ x\in(0,1)$ και $f(x)>\frac{1}{x},\ x\in(1,+\infty)$.

Αφού $f(x)<\frac{1}{x},\ x\in(0,1)$, παίρνοντας όριο καθώς το x πλησιάζει στο 1 από αριστερά έχουμε:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)\le 1$ και αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, θα ισχύει ότι
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$ συνεπώς $f(1)\le 1$.

Όμοια, αφού $f(x)>\frac{1}{x},\ x\in(1,+\infty)$, παίρνοντας όριο καθώς το x πλησιάζει στο 1 από δεξιά παίρνουμε τελικά $f(1)\ge 1$

Άρα $f(1)=1$.

2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $F'(x)=G'(x)$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ δηλαδή, ισοδύναμα, ότι για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x)+(x-1)f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow xf(x)-1+x(x-1)f'(x)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω του προσήμου της συνάρτησης $g(x)$ που ορίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η δοσμένη σχέση $|xf(x)-1|+|x(x-1)|f'(x)=0$ γράφεται

- για $x>1$: $xf(x)-1+x(x-1)f'(x)=0$ και
- για $0<x<1$:

$$-xf(x)+1-x(x-1)f'(x)=0\Leftrightarrow xf(x)-1+x(x-1)f'(x)=0$$

Άρα τελικά ισχύει $xf(x)-1+x(x-1)f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ που ήταν και το ζητούμενο λόγω της **(1)**.

3. (Υπενθυμίζουμε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής εφαρμόζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων).

Αφού $F'(x)=G'(x)$, για κάθε $x\in(0,1)$, υπάρχει σταθερά c_1 ώστε $F(x)=G(x)+c_1$, για κάθε $x\in(0,1)$.

Όμοια, αφού $F'(x) = G'(x)$, για κάθε $x \in (1,+\infty)$, υπάρχει σταθερά c_2 ώστε $F(x) = G(x) + c_2$, για κάθε $x \in (1,+\infty)$.

Συνεπώς, $F(x) = \begin{cases} G(x)+c_1, & 0<x<1 \\ G(x)+c_2, & x>1 \end{cases}$ και λόγω συνέχειας των συναρτήσεων $F(x)$ και $G(x)$ στο 1 παίρνουμε

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow G(1)+c_1 = G(1)+c_2 = 0 \overset{G(1)=0}{\Leftrightarrow} c_1 = c_2 = 0$$ άρα τελικά

$F(x) = G(x)$, για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$, για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1$, άρα τελικά

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Για να δούμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα εξετάσουμε αν το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ είναι πραγματικός αριθμός. Πράγματι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{2x\,\cancel{(x-1)}} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

4. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x-1) - \ln x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2},$$

όπου $h(x) = x-1-x\ln x,\ x>0$. Για να βρούμε τη μονοτονία της f αρκεί να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης h στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ καθώς ο παρονομαστής $x(x-1)^2$ είναι θετικός στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x) = -\ln x$. Επειδή $h'(x)>0$ στο $(0,1)$ και $h'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ και η h είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ συνεπώς παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $h(1)=0$. Άρα $h(x)\le h(1)=0$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα $h(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ οπότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ άρα για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f(x) \leq f(1) = 1$ που αποδεικνύει το ζητούμενο.

(Διαφορετικά θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση της εφαρμογής 2 του σχολικού βιβλίου σελ. 266 σύμφωνα με την οποία ισχύει $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα για $x > 1$ είναι $x - 1 > 0$ και από την εφαρμογή παίρνουμε $\frac{\ln x}{x-1} < 1$, δηλαδή $f(x) < 1$, για κάθε $x > 1$. Επειδή επιπλέον $f(1) = 1$, άρα $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \geq 1$).

5. Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = \Phi(x)$. Αρχικά παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι μία προφανής λύση της εξίσωσης. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική. Για $x > 1$ δείξαμε στο Δ4 ότι $f(x) < 1$ και από την άλλη είναι

$$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \overset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{x-1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{e^x} + 1 > 1 \Leftrightarrow \Phi(x) > 1.$$

Άρα για $x > 1$ τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης δε μπορεί να είναι ίσα (το πρώτο μέλος είναι μικρότερο της μονάδας και το δεύτερο μεγαλύτερο της μονάδας), συνεπώς η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

<u>**Σχόλιο:**</u> Θα μπορούσαμε επιπλέον (παρά το ότι δεν το ζητάει η άσκηση), να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \Phi(x)$ δεν έχει λύσεις για $x < 1$ και η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Α επιμελήθηκε ο **Δρακάκης Γεώργιος**, Μαθηματικός.

Τα θέματα Β και Γ επιμελήθηκε ο **Τουρναβίτης Στέργιος**, Μαθηματικός του 6ου Γενικού Λυκείου Αχαρνών.

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος**, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2, 3, 4)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 3

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστή ή με Λάθος αν είναι λανθασμένη:

α) Εάν $\alpha<\beta$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{u_2}^{u_1} f(u)du$, όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

γ) Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z και w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z+3-4i| = 5 \text{ και } |w+6-8i| = 10$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, w.

Μονάδες 6

2. Να βρείτε το μέγιστο μέτρο των μιγαδικών z, w.

Μονάδες 6

3. Να βρείτε:

α) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$,

Μονάδες 8

β) τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους η τιμή $|z-w|$ γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει:

$$g'(x)=\frac{1}{3g^2(x)+\varepsilon} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ όπου } \varepsilon \text{ μία σταθερά στο σύνολο } \mathbb{R}.$$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο της $A(0, g(0))$ έχει εξίσωση:

$$x-2018y+2018=0$$

α) Να βρείτε τον αριθμό ε.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι $g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+2016$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο $g^{-1}(x)=x^3+2015x-2016$.

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g.

Μονάδες 6

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\cdot(g^2(x)+2015)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με

$f(0)=1,\ f'(0)=0$ και $f'(x)-2xf(x)=2x^3-2x$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2015}+\int_0^1 x f(xt)\,dt}{\eta\mu^{2015}x}$

Μονάδες 6

3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $G(x)=\int_x^{x+3} f(t)\,dt$, $x\geq 0$ και

στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\int_{e^{-x}}^{e^{-x}+3} f(t)\,dt > \int_{\frac{1}{2014}}^{\frac{6043}{2014}} f(t)\,dt$.

Μονάδες 8

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Α και Δ επιμελήθηκε ο **Βρυώνης Δημήτριος,** Μαθηματικός.

Τα θέματα Β και Γ επιμελήθηκε ο **Τουρναβίτης Στέργιος,** Μαθηματικός του 6ου Γενικού Λυκείου Αχαρνών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 304

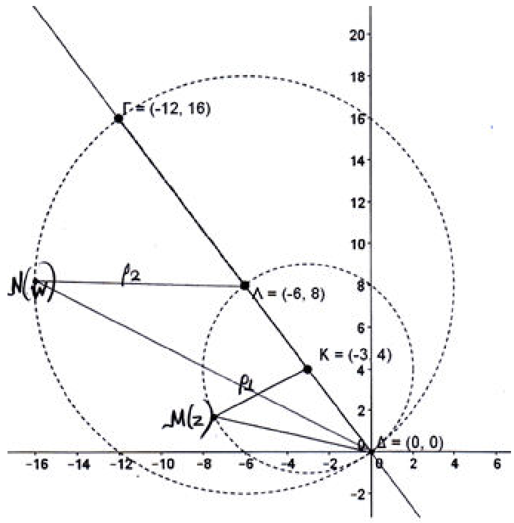
2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 303

3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 261

4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

1. $|z+3-4i|=5 \Leftrightarrow |z-(-3+4i)|=5$



Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-3,4)$ και ακτίνα $\rho_1 = 5$.

Η εξίσωση του παραπάνω κύκλου είναι:
$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$ **(1)**

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών w, σύμφωνα και με την ισοδύναμη σχέση $|w-(-6+8i)|=10$, είναι ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(-6,8)$ και ακτίνα $\rho_2=10$.

Η εξίσωση αυτού του κύκλου είναι: $(x+6)^2+(y-8)^2=10^2$ **(2).**

2. <u>Α' τρόπος</u>

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, αν θεωρήσουμε την εικόνα Μ(z) ενός μιγαδικού z που κινείται στον κύκλο (K,ρ_1) και από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΚΟ έχουμε:

$$|z| \le \rho_1 + (KO) \Leftrightarrow |z| \le 5+5 \Leftrightarrow |z| \le 10$$

Η ισότητα ισχύει όταν το Μ ταυτίζεται με το Λ, το σημείο τομής της ευθείας ΟΚ με τον κύκλο (K,ρ_1). Τότε δεν υπάρχει τρίγωνο και το αντιδιαμετρικό σημείο Λ της αρχής $O(0,0)$ των αξόνων είναι η εικόνα του μιγαδικού z που έχει μέγιστο μέτρο $|z|_{max}=10$. Αντίστοιχα για ένα άλλο σημείο Ν του κύκλου (Λ,ρ_2) έχουμε:

$|w|\le \rho_2+(\Lambda O)\Leftrightarrow |w|\le 10+10\Leftrightarrow |w|\le 20$.

Στην περίπτωση αυτή η εικόνα του μιγαδικού w που έχει το μέγιστο μέτρο είναι το σημείο τομής της ΛΟ με τον κύκλο (Λ,ρ_2). Αυτό δεν είναι άλλο από το σημείο Γ και ισχύει $|w|_{max}=20$.

<u>Β' τρόπος</u>

Στο σχήμα έχουμε τους 2 γεωμετρικούς τόπους. Από την ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για τον κύκλο με κέντρο Κ η μέγιστη απόσταση των σημείων του από την αρχή των αξόνων είναι το $O\Lambda=2\rho_1=2\cdot 5=10,$ οπότε $|z|_{max}=10$. Για τον κύκλο με κέντρο Λ θα έχουμε το $O\Gamma=2\rho_2=2\cdot 10=20,$ οπότε $|w|_{max}=20$.

<u>Γ' τρόπος</u>

Έχουμε $|z-(-3+4i)|=5$, της ισχύει

$|z-(-3+4i)|\ge \big||z|-|-3+4i|\big|\Rightarrow \big||z|-\sqrt{25}\big|\le 5\Rightarrow -5\le |z|-5\le 5\Rightarrow |z|\le 10$

Άρα $|z|_{max}=10$.

Όμοια: Έχουμε $|w-(-6+8i)|=10$, της ισχύει

$|w-(-6+8i)|\ge \big||w|-|-6+8i|\big|\Rightarrow \big||w|-\sqrt{100}\big|\le 10\Rightarrow -10\le |w|-10\le 10\Rightarrow |w|\le 20$

Άρα $|w|_{max}=20$.

3. α) Ισχύει: $K\Lambda=\sqrt{(-6+3)^2+(8-4)^2}=5=\rho_2-\rho_1$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. Σ΄ αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι το $O\Delta=0$ και η μέγιστη το τμήμα $O\Gamma=K\Lambda+\rho_1+\rho_2=5+5+10=20$ οπότε

$|z-w|_{min}=0\ \ \text{και}\ \ |z-w|_{max}=20$.

Σημείωση: $\{\Lambda,O\}$ και $\{\Gamma,O\}$ είναι τα ζεύγη των σημείων που τέμνει η διακεντρική ευθεία ΚΛ τους κύκλους (K,ρ_1) και (Λ,ρ_2) αντίστοιχα.

Λύνουμε τα συστήματα $\Sigma_1:\left|\begin{array}{l} y=-\dfrac{4}{3}x \\ (x+3)^2+(y-4)^2=25\end{array}\right.$ και $\Sigma_2:\left|\begin{array}{l} y=-\dfrac{4}{3}x \\ (x+6)^2+(y-8)^2=100\end{array}\right.$

Οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους είναι οι λύσεις των Σ_1 και Σ_2 και ικανοποιούν την **(3)** για την μικρότερη και μεγαλύτερη απόσταση είναι:

$(z_1 = 0+0i, w_1 = 0+0i)$ και $|z_1 - w_1| = 0$ ή

$(z_2 = 0+0i, w_2 = -12+16i)$ και $|z_2 - w_2| = 20$.

ΘΕΜΑ Γ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g είναι $\frac{1}{2018} = g'(0)$ **(1)**

Επειδή το σημείο επαφής $A(0, g(0))$ είναι κοινό σημείο της εφαπτομένης και της C_g, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της C_g. Έτσι για $x = 0$, έχουμε: $0 - 2018 \cdot g(0) + 2018 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$ και για $x = 0$ στον τύπο $g'(x) = \frac{1}{3g^2(x)+\varepsilon} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3\cdot 1^2 + \varepsilon} \overset{\alpha\pi\acute{o}\,(1)}{=} \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{1}{3+\varepsilon} = \frac{1}{2018} \Rightarrow$

$3 + \varepsilon = 2018 \Rightarrow \varepsilon = 2015$

β) Από τη σχέση $g'(x) = \frac{1}{3g^2(x)+2015}$ ισοδύναμα έχουμε:

$3g^2(x)g'(x) + 2015g'(x) = (x)' \Leftrightarrow \left[g^3(x) + 2015g(x)\right]' = (x)'$

Από τις Συνέπειες του Θ.Μ.Τ., υπάρχει σταθερά c: $g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + c$.

Για $x = 0$, έχουμε: $g^3(0) + 2015 \cdot g(0) = c \Rightarrow 1^3 + 2015 \cdot 1 = c \Rightarrow c = 2016$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + 2016$ **(2)**.

γ) Επειδή $g'(x) > 0$ η g είναι γνησίως αύξουσα άρα η g είναι "1-1".

Θέτουμε στη σχέση **(2)** όπου $g(x) = y$ και έχουμε:

$y^3 + 2015y = x + 2016 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = y^3 + 2015y - 2016$

Τελικά είναι $g^{-1}(x) = x^3 + 2015x - 2016$ **(3)**.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g''(x) = \dfrac{-(3g^2(x)+2015)'}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow g''(x) = \dfrac{-6g(x)g'(x)}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g''(x) = \frac{-6g(x)\cdot\dfrac{1}{3g^2(x)+2015}}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow g''(x) = \frac{-6g(x)}{(3g^2(x)+2015)^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Από τη **(2)** για $g(x)=0$ βρίσκουμε $x=-2016$, η οποία είναι και η μοναδική της λύση αφού από το β) ερώτημα g: 1-1.

Επίσης είναι:

- $x < -2016 \overset{g\ \text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(-2016) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0 \Leftrightarrow g''(x) > 0$
  Άρα η g είναι κυρτή στο $(-\infty,-2016]$.
- Όμοια αν $x > -2016 \Leftrightarrow g''(x) < 0$ και η g είναι κοίλη στο $[-2016,+\infty)$.

Επειδή $g''(-2016)=0$ και η $g''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του −2016, το σημείο $A(-2016,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_g.

ε) $f(x) = \dfrac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\left(g^2(x)+2015\right)}$, δηλαδή $f(x) = \dfrac{x^3+2015x-2016}{x\left(g^3(x)+2015g(x)\right)}$, οπότε

$f(x) = \dfrac{x^3+2015x-2016}{x(x+2016)}$, άρα $f(x) = \dfrac{x^3+2015x-2016}{x^2+2016x}$ **(4)**

Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x=0$, $x=-2016$.

Επειδή $\lambda = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+2015x-2016}{x^3+2016x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{2015}{x^2}-\dfrac{2016}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2016}{x}\right)} = 1 \in \mathbb{R}$

και

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2015x-2016}{x^2+2016x} - \frac{x^3+2016x^2}{x^2+2016x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2015x-2016-x^3-2016x^2}{x^2+2016x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2016x^2+2015x-2016}{x^2+2016}\right)$$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(-2016+\dfrac{2015}{x}-\dfrac{2016}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2016}{x^2}\right)} = -2016 \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = x - 2016$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και $-\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

1. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

i) $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$

ii) $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow$

x		**0**	
f′(x)	−	0	+
f (x)	↘	**ελάχιστο**	↗

Οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και η ελάχιστη τιμή είναι η $f(0) = 1$.
Συνεπώς $f(x) \geq f(0) = 1$, δηλαδή $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Θέτουμε $x \cdot t = y$. Παραγωγίζοντας θα έχουμε $x \cdot dt = dy$.

- Για $t = 0$ έχουμε $y = 0$
- Για $t = 1$ έχουμε $y = x$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{2015} + \int_0^1 x f(xt)\,dt}{\eta\mu^{2015} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{2015} + \int_0^x f(y)\,dy}{\eta\mu^{2015} x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^{2015}}\left[1+\frac{\int_0^x f(y)\,dy}{x^{2015}}\right]}{\cancel{x^{2015}}\frac{\eta\mu^{2015}x}{x^{2015}}}=+\infty$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^{2015}x}{x^{2015}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{2015}=1^{2015}=1$

και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(y)\,dy}{x^{2015}}\underset{D'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(y)\,dy\right)'}{(x^{2015})'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2015\cdot x^{2014}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2015\cdot x^{2014}}=\frac{1}{2015}\cdot\underbrace{\cancel{\lim_{x\to 0}f(x)}}_{f(0)=1}\cdot\underbrace{\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2014}}}}_{+\infty}=+\infty$$

3. Είναι $f'(x)-2x\cdot f(x)=2x^3-2x\overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow}$

$$e^{-x^2}f'(x)-2x\cdot e^{-x^2}f(x)=2x^3e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\Leftrightarrow$$

$$e^{-x^2}f'(x)+(e^{-x^2})'f(x)=(-x^2)(e^{-x^2})'+(-x^2)'e^{-x^2}\Leftrightarrow$$

$$\left[e^{-x^2}f(x)\right]'=\left[-x^2e^{-x^2}\right]'.$$

Από τις Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. $\exists C\in\mathbb{R}$:

$$e^{-x^2}f(x)=-x^2e^{-x^2}+C$$

Για $x=0$ $\underbrace{\cancel{e^0}}_{1}\ \underbrace{\cancel{f(0)}}_{1}=-0e^0+C\Leftrightarrow C=1$

οπότε $\frac{f(x)}{e^{x^2}}=-\frac{x^2}{e^{x^2}}+1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$

4. Είναι $G(x)=\int_x^{x+3}f(t)\,dt=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3}f(t)\,dt$

δηλαδή $G(x)=\int_0^{x+3} f(t)\,dt-\int_0^{x} f(t)\,dt$

Παραγωγίζοντας θα έχουμε:

$$G'(x)=f(x+3)\cdot(x+3)'-f(x)\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} G'(x)=f(x+3)-f(x),\ x\geq 0 \\ \text{είναι } 0\leq x<x+3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x+3)\Leftrightarrow f(x+3)-f(x)>0 \end{array}\right\}$$

Άρα $G'(x)>0$, δηλαδή η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η ανίσωση γίνεται:

$$\int_{e^{-x}}^{e^{-x}+3} f(t)\,dt > \int_{\frac{1}{2014}}^{\frac{1}{2014}+3} f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$G(e^{-x})>G\left(\frac{1}{2014}\right),\ e^{-x}>0\ ,\ \frac{1}{2014}>0$$

και επειδή η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ θα έχουμε:

$$e^{-x}>\frac{1}{2014}\Leftrightarrow\frac{1}{e^{x}}>\frac{1}{2014}\Leftrightarrow$$

$$e^{x}<2014 \overset{\ell n x\uparrow}{\Leftrightarrow} 0\leq x<\ell n 2014.$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Α και Δ επιμελήθηκε ο **Βρυώνης Δημήτριος,** Μαθηματικός.

Τα θέματα Β και Γ επιμελήθηκε ο **Τουρναβίτης Στέργιος,** Μαθηματικός του 6^{ου} Γενικού Λυκείου Αχαρνών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Ελένη.**