**Homo Mathematicus**

# Ο διαμεσολαβητικός ρόλος της Γεωμετρίας στην ανάδειξη της αλληλοεξάρτησης μεταξύ των γραμμικών εξισώσεων, ευθειών, διανυσμάτων και γραμμικών συστημάτων

Στέργιος Τουρναβίτης

*Σκοπός αυτής της εργασίας, είναι να αναδείξει και να αλληλοσυνδέσει τη λύση και στη συνέχεια την διερεύνηση γραμμικών συστημάτων με τα διανύσματα.*

Αρχίζουμε με την επίλυση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=5\\ 3x+4y&=-5\end{aligned}\right\}(\Sigma_1)$$

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο $x$ από την $2^{\eta}$ εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της $1^{\eta\varsigma}$ εξίσωσης με το -3 και την εξίσωση που θα προκύψει προσθέτουμε κατά μέλη με την $2^{\eta}$ εξίσωση. Έτσι έχουμε τα ισοδύναμα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x-2y&=5\\ -3x+3x+6y+4y&=-15-5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x-2y&=5\\ 10y&=-20\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x-2\cdot(-2)&=5\\ y&=-2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{aligned} x&=1\\ y&=-2\end{aligned}$$

Με την μέθοδο των οριζουσών, βρίσκουμε ξανά τις ίδιες λύσεις, εφόσον βέβαια **η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του 0**.

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-(-2)\cdot 3=10\neq 0$$

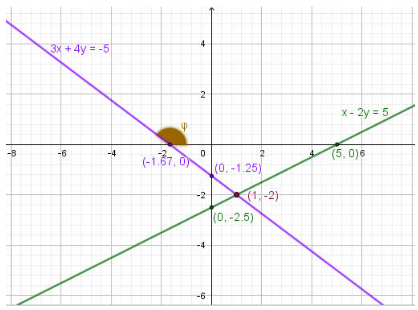
Σύμφωνα λοιπόν με τον κανόνα του Cramer,

έχουμε: $$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}\Rightarrow x=\frac{10}{10}=1,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}\Rightarrow y=\frac{-20}{10}=-2$$

Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι οι ευθείες που είναι γραφικές αναπαραστάσεις των γραμμικών εξισώσεων του συστήματος, τέμνονται στο σημείο $(1,-2)$.

Η παραπάνω γραφική λύση του συστήματος, επικεντρώνεται στις ξεχωριστές γραμμικές εξισώσεις (rows). Αυτός ο τρόπος μας είναι ιδιαίτερα προσιτός στις δύο διαστάσεις-επίπεδο, αρκεί να δώσουμε δύο αυθαίρετες τιμές στις μεταβλητές $x$ για την κάθε εξίσωση και να λύσουμε

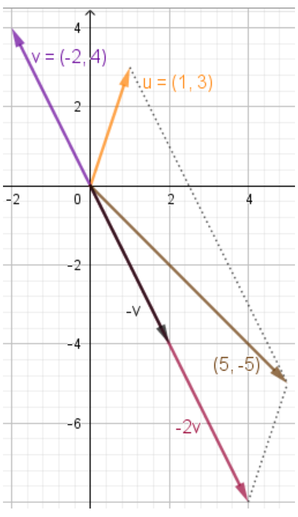



ως προς τα αντίστοιχα y. Π.χ. η ευθεία με εξίσωση $x-2y=5$ διέρχεται από τα σημεία $(0,-2.5)$, $(5,0)$ το $(1,-2)$ και όλα τα ενδιάμεσα μεταξύ των δύο πρώτων σημείων. Την δεύτερη εξίσωση $3x+4y=-5$ μπορούμε να την προσδιορίσουμε από την κλίση της $-\frac{3}{4}$ και ότι διασταυρώνεται-τέμνει την πρώτη, στο σημείο $(1,-2)$ την λύση του συστήματος.

Η δεύτερη προσέγγιση φαίνεται στα διανύσματα στήλες του γραμμικού συστήματος.

$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow x\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -5\end{bmatrix}\quad(1)$$

Το πρόβλημα εδώ είναι να βρούμε ένα κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων – στηλών του συστήματος που να παράγει το διάνυσμα της δεξιάς πλευράς της ισότητας. Προσθέτοντας τα διανύσματα $1\cdot u+(-2)\cdot v$ με τον «κανόνα του παραλληλογράμμου» παίρνουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix}5\\ -5\end{bmatrix}$.




Αλγεβρικά η σχέση (1) επαληθεύεται για $x=1,\ y=-2$.

Με άλλα λόγια, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός των συντελεστών $x, y$ της ισότητας (1), επαληθεύεται αλγεβρικά και γεωμετρικά από την λύση που βρήκαμε με τις τρεις προηγούμενες μεθόδους.