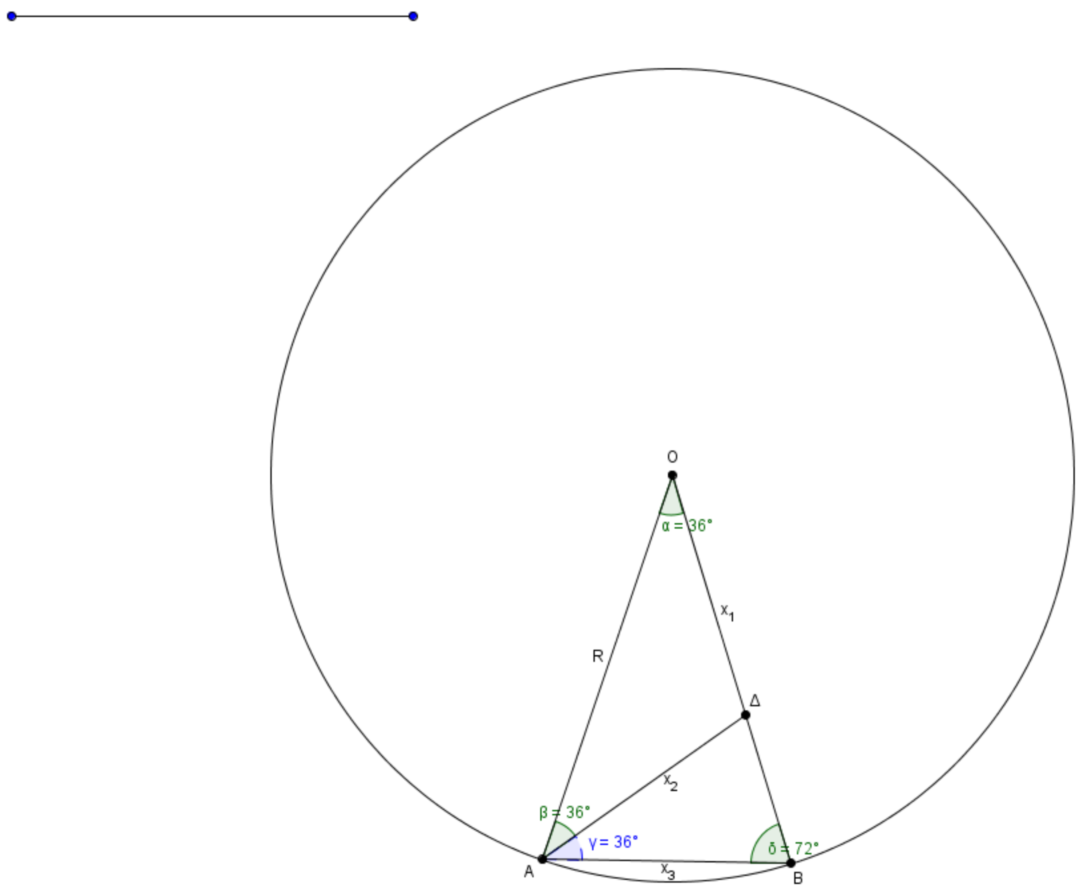
Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου σε κύκλο

$1^{ος}$ τρόπος

Δείτε και εφαρμογή $2^{η}$ σχολικό βιβλίο σελίδα 240.



Στο παραπάνω σχήμα, από τα 3 ισοσκελή τρίγωνα και από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ΑΔ έχουμε:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \lambda_{10} = x$$

$\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x}$ (1)

Η τελευταία ισότητα λόγων σημαίνει ότι η πλευρά $\lambda_{10} = x$ είναι μέση ανάλογος της ακτίνας *R* και του μικροτέρου τμήματος *R-x* (όπως προκύπτει και από τις γωνίες ΑΔΒ=72^o > ΔΑΒ=36^o που βρίσκονται απέναντι από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ=x, ΔΒ= *R-x* στο τρίγωνο ΔΑΒ, αντίστοιχα). Η ανάλυση, σύνθεση-απόδειξη και κατασκευή περιγράφεται πιο αναλυτικά και στο παρακάτω πρόβλημα.

Το πρόβλημα της χρυσής τομής

Ένα πρόβλημα γνωστό από την αρχαιότητα, είναι το **πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο**. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σήμερα και ως **πρόβλημα της χρυσής τομής**. Η διατύπωση και επίλυση του προβλήματος είναι η ακόλουθη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.6.

(Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο). ***Να διαιρεθεί ένα δεδομένο τμήμα σε δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, ώστε το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα να είναι η μέση ανάλογος του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.***

Ανάλυση: Αν $AB = \alpha$ το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και $A\Gamma = \chi > \Gamma B = \alpha - \chi$, θα πρέπει να ισχύει η σχέση

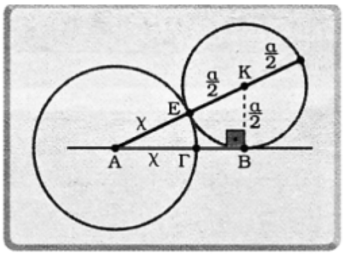
$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\alpha-\chi}{\chi} \quad \text{ή} \quad \chi^2 = (\alpha-\chi)\cdot\alpha \qquad (1)$$

Η (1) γράφεται και ως

$$\chi^2 = \alpha^2 - \alpha\cdot\chi \ \text{ ή } \ \chi^2 + \alpha\cdot\chi - \alpha^2 = 0.$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για το πρόβλημα 9.5. Μόνο που, αντί για το ευθύγραμμο τμήμα 2α, έχουμε το α και, αντί για το β, έχουμε το α.

Σύνθεση–Απόδειξη: Το διπλανό σχήμα περιγράφει το χωρισμό του ευθύγραμμου τμήματος AB σε μέσο και άκρο λόγο, εφ΄ όσον έχει γίνει κατανοητή η επίλυση του προβλήματος 9.5.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι που μελετούσαν τα διάφορα φυσικά φαινόμενα και προσπαθούσαν να ανακαλύψουν τους νόμους και την αρμονία της Φύσης, διαπίστωσαν ότι, όπου εμφανίζεται η αναλογία της χρυσής τομής, υπάρχει μια ιδιαίτερη αισθητική αξία. Την άποψη αυτή υιοθέτησαν και ορισμένοι αρχιτέκτονες και καλλιτέχνες, γι΄ αυτό και σε πολλά έργα τους εμφανίζεται η αναλογία της χρυσής τομής. Η θετική ρίζα της εξίσωσης $\chi^2 + \alpha\cdot\chi - \alpha^2 = 0$ είναι η

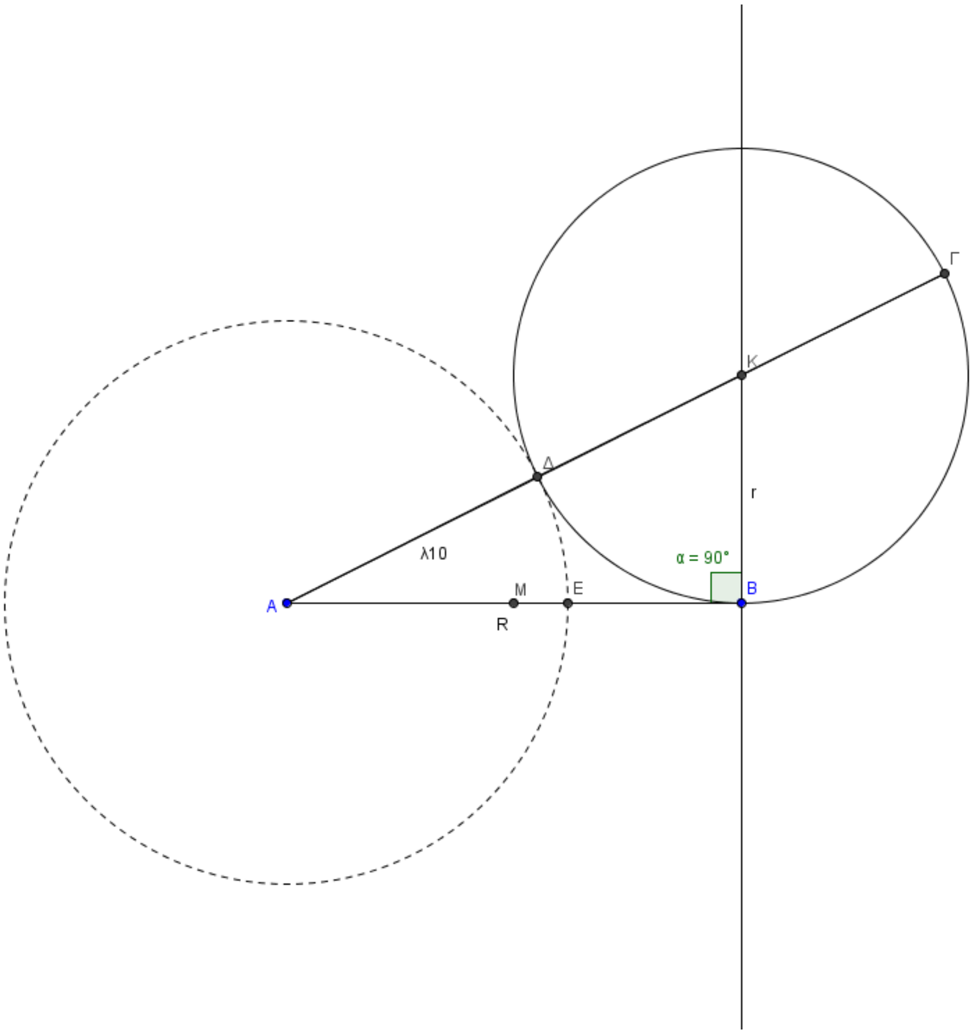
$$\chi = \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{5}-1).$$

Ο λόγος των μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων $A\Gamma$ και ΓB του παραπάνω προβλήματος είναι ο

$$\frac{\chi}{\alpha-\chi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803.$$

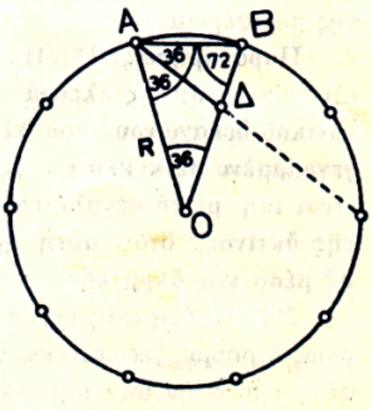
Στη διεθνή μαθηματική συμβολογραφία ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με το γράμμα φ, επειδή φαίνεται ότι ήταν γνωστός στο μεγάλο γλύπτη και αρχιτέκτονα Φειδία, ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα στην Ακρόπολη των Αθηνών. Ο Φειδίας αξιοποίησε την ιδιότητα της χρυσής τομής, δηλαδή το χωρισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Τον αριθμό αυτό θα συναντήσουμε πάλι στο κανονικό πεντάγωνο και στο κανονικό δεκάγωνο.

Το παρακάτω σχήμα περιγράφει την ίδια κατασκευή με r = $\frac{R}{2}$.



<u>2^{ος} τρόπος</u>

9. Ἐγγραφή κανονικοῦ δεκαγώνου σέ κύκλο. Ἔστω ΑΒ μιά πλευρά κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 8). Τότε $A\hat{O}B = 360°/10 = 36°$ καί ἐπομένως καθεμιά ἀπό τίς γωνίες τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ εἶναι ἴση μέ 72°. Ἐπειδή, λοιπόν, ἡ γωνία $O\hat{A}B$ εἶναι διπλάσια τῆς $A\hat{O}B$, ἄν φέρουμε τήν ἐσωτερική διχοτόμο ΑΔ τῆς $O\hat{A}B$, τό τρ. ΟΑΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλά καί τό τρ. ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί $A\hat{\Delta}B = 36° + 36°$ (ἐξωτερική γωνία) $= 72° = A\hat{B}\Delta$. Ἑπομένως ἔχουμε:



Σχ. 8

(1) $AB = A\Delta = \Delta O = x, \quad \Delta B = R - x$

ὅπου x ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἀπό τό θεώρημα τῆς διχοτόμου ἔχουμε:

$$\frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{OA}{AB} \text{ ἤ, λόγω τῶν (1), } \frac{x}{R-x} = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

(2) $x^2 = R(R - x)$ ἤ (3) $x^2 + Rx - R^2 = 0 \ (x > 0)$

Ἡ (3) ἔχει μία μόνο θετική λύση, πού ἐκφράζει τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου:

$$\lambda_{10} = x = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2} \text{ Ὥστε:}$$

(4) $$\boxed{\lambda_{10} = \frac{R}{2}\,(\sqrt{5} - 1)}$$

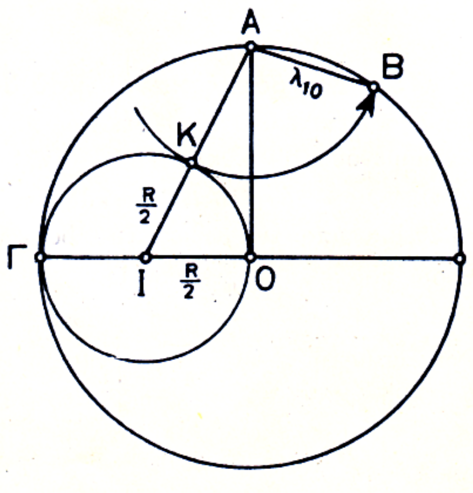
Ἀπό τήν πλευρά καί τήν ἀκτίνα ὑπολογίζεται τό ἀπόστημα:

$$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + \sqrt{5}}$$

Γεωμετρική κατασκευή. Ἀπό τόν τύπο (4) βλέπουμε ὅτι ἡ λ_{10} εἶναι διαφορά τῶν τμημάτων $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ καί $\frac{R}{2}$, τά ὁποῖα εὔκολα κατασκευάζονται. Φέρνουμε δύο κάθετες ἀκτίνες ΟΑ, ΟΓ (σχ. 9) καί βρίσκουμε τό μέσο τῆς ΟΓ, ἔστω τό Ι. Τότε:

$$IA = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Ἀπό τό ΙΑ ἀφαιροῦμε τό ΙΚ= R/2, ὁπότε μένει τό $KA = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \lambda_{10}$. Μεταφέρουμε τό ΑΚ σέ χορδή ΑΒ τῆς περιφέρειας καί ἔχουμε ἔτσι κατασκευάσει ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$, πού εἶναι ἴσο μέ τό ἕνα δέκατο τῆς περιφέρειας.

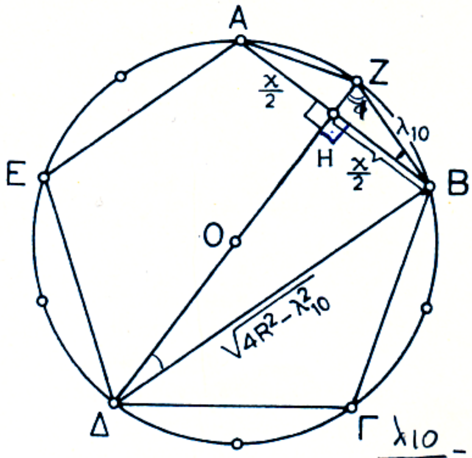


Σχ. 9

Παρατηρήσεις: 1η) Ἡ ἐξίσωση (2) δείχνει ὅτι **ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτίνα R, εἶναι ἴση μέ τό μεγαλύτερο μέρος τῆς ἀκτίνας, ὅταν αὐτή διαιρεθεῖ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.**

2η) Ἡ ἐξίσωση (3) ἐπιλύεται, ὅπως ξέρουμε, γεωμετρικά καί ἔτσι φτάνουμε στήν ἴδια κατασκευή μέ τήν παραπάνω.

10. Ἐγγραφή κανονικοῦ πενταγώνου σέ κύκλο. Χωρίζουμε τήν περιφέρεια σέ 10 ἴσα μέρη (βλέπε προηγούμενο) καί τότε τά διαιρετικά σημεῖα περιττῆς τάξεως (1ο, 3ο, 5ο, ...) ὁρίζουν τίς κορυφές ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου (σχ. 10). Ἄν Z τό μέσο τοῦ $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ OZ εἶναι μεσοκάθετος τῆς AB καί περνάει καί ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή Δ τοῦ πενταγώνου (γιατί τοξ $\overset{\frown}{ZB\Gamma\Delta} = 180°$). Ἐπίσης εἶναι $ZB = \lambda_{10}$. Τό μῆκος $x = (AB)$ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μποροῦμε νά τό ὑπολογίσουμε ἀπό τό ὀρθογ. τρίγ. ZBΔ μέ βάση τή γνωστή σχέση:



$\frac{\lambda_{10}}{2R} = \frac{HB}{\Delta B}$

Σχ. 10

$Z\Delta \cdot HB = ZB \cdot B\Delta$, πού γράφεται :

$2R \cdot HB = \lambda_{10} \cdot B\Delta$

$$2R \cdot \frac{x}{2} = \lambda_{10} \cdot \sqrt{4R^2 - \lambda_{10}^2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} \;(*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{R}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} \overset{(*)}{=} \frac{R}{4}\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Δηλαδή: $\boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$(*)\ \frac{R}{4}\sqrt{60+12\sqrt{5}-20\sqrt{5}-20} = \frac{R}{4}\sqrt{40-8\sqrt{5}}$

Τό ἀπόστημα α_5 βρίσκουμε ὅτι εἶναι ἴσο μέ $\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$.

11. Κανονικό δεκαπεντάγωνο.— Ἡ ἀριθμητική ἰσότητα

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

δείχνει ὅτι, γιά νά βροῦμε τό ἕνα δέκατο πέμπτο τῆς περιφέρειας, ἀρκεῖ ἀπό τό ἕνα ἕκτο της νά ἀφαιρέσουμε τό ἕνα δέκατο. Ἄν, λοιπόν, λάβουμε μιά χορδή AB τοῦ κύκλου (O, R) ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καί μιά δεύτερη χορδή ΑΓ ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ὅπου τὸ Γ ἀνήκει στό «ἔλασσον» τόξο $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ χορδή ΓΒ εἶναι ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Τό μῆκος λ_{15} ὑπολογίζεται μέ βάση τό θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου καί βρίσκεται:

$$\lambda_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

12. Ἱστορικό. Ὅλα τά παραπάνω κανονικά πολύγωνα ἦταν γνωστά στούς ἀρχαίους Ἕλληνες. Στίς ἀρχές τοῦ 19ου αἰώνα ὁ μεγάλος Γερμανός Μαθηματικός Karl

$(*)\ (\sqrt{5}-1)^2 = 5+1-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$

$2R \cdot \frac{x}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}$

$x = (\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{16R^2-6R^2+2\sqrt{5}R^2}{4}}$