

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

Θέμα 1

A.α) Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Για κάθε πραγματικό αριθμό α είναι $|\alpha|^2 = \alpha$

Μονάδες 3

ii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει

$$|-2\alpha + 4\beta| = -2|\alpha - 2\beta|$$

Μονάδες 3

iii. Είναι $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = 2 - \sqrt{5}$

Μονάδες 3

B.α) Να λυθεί η εξίσωση $|2x - 4| = 8$

Μονάδες 5

β) Να λυθεί η ανίσωση $|4 - 2x| \leq 8$

Μονάδες 6

Θέμα 2

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $D = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$ και $D_x = D_y = 5(\lambda - 3)$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 10

γ) Καθεμία από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες και για ποια τιμή του λ οι ευθείες ταυτίζονται;

Μονάδες 5

Θέμα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Μονάδες 10
- β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του λ το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών. Μονάδες 5
- γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί ο λ , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -4$. Μονάδες 10

Θέμα 4

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

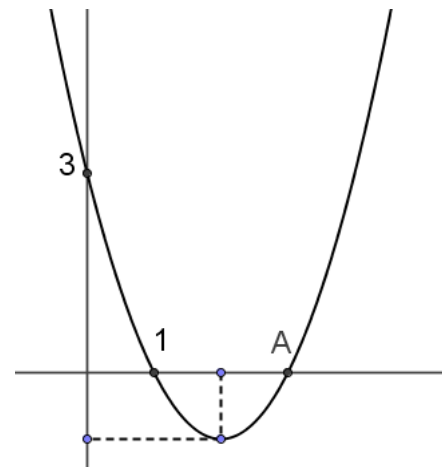
που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,3)$ και τον $x'x$ στο $(1,0)$

- α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$ και $\beta = -4$.

Μονάδες 10

- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της $f(x)$;

Μονάδες 3



- γ) Ποια είναι η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f(x)$; Μονάδες 2
- δ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου A . Μονάδες 5
- ε) Για ποιες τιμές του x το $f(x)$ είναι μικρότερο του $f(-1)$;

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Κόλλιας Σταύρος

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

A.α) Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ονομάζουμε την απόσταση της εικόνας του αριθμού πάνω στο άξονα από την αρχή O και τη συμβολίζουμε με $|\alpha|$. Είναι $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

- β) i.** Είναι λάθος. Το σωστό είναι $|\alpha|^2 = \alpha^2$
ii. Είναι λάθος. Το σωστό είναι $|-2\alpha + 4\beta| = 2|\alpha - 2\beta|$
iii. Είναι λάθος γιατί $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ αφού $2-\sqrt{5} < 0$.

B.α) Είναι $|2x-4|=8 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } 2x-4=8 \\ 2x-4=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } 2x=12 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x=6 \\ x=-2 \end{cases}$.

β) Είναι $|4-2x| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq 4-2x \leq 8 \Leftrightarrow -12 \leq -2x \leq 4 \Leftrightarrow 6 \geq x \geq -2$.

Άρα $x \in [-2, 6]$

Θέμα 2

α) Είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot (\lambda+2) - 5 = \lambda^2 - 2^2 - 5 = \lambda^2 - 9 = (\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 5\lambda - 10 - 5 = 5\lambda - 15 = 5(\lambda-3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (\lambda+2) - 5 \cdot 5 = 5\lambda + 10 - 25 = 5\lambda - 15 = 5(\lambda-3)$$

β) ► Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 3 \text{ και } \lambda \neq -3)$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{5}{\lambda+3} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{5}{\lambda+3}$$

$$\text{Άρα } (x, y) = \left(\frac{5}{\lambda+3}, \frac{5}{\lambda+3} \right)$$

► Αν $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3)$ τότε

- Για $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x + 5y = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 5y$$

οπότε έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (5 - 5\kappa, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

• Για $\lambda = -3$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ 5x - 5y = 25 \end{cases}$

προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $0x + 0y = 30$. Οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν το σύστημα είναι αδύνατο άρα πρέπει $\lambda = -3$ και ταυτίζονται όταν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που συμβαίνει όταν $\lambda = 3$.

Θέμα 3

α) Είναι $\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\lambda^2 - 5) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20 > 0$ άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\lambda^2 - 5}{1} = -\lambda^2 - 5$

γ) Είναι $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = -4$
 $\Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow -\lambda^2 - 5 + \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda = 0$
 $\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1$

Θέμα 4

α) Η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 3)$ άρα
 $f(0) = 3 \Leftrightarrow \gamma = 3$

και διέρχεται και από το $(1, 0)$ άρα

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$$

Οπότε $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

β) Η ελάχιστη τιμή της f είναι $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -1$

γ) Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = \frac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 2$

δ) Το A είναι το ένα από τα δύο σημεία που η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ άρα είναι ρίζα της

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

Άρα $A(3, 0)$.

ε) Είναι $f(x) < f(-1) \Leftrightarrow f(x) < 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-5) < 0. \quad \text{Άρα } x \in (-1,5)$$

x	-1	5
$x^2 - 4x - 5$	$+$	$-$