ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θέμα 1

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας

Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες τότε θα είναι ίσα.

Μονάδες 3

β) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.

Μονάδες 3

γ) Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Μονάδες 3

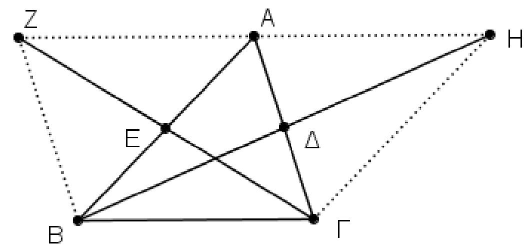
δ) Η μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως. **Μονάδες 3**

ε) Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε γωνία του τριγώνου.

Μονάδες 3

Θέμα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να γράψετε όλα τα τμήματα που είναι ίσα μεταξύ τους. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί τα τετράπλευρα ΑΗΓΒ και ΑΓΒΖ είναι παραλληλόγραμμα.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΖΑ, ΒΓ και ΑΗ είναι ίσα μεταξύ τους.

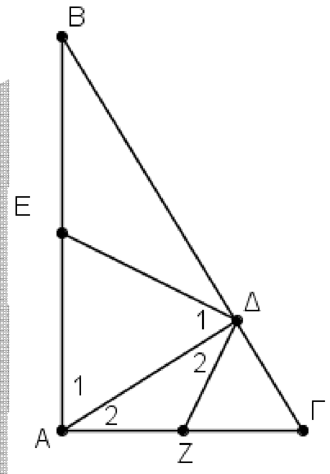
Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

Θέμα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ τότε



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να διαπιστώσετε ότι υπάρχουν τρία ορθογώνια τρίγωνα. Στη συνέχεια να σημειώσετε επάνω στο σχήμα που κατασκευάσατε τα τμήματα που είναι ίσα μεταξύ τους και να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ισοσκελή με ΑΕ = ΔΕ και ΑΖ = ΔΖ αντίστοιχα.
Μονάδες 5

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις γωνίες του ισοσκελούς τρίγωνου ΑΔΕ που είναι ίσες μεταξύ τους καθώς και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΖ που είναι ίσες μεταξύ τους. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $E\widehat{\Delta}Z = \widehat{A} = 90^0$.
Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΓ είναι παράλληλη στην ΕΖ και διπλάσια από αυτή.
Μονάδες 5

δ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΕΖ να δείξετε ότι $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.
Μονάδες 10

Θέμα 4

Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ μη συνευθειακά.

α) Να βρείτε σημείο Σ έτσι ώστε τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΒΓ να είναι ισοσκελή με κορυφή το σημείο Σ και βάσεις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.
Μονάδες 15

β) Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά υπάρχει σημείο Σ έτσι ώστε τα παραπάνω τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΒΓ να είναι ισοσκελή; Διακαιολογήστε την απάντησή σας.
Μονάδες 5

γ) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ αν το τρίγωνα ΣΑΒ του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές και το Σ να είναι το μέσο του ΒΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
Μονάδες 5

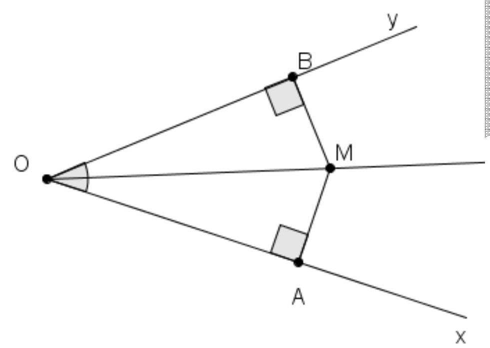
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής Οι Εισηγητές

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Α. Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της οδ. Φέρνουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, γιατί ΟΜ διχοτόμος, επομένως ΜΑ = ΜΒ



Β.α) **Λάθος**. Πρέπει να έχουν ακόμη ίσες την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ή την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά.

β) **Λάθος**. Πρέπει όλες οι γωνίες του να είναι οξείες.

γ) **Λάθος**. Η διάκεντρος είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής.

δ) **Σωστό.**

ε) **Λάθος**. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.

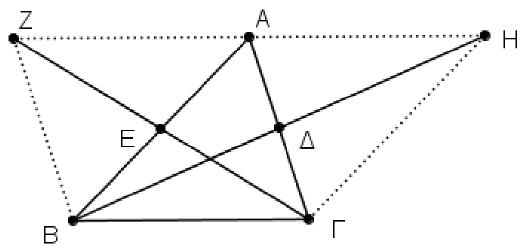
Θέμα 2

Είναι

ΑΕ = ΕΒ, ΓΕ = ΕΖ

ΒΔ = ΔΗ, ΓΔ = ΔΑ

Τα τετράπλευρα ΑΗΓΒ και ΑΓΒΖ είναι παραληλόγραμμα γιατί οι διαγώνιές τους διχοτομούνται.

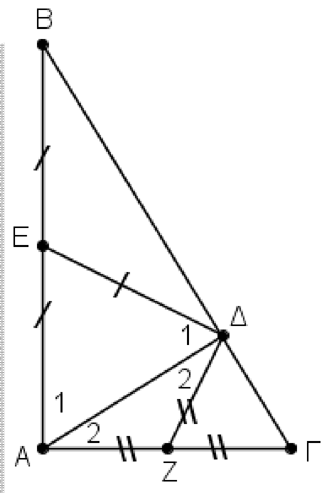


β) Τα τμήματα ΖΑ και ΒΓ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο ΑΓΒΖ και τα τμήματα ΑΗ και ΒΓ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΗΓΒ.

γ) Τα τμήματα ΖΑ και ΑΗ είναι ίσα και παράλληλα, γιατί καθένα από αυτά είναι ίσο και παράλληλο με το ΒΓ, και έχουν κοινό το σημείο Α άρα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (ευκλείδειο αίτημα σελ.76 σχολικού βιβλίου), οπότε τα σημεία Ζ, Α, Η είναι συνευθειακά.

Θέμα 3

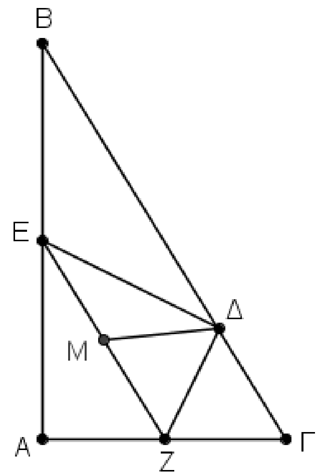
α) Υπάρχουν στο σχήμα τρία ορθογώνια τρίγωνα τα ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$, ΑΒΔ με $B\hat{\Delta}A = 90^0$ και ΑΓΔ με $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $\Delta E = AE = EB = \frac{AB}{2}$ επομένως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $\Delta Z = AZ = Z\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$ επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ (σχ.1) και στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΖ είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2$ (σχ.2). Προσθέτουμε τις σχέσεις 1 και 2 κατά μέλη και έχουμε $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ ή $\hat{\Delta} = \hat{A} = 90^0$.

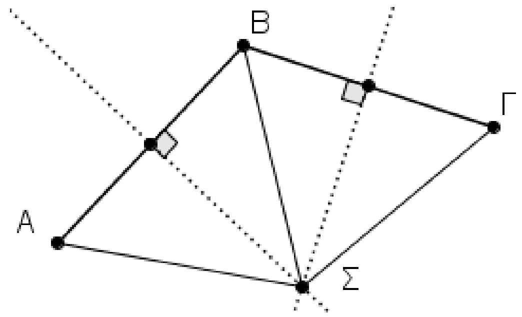
γ) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΖ ενώνει μέσα δύο πλευρών άρα $EZ \parallel B\Gamma$ και $EZ = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2EZ$.

δ) Τα τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο και η ΔΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $\Delta M = \frac{EZ}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.



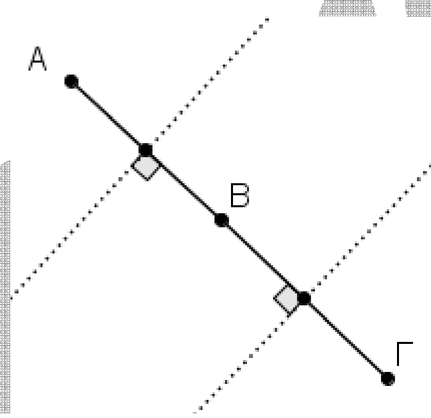
Θέμα 4

α) Αφού το τρίγωνο ΣΑΒ είναι ισοσκελές με κορυφή το Σ και βάση ΑΒ, το σημείο Σ θα ισαπέχει από τα Α και Β άρα θα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ όμοια το τρίγωνο ΣΒΓ είναι ισοσκελές το σημείο Σ θα ισαπέχει από τα Β και Γ επομένως θα ανήκει στη μεσοκάθετο



του ΒΓ (βλέπε πόρισμα ΙΙ σελ. 40 σχολικού βιβλίου). Οπότε το Σ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ.

β) Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά τότε δεν υπάρχει σημείο Σ γιατί οι μεσοκάθετες των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ θα είναι παράλληλες μεταξύ τους ως κάθετες στην ευθεία.



γ) Αν το Σ είναι σημείο το τμήματος ΒΓ τότε ΣΑ = ΣΒ = ΣΓ επομένως η ΣΑ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ και είναι ίση με το μισό της πλευράς ΒΓ που αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^0$.