

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΠΕΡΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

**Θέμα 1**

α) Να αποδείξετε αν  $\alpha > 0$  με  $\alpha \neq 1$ , τότε για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ισχύει:

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

Μονάδες 10

β) Να μεταφέρεται στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να τις συμπληρώσετε:

i.  $\log_5 \dots = 2$

ii.  $\log_{\alpha} 1 = \dots$  με  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

iii.  $\log_{\dots} \alpha^3 = 3$  με  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

iv.  $\alpha^{\log_{\alpha} \dots} = \alpha^2$  με  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

v.  $\log_{\frac{1}{2}} x > -1 \Leftrightarrow x \dots$  με  $x > 0$ .

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 2)x^2 - 3x - 2\beta + 8$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x+1$  είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 5$ .

Μονάδες 15

β) Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση  $P(x)=0$ .

Μονάδες 10

**Θέμα 3**

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο  $\alpha_n = -10 + 2n$  με πρώτο όρο  $\alpha_1$ .

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\alpha_n$  είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο  $\alpha_1 = -8$  και διαφορά  $\omega = 2$ .

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τον  $\alpha_{1008}$ .

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\Sigma = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 \dots + \alpha_{40}$

Μονάδες 5

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### Θέμα 4

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 2\log(x+1) - \alpha$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $x > -1$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(9,1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

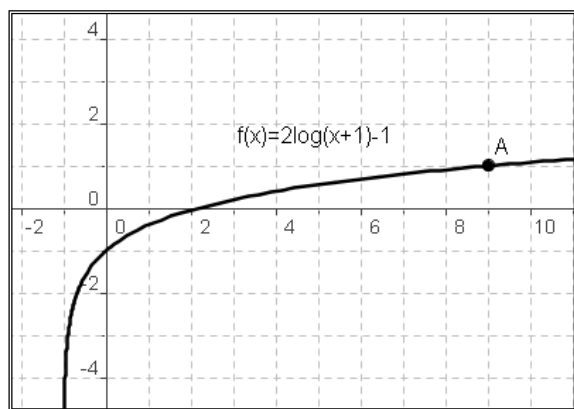
Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα σημεία που τέμνει τους άξονες

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το κοινό σημείο με την ευθεία  $y = \log 4,9$ .

Μονάδες 5



### ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

2. **Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**

3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Καλή επιτυχία

Κόλλιας Σταύρος

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**Θέμα 1**

**α)** Έστω  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$  και  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$  τότε  $\alpha^{x_1} = \theta_1$  και  $\alpha^{x_2} = \theta_2$ .

Είναι  $\theta_1 \cdot \theta_2 = \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$  άρα  $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2 = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

**β)** i.  $\log_5 5^2 = 2$       ii.  $\log_{\alpha} 1 = 0$       iii.  $\log_{\alpha} \alpha^3 = 3$

iv.  $\alpha^{\log_{\alpha} \alpha^2} = \alpha^2$       v.  $\log_{\frac{1}{2}} x > -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x < 2$

**ΘΕΜΑ 2**

**α)** Ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολωνύμου  $P(x)$  άρα

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + (\beta - 2) - 3 - 2\beta + 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -3 \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x+1$  είναι ίσο με 2 άρα

$$P(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^3 + (\beta - 2)(-1)^2 - 3(-1) - 2\beta + 8 = 2 \\ \Leftrightarrow -\alpha - \beta = -7 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7 \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε  $2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$  και με αντικατάσταση στη (2) έχουμε  $\beta = 5$ . Οπότε  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ .

**β)** Ρίζα του  $P(x)$  είναι το 1 άρα με σχήμα Horner έχουμε :

2	3	-3	-2	1
	2	5	2	
2	5	2	0	

Άρα η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x+1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

**Θέμα 3**

**α)** Είναι  $\alpha_{v+1} - \alpha_v = [-10 + 2(v+1)] - (-10 + 2v) = 2$  άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με  $\omega = 2$  και  $\alpha_1 = -10 + 2 \cdot 1 = -8$ .

**β)** Είναι  $\alpha_{1008} = \alpha_1 + 1007\omega = -8 + 1007 \cdot 2 = 2006$

**γ)** Το άθροισμα  $\Sigma = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 \dots + \alpha_{40}$  είναι άθροισμα 20 όρων αριθμητικής προόδου με  $\beta_1 = \alpha_2 = -6$  και  $\omega' = 4$  άρα  $\Sigma = [2\beta_1 + (20-1)\omega'] = -12 + 19 \cdot 4 = 64$ .

**Θέμα 4**

**α)** Διέρχεται από το σημείο  $A(9,1)$  άρα

$$f(9) = 1 \Leftrightarrow 2\log(10) - \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

οπότε  $f(x) = 2\log(x+1) - 1$

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Είναι  $f(0) = 2\log 1 - 1 = -1$  άρα τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $(0, -1)$

$$\text{και } 0 = 2\log(x+1) - 1 \Leftrightarrow 2\log(x+1) = 1 \Leftrightarrow \log(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \sqrt{10} - 1$$

Άρα τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο  $(\sqrt{10} - 1, 0)$ .

γ) Είναι

$$f(x) = \log 4,9 \Leftrightarrow 2 \cdot \log(x+1) - 1 = \log 4,9 \Leftrightarrow \log(x+1)^2 - \log 4,9 = 1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{(x+1)^2}{4,9} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4,9} = 10 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=7 \\ x+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-8 \end{cases}$$

Όμως  $x > -1$  άρα η ρίζα  $x = -8$  απορρίπτεται οπότε κοινό σημείο είναι το  $(6, \log 4.9)$