ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1

Α.α) Αν α πραγματικός αριθμός με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, τότε να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς θ_1, θ_2 ισχύει

$$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

Μονάδες 12

β) Ο αριθμός κ είναι πραγματικός και οι αριθμοί α, θ είναι θετικοί πραγματικοί με $\alpha \neq 1$. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας της παρακάτω σχέσεις και να τις συμπληρώσετε:

i. $\log_\alpha \alpha = ...$

Μονάδες 2

ii. $\log_\alpha 1 = ...$

Μονάδες 2

iii. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = ...$

Μονάδες 2

iv. $\log_\alpha \alpha^\kappa = ...$

Μονάδες 2

Β. Να λυθεί η εξίσωση $3^{4x} = 9^{x+1}$

Μονάδες 5

Θέμα 2

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 6$, όπου α είναι πραγματικός αριθμός, έχει ρίζα το 1.

α) Να υπολογίσετε το α.

Μονάδες 10

β) Για $\alpha = 11$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 10

γ) Για $\alpha = 11$ να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $P(2{,}007)$

Μονάδες 5

Θέμα 3

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1, 5, 8, 11, ...$

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της προόδου και τον πρώτο όρο α_1.

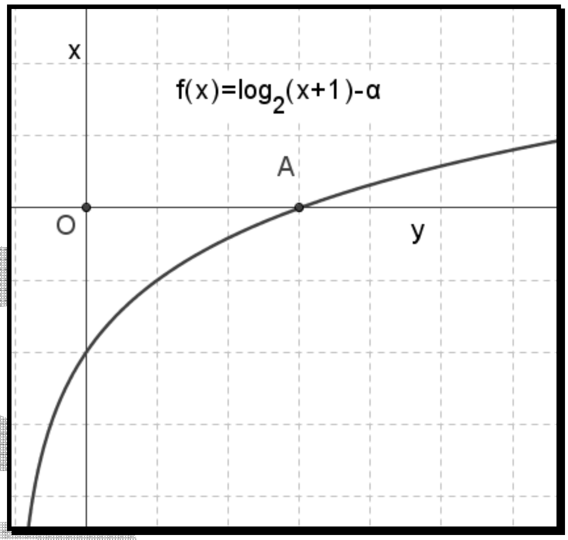
Μονάδες 10

β) Να βρεθεί ο πεντηκοστός (α_{50}) όρος της προόδου. Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_{11} + \alpha_{12} + ... + \alpha_{30}$ Μονάδες 5

Θέμα 4

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_2(x+1) - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x > -1$, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$.



α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α.

Μονάδες 10

β) Για $\alpha = 2$, να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) - f(x-1) = f(7)$

Μονάδες 10

γ) Για $\alpha = 2$ να βρεθεί η τιμή του κ ώστε, το σημείο $P\left(-\frac{1}{2}, \kappa\right)$ να είναι πάνω στην γραφική παράσταση της f. Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής Οι Εισηγητές

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Α.α) Έστω ότι είναι

$$\log_\alpha \theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$$

Οπότε $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

β) i. $\log_\alpha \alpha = 1$ ii. $\log_\alpha 1 = 0$

iii. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ iv. $\log_\alpha \alpha^\kappa = \kappa$

Β. Είναι $3^{4x} = 9^{x+1} \Leftrightarrow 3^{4x} = (3^2)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{4x} = 3^{2x+2}$

$$\Leftrightarrow 4x = 2x + 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Θέμα 2

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 6$, όπου α είναι πραγματικός αριθμός, έχει ρίζα το 1.

α) Το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου άρα

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 6 \cdot 1^2 + \alpha \cdot 1 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -11 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 11$$

β) Για $\alpha = 11$ είναι $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horne για το $P(x)$ με $\rho = 1$ και έχουμε:

1	−6	11	−6	1
	1	−5	6	
1	−5	6	0	

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5x + 6 = 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

γ) Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων του πολυωνύμου P(x)
Είναι

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Το 2,007 είναι αριθμός του διαστήματος $(2,3)$ άρα $P(2,007)<0$.

Θέμα 3

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1, 5, 8, 11, \ldots$

α) Είναι $\omega = 8-5=3$ και $\alpha_1 = \alpha_2 - \omega = 5-3=2$

β) Είναι $\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\cdot\omega = 2+49\cdot 3 = 149$.

γ) Είναι

$$S = \alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{30} = S_{30}-S_{10} = (2\alpha_1+29\omega)\cdot\frac{30}{2} - (2\alpha_1+9\omega)\cdot\frac{10}{2}$$

$$= (2\cdot 2+29\cdot 3)\cdot 15 - (2\cdot 2+9\cdot 3)\cdot 5 = 91\cdot 15 - 31\cdot 5 = 1210$$

Θέμα 4

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3,0) άρα

$$f(3)=0 \Leftrightarrow \log_2(3+1)-\alpha=0 \Leftrightarrow \log_2 4-\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow 2-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2$$

β) Είναι $f(x^2) = \log_2(x^2+1)-2$,

$$f(x-1) = \log_2(x-1+1)-2 = \log_2 x - 2 \text{ και}$$

$$f(7) = \log_2(7+1)-2 = \log_2 8 - 2 = \log_2 2^3 - 2 = 3-2 = 1.$$

Άρα

$$f(x^2)-f(x-1)=f(7) \Leftrightarrow \log_2(x^2+1)-\log_2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2+1}{x} = 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{x^2+1}{x} = \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2+1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$$

γ) Για να είναι το σημείο $P\left(-\frac{1}{2},\kappa\right)$ πάνω στην γραφική παράσταση της f πρέπει $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\kappa \Leftrightarrow \log_2(-\frac{1}{2}+1)-2=\kappa \Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2}-2=\kappa$.

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-1}-2=\kappa \Leftrightarrow -1-2=\kappa \Leftrightarrow \kappa=-3$$