ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α.α) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Μονάδες 2

β) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τότε $\dfrac{\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2 \cdot |\vec{\alpha}|} = \dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$

Μονάδες 2

γ) Είναι $\vec{i} \cdot \left(\vec{i} - 2\vec{j}\right) = 1$ όπου $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Μονάδες 2

δ) Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου τότε $\left|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

Μονάδες 2

Θέμα 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι μη μηδενικά.

Μονάδες 6

Αν ισχύει ακόμα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ τότε

β) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 7

Θέμα 3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x - 3y - 24 = 0$.

α) Να δείξετε ότι είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα σημεία Α και Β που η ε_2 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 5

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το $M(3\lambda, 4\lambda - 3)$ είναι σημείο της ε_1

Μονάδες 5

ε) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ είναι ανεξάρτητο του λ.

Μονάδες 5

Θέμα 4

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x+3)^2 + y^2 = 81$ και $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$.

α) Να δείξετε ότι ο C_2 είναι εσωτερικός του C_1.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C που εφάπτονται στον C_1 εσωτερικά και στον C_2 εξωτερικά ανήκουν σε έλλειψη με εστίες τα κέντρα K_1, K_2 των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ποια είναι η εξίσωση της έλλειψης

Μονάδες 15

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής Οι Εισηγητές

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

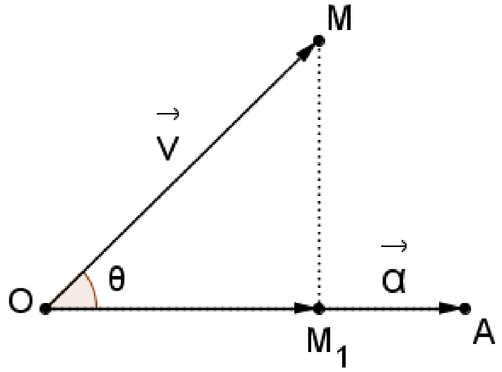
Θέμα 1

Α.α) Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

β)

Με αρχή το Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου τότε

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot\vec{v}&=\vec{\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM_1}\right)\\&=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}\\&=0+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}\end{aligned}$$



Β. α) Λάθος. Το σωστό είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{\alpha}=\vec{0}\ \ \alpha\pi o\rho.\\\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}\\\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}-\vec{\gamma}\end{cases}$$

β) Λάθος. Το σωστό είναι $\dfrac{\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2\cdot|\vec{\alpha}|}=\dfrac{|\vec{\alpha}|^2\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2\cdot|\vec{\alpha}|}=\dfrac{|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|^2}\cdot\vec{\beta}$

γ) Σωστό. Είναι $\vec{i}\cdot\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)=\vec{i}^2-2\vec{i}\cdot\vec{j}=\left|\vec{i}\right|^2-0=1$.

δ) Λάθος. Το σωστό είναι $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| = \left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\phi\right| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\phi|$

Μονάδες 2

Θέμα 2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Αν $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ άτοπο γιατί διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του δεν είναι παράλληλα αφού $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

β) Είναι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = 1\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

Και

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2$$

$$= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 2\cdot 1^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\cdot 1^2 = -3$$

γ) Είναι $|\vec{u}|^2 = \left|2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right|^2 = \left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2$

$$= 4\cdot 1^2 + 16\left(-\frac{1}{2}\right) + 16\cdot 1^2 = 12.$$

Άρα $|\vec{u}| = \sqrt{12}$.

Και $|\vec{v}|^2 = \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$.

Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

δ) Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ άρα $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Θέμα 3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x - 3y - 24 = 0$.

α) Είναι $\lambda_1 = \frac{4}{3} = \lambda_2$ άρα οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

β) Για $x = 0$ η εξίσωση της ε_2 δίνει $y = -8$ και για $y = 0$ δίνει $x = 6$. Άρα $A(6,0)$ και $B(0,-8)$.

γ) Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_1)=\dfrac{|4\cdot 6-3\cdot 0-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

δ) Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_1 αφού

$$4\cdot 3\lambda-3(4\lambda-3)-9=12\lambda-12\lambda+9-9=0$$

Άρα Μ σημείο της ε_1.

ε) Είναι

$$(AMB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3\lambda-6 & 4\lambda-3\\ -6 & -8\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3\lambda-6 & 4\lambda-3\\ -6 & -8\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-8(3\lambda-6)-(-6)(4\lambda-3)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-24\lambda+48+24\lambda-18\right|=15 \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 4

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+6x+y^2=72$ και $C_2:(x-3)^2+y^2=1$.

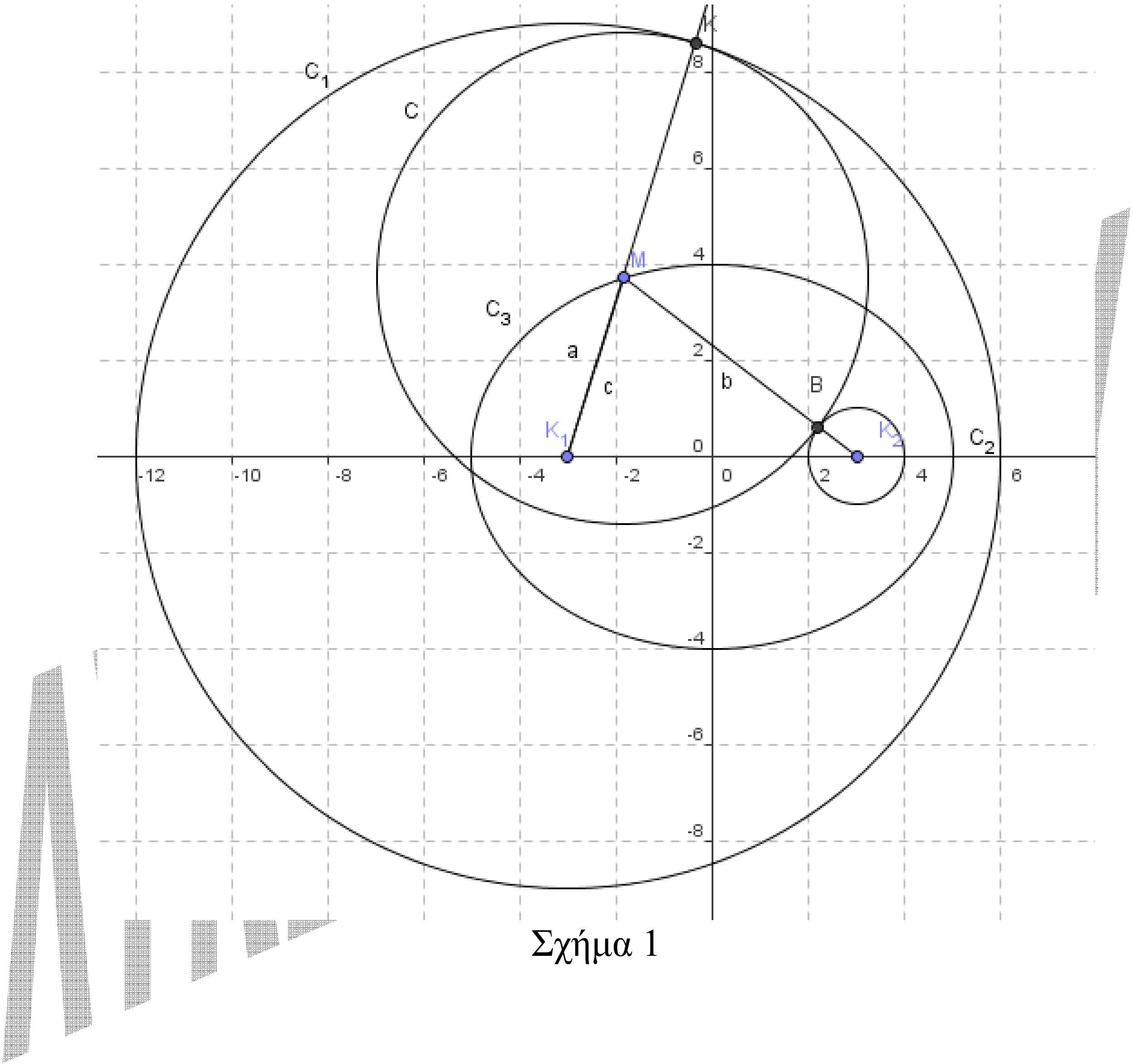
α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το $K_1(-3,0)$ και ακτίνα $\rho_1=9$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$. Είναι $(K_1K_2)=6<8=\rho_1-\rho_2$ άρα ο C_2 είναι εσωτερικός του C_1.

γ) Αν Μ κέντρο του κύκλου που C που εφάπτεται στον C_1 εσωτερικά και στον C_2 εξωτερικά τότε (σχήμα 1)

$$MK_1+MK_2=MK_1+MB+BK_2=MK_1+MK+BK_2$$
$$=MK+BK_2=\rho_1+\rho_2=9+1=10$$

Άρα Μ σημείο έλλειψης με εστίες τα σημεία $K_1(-3,0),K_2(3,0)$ και μεγάλο άξονα $2\alpha=10$. Άρα $\alpha=5,\gamma=3$ και $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=4$ οπότε η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Σχήμα 1