ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^{x} = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i} \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ =1.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\left(z_1\right)^{2\nu} = \left(-z_2\right)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ και $\Gamma\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε $x \in [0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \qquad x \in [0,1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \qquad x \in [0,1]$$

α. Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Είναι

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = \left(|z_1| \cdot |z_2|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)\left(\overline{z_1 \cdot z_2}\right) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2) = (z_1 \cdot \overline{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \overline{z}_2)$$

Και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Α.2 Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και

για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Α.3 Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Β. **α.** Λάθος. Η σωστή πρόταση είναι: αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \geq 0$.

β. Λάθος. Π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R και $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

γ. Λάθος. Για να είναι η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 πρέπει η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ και όχι στο x_0.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z| = 1$. Είναι

$$|z| = \left|\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}} = 1$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ =1.

β. Είναι

$$z_1 = \frac{2+0i}{0+2i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \text{ και}$$

$$z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$$

i. Η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι

$$|z_1 - z_2| = |1-(-i)| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

ii. Είναι:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu} \Leftrightarrow (-i)^{2\nu} = (-1)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow (i^2)^{\nu} = (-1)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{\nu} = (-1)^{\nu}$$

Και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πολυωνυμική. με $f'(x) = 3x^2 - 3$ και η f' είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πολυωνυμική με $f''(x) = 6x$.

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty]$. Για $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta$$

και για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta.$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ άρα ο πίνακας μεταβολών της f'' είναι:

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+	
$f(x)$				

Οπότε η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,0\right]$ και κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$.
Σημείο καμπής είναι το $\Gamma\left(0,f\left(0\right)\right)$ με $f\left(0\right)=-2\eta\mu\theta^2$.

β. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty,$$

$f\left(-1\right)=2-2\eta\mu^2\theta>0$ και $f\left(1\right)=-2-2\eta\mu^2\theta<0$ γιατί $\theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα $\eta\mu\theta\neq\pm1$ οπότε $-1<\eta\mu\theta<1$ και $0\leq\eta\mu^2\theta<1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\infty,-1\right]$ και έχει σύνολο τιμών το

$$f\left(A_1\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right),f\left(-1\right)\right]=\left(-\infty,2-2\eta\mu^2\theta\right]$$

Το $0\in f\left(A_1\right)$ άρα η f έχει ρίζα στο $\left(-\infty,-1\right)$ γιατί $f\left(-1\right)\neq0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[-1,1\right]$ και έχει σύνολο τιμών το

$$f\left(A_2\right)=\left[f\left(1\right),f\left(-1\right)\right]=\left[-2-2\eta\mu^2\theta,2-2\eta\mu^2\theta\right]$$

Το $0\in f\left(A_2\right)$ άρα η f έχει ρίζα στο $\left(-1,1\right)$ γιατί $f\left(-1\right)\neq0$ και $f\left(1\right)\neq0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_3=\left[1,+\infty\right)$ και έχει σύνολο τιμών το

$$f\left(A_3\right)=\left[f\left(1\right),\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)\right)=\left[2-2\eta\mu^2\theta,+\infty\right)$$

Το $0\in f\left(A_3\right)$ άρα η f έχει ρίζα στο $\left(1,+\infty\right)$ γιατί $f\left(1\right)\neq0$.

Επομένως η f έχει τρείς ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\mathrm{A}\left(-1,2-2\eta\mu^2\theta\right)$, $\mathrm{B}\left(1,-2-2\eta\mu^2\theta\right)$ και $\Gamma\left(0,-2\eta\mu^2\theta\right)$.

Για $x=-1$ είναι

$$y=-2(-1)-2\eta\mu^2\theta=2-2\eta\mu^2\theta=f(-1)$$

άρα το Α είναι σημείο της ευθείας

Για $x=1$ είναι $y=-2\cdot1-2\eta\mu^2\theta=-2-2\eta\mu^2\theta=f(1)$ άρα το Β είναι σημείο της ευθείας

Για $x=0$ είναι $y=-2\cdot0-2\eta\mu^2\theta=-2\eta\mu^2\theta=f(0)$ άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας

δ. Αν θέσουμε $g(x)=-2x-2\eta\mu^2\theta$ τότε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g θα πρέπει να βρούμε της τετμημένες των σημείων τομής τους.

Είναι

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\Leftrightarrow x^3-3x-2\eta\mu^2\theta=-2x-2\eta\mu^2\theta \\ &\Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left|x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta\right|dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx \end{aligned}$$

Το πρόσημο της $f(x)-g(x)$ φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		$+1$	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Οπότε

$$E=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^3+x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$=\left(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα με $f(0)>0$ άρα για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$ είναι $t\geq 0\Leftrightarrow f(t)\geq f(0)>0$

και $g(t)>0$ άρα $f(t)g(t)>0$ οπότε $\int_0^x f(t)g(t)dt>0$

β. Είναι ισοδύναμα

$$f(x)\cdot G(x)>F(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt>\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x f(x)g(t)dt>\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x f(x)g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt>0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x\left[f(x)g(t)-f(t)g(t)\right]dt>0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x\left[f(x)-f(t)\right]g(t)dt>0\ (1)$$

Για κάθε $t\in[0,x]\subseteq[0,1]$ είναι

$$f(x)\geq f(t)\Leftrightarrow f(x)-f(t)\geq 0$$

και $g(t)>0$ άρα $\left[f(x)-f(t)\right]g(t)\geq 0$

Η συνάρτηση $K(t)=\left[f(x)-f(t)\right]g(t)$ δεν είναι σταθερή στο $[0,x]$ οπότε $\int_0^x \left[f(x)-f(t)\right]g(t)dt>0$

Δηλαδή η σχέση (1) ισχύει άρα $f(x)\cdot G(x)>F(x)$.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα (0, 1]. Είναι

$$h'(x)=\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'=\frac{F'(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot G'(x)}{\left(G(x)\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot g(x)}{\left(G(x)\right)^2}$$

$$=\frac{g(x)\cdot\left[f(x)\cdot G(x)-F(x)\right]}{\left(G(x)\right)^2}>0$$

για κάθε $x\in(0,1)$ γιατί $g(x)>0$ από δεδομένα, $f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ από ερώτημα (β) και $\left(G(x)\right)^2>0$. Η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] οπότε $h(x)\le h(1)\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε $x\in(0,1]$.

δ. Οι συναρτήσεις F(x) και G(x) είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες με

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)=0,\qquad \lim_{x\to0^+}G(x)=G(0)=0$$

$$F'(x)=\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'=f(x)g(x) \text{ και}$$

$$G'(x)=\left(\int_0^x g(t)dt\right)'=g(x)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{G(x)}\overset{\left(\text{μορφή}\ \frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

γιατί f συνεχής στο 0.

Και $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\overset{\left(\text{μορφή}\ \frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)'}{\left(x^5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4\cdot 2x}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot 2x\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 1\cdot 2\cdot 0=0$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}$$

$$=f(0)\cdot 0=0.$$