Κεφάλαιο 1

Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

1.1 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{x \in \mathbb{N}^*/x \leq 10\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α $= \{x \in \Omega/x$ πρώτος αριθμός$\}$ και Β $= \{x \in \Omega/x$ άρτιος αριθμός$\}$. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
α) Πραγματοποιείται το Α, πραγματοποιείται το Β.
β) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα δύο ενδεχόμενα.
γ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β.
δ) Πραγματοποιείται μόνο το Α.

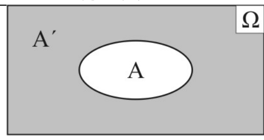
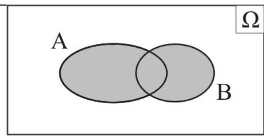
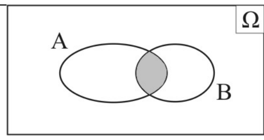
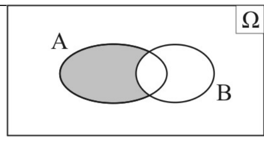
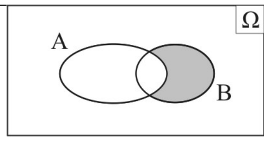
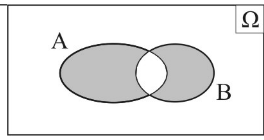
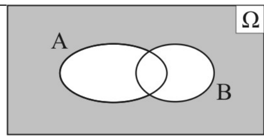
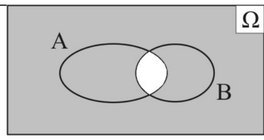
1.2 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{(x, y), x, y \in \mathbb{N}/x + y = 6\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α $= \{(x, y) \in \Omega/x, y$ περιττός αριθμός$\}$ και Β $= \{(x, y) \in \Omega/x = y\}$. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
α) Πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα.
β) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον ενδεχόμενο.
γ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β.
δ) Πραγματοποιείται μόνο το Β.

1.3 Ρίχνουμε ένα νόμισμα, που έχει στις όψεις του «Κεφαλή» και «Γράμματα» και ένα ζάρι. Να βρείτε
α) Το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Το ενδεχόμενο Α : Η ένδειξη του ζαριού να είναι 5.
γ) Το ενδεχόμενο Β : Η ένδειξη του νομίσματος να είναι «Γράμματα».

1.4 Έχουμε τρεις καρτέλες που σε κάθε μια από αυτές είναι γραμμένο ένα από τα ψηφία $1,\ 2,\ 3$. Αν τοποθετήσουμε τις καρτέλες σε μια σειρά, σχηματίζουμε έναν τριψήφιο αριθμό. Να βρείτε:
α) Το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Το ενδεχόμενο Α : Ο αριθμός να είναι άρτιος.
γ) Το ενδεχόμενο Β : Ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
δ) Το ενδεχόμενο Γ : Ο αριθμός να διαιρείται με το 6.

1.5 Δύο ομάδες βόλεϋ πρόκειται να παίξουν ένα παιγνίδι. Νικήτρια θα είναι αυτή που θα κάνει τρεις νίκες. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει η πρώτη ομάδα και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει η δεύτερη ομάδα, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
Ποιο είναι το ενδεχόμενο να έχουμε το μικρότερο αριθμό γύρων;

1.1.1 Πράξεις με ενδεχόμενα

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Επεξήγηση	Διάγραμμα Venn
A'	όχι A	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A	
$A \cup B$	A ή B	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	
$A \cap B$	A και B	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B	
$A - B = A \cap B'$	Διαφορά του B από το A	Το $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	
$B - A = B \cap A'$	Διαφορά του A από το B	Το $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A	
$(A - B) \cup (B - A)$	Διαφορά του B από το A ή διαφορά του A από το B	Το $(A-B)\cup(B-A)$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	όχι A ή B	Το $(A \cup B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A , B	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	όχι A και B	Το $(A \cap B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	

1.2 Η έννοια της πιθανότητας

1.6 Σε ένα παιγνίδι μετέχουν δύο παίκτες και συμφωνούν να παίξουν τρία παιγνίδια. Σε κάθε παιγνίδι έχουμε νίκη ενός από τους δύο παίκτες.
α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Ποια είναι η πιθανότητα και στα τρία παιγνίδια να έχουμε τον ίδιο νικητή;

1.7 Ένας τροχός τύχης έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Στους τρεις από αυτούς έχει την ένδειξη «Χάνεις». Στους άλλους τρεις υπάρχει η ένδειξη κέρδος $1€, 2€, 5€$ αντίστοιχα. Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2€. Αν στο δείκτη σταματήσει η ένδειξη «Χάνεις» τότε ο παίκτης δεν εισπράττει τίποτα, διαφορετικά εισπράττει το ποσό που αναγράφεται στην ένδειξη. Αν ένας παίκτης παίξει 150 φορές, να βρεθεί
α) Πόσες φορές αναμένεται να εισπράξει 5€.
β) Τι ποσό αναμένεται να κερδίσει ή να χάσει συνολικά.
Απ. α)25 β)Να χάσει 100€

1.8 Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{8}{15}, P(B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
$A \cup B, A', B', A' \cap B', A' \cup B', A \cap B', A' \cap B, (A - B) \cup (B - A), A \cup B', A' \cap B$

Απ. $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$

1.9 Θεωρούμε ένα ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω για το οποίο ισχύει η σχέση: $[P(A)]^2 + [P'(A)]^2 = 1$. Να αποδείξετε ότι το A είναι το αδύνατο ή το βέβαιο ενδεχόμενο.

1.10 Ένα Γυμνάσιο έχει 24 εκπαιδευτικούς από τους οποίους οι 14 είναι καθηγήτριες. Οι Μαθηματικοί είναι 4, από τους οποίους 3 είναι καθηγητές και μια καθηγήτρια. Αν επιλέξουμε έναν εκπαιδευτικό, να βρείτε την πιθανότητα να είναι καθηγητής ή Μαθηματικός.

Απ. $\frac{11}{24}$

1.11 Ρίχνουμε δύο ζάρια που έχουν σχήμα κανονικού τετραέδρου και σε κάθε μια από τις τέσσερις έδρες τους έχει γραφεί ένας από τους αριθμούς $1,\ 2,\ 3,\ 4$. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
α) Οι ενδείξεις και των δύο ζαριών να είναι ίδιες.
β) Η ένδειξη του πρώτου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από αυτή του δεύτερου.
γ) Το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι 5.

1.12 Σε μια πόλη κυκλοφορούν δύο περιοδικά, το ΑΛΦΑ και το ΒΗΤΑ. Το 25% των κατοίκων έχει διαπιστωθεί ότι διαβάζει το ΑΛΦΑ, το 85% δεν διαβάζει το ΒΗΤΑ, ενώ το 38% των κατοίκων διαβάζει ένα τουλάχιστον από τα δύο περιοδικά.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:
α) Ένας κάτοικος να διαβάζει και τα δύο περιοδικά.
β) Ένας κάτοικος να μην διαβάζει κανένα περιοδικό. Απ. α)2% β)62%

1.13 Έχει διαπιστωθεί ότι το 68% των ατόμων που εργάζονται σε μία επιχείρηση γνωρίζει Αγγλικά, το 16% γνωρίζει Γερμανικά, ενώ το 26% δεν γνωρίζει καμμιά από τις δύο γλώσσες. Να βρείτε την πιθανότητα ένα άτομο να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες.

Απ. 10%

1.14 Ένα παλιό αυτοκίνητο χαλάει 65% από βλάβη μηχανής, 20% από αμέλεια οδηγού και 5% Από βλάβη μηχανής και αμέλεια οδηγού. Επίσης χαλάει και από άλλες αιτίες. Ποιά είναι η πιθανότητα να χαλάσει το αυτοκίνητο μόνο από βλάβη μηχανής ή μόνο από αμέλεια οδηγού;

Απ. 75%

1.15 Ο ποιοτικός έλεγχος σε ένα μηχάνημα που παράγεται από μια βιομηχανία έδειξε ότι: Η πιθανότητα να μην λειτουργεί είναι 4%. Η πιθανότητα να έχει άλλο ελάττωμα είναι 6%. Η πιθανότητα να μην λειτουργεί και να έχει άλλο ελάττωμα είναι 2%.
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρεθεί η πιθανότητα:
i) Να μην λειτουργεί ή να έχει άλλο ελάττωμα.
ii) Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει άλλο ελάττωμα μόνο.

Απ. i)8% ii)6%

1.16 Μια ομάδα έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει το πρωτάθλημα, 35% να κερδίσει το κύπελο και 77% να κερδίσει έναν τουλάχιστον τίτλο. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
i) Να κερδίσει και τους δύο τίτλους.
ii) Να μην κερδίσει κανέναν τίτλο.
iii) Να κερδίσει μόνο το πρωτάθλημα.

Απ. i)8% ii)23% iii)42%

1.17 Η πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία, να είναι αριστερόχειρας είναι $\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να είναι αριστερόχειρας και να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{12}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) Να είναι αριστερόχειρας ή να φοράει γυαλιά.
β) Να είναι αριστερόχειρας αλλά να μην φοράει γυαλιά.
γ) Να είναι δεξιόχειρας και να μην φοράει γυαλιά.
δ) Να είναι δεξιόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

Απ. α)$\frac{1}{2}$ β)$\frac{1}{6}$ γ)$\frac{1}{2}$ δ)$\frac{5}{6}$

1.18 Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{3}{4}$, $P(B) = \dfrac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι:
α) $P(A \cup B) \geq 0,75$ **β)** $\dfrac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{3}{8}$.

1.19 Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.
β) Να αποδείξετε ότι: $P(A' \cap B) \leq \dfrac{1}{3}$.
γ) Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4} \leq P(B) \leq \dfrac{3}{4}$.

1.20 Σε δυο κουτιά έχουμε τοποθετήσει ν άσπρες και ν κόκκινες καρτέλες, αριθμημένες από ένα μέχρι ν. Επιλέγουμε τυχαία μια άσπρη και μια κόκκινη καρτέλα.
α) Να βρείτε την πιθανότητα οι δύο καρτέλες να έχουν τον ίδιο αριθμό.
β) Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου: «Η άσπρη καρτέλα έχει μεγαλύτερο αριθμό από αυτόν της κόκκινης», είναι $\dfrac{29}{60}$, να βρείτε το ν.

1.21 Σε μια κωδικοποίηση σχηματίζουμε τετράδες από 0 και 1. Επιλέγουμε τυχαία μια τέτοια τετράδα. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:
α) Η τετράδα να έχει τρια τουλάχιστον 0.
β) Η τετράδα να έχει ίσο αριθμό 0 και 1.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

2.1 Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha + \dfrac{1}{\beta} = 10$ και $\beta + \dfrac{1}{\alpha} = 2$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha\beta + \dfrac{1}{\alpha\beta}$.

2.2 Αν $x - y = -2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = 6(a-x) - 2[4–9(y–a)] - [3x - 2(6a–7y)] + 5y$.

2.3 Αν $x + y = -1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\Pi = x(x-5) + y(y-5) + 2(xy-2)$.

2.4 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 123456^2 - 2 \cdot 123455^2 + 123454^2$.

2.5 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω αν δίνεται ότι $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{\omega}{3}$ και $x + y + \omega = 1800$.

2.6 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{5\alpha - 9\gamma}{5\beta - 9\delta}$ με $\beta\delta(5\beta - 9\delta) \neq 0$

ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\kappa\alpha + \lambda\gamma}{\kappa\beta + \lambda\delta}$ με $\beta\delta(\kappa\beta + \lambda\delta) \neq 0$

2.7 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

2.8 Να δείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός αριθμός.

2.9 Να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών
i) είναι περιττός αριθμός **ii)** όταν διαιρεθεί με το 4, δίνει υπόλοιπο 1.

2.10 Να αποδείξετε ότι: $(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (x-y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2)$.

2.11 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$.

2.12 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^3 - \alpha^3 + (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$.

2.13 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$.

2.14 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) = (\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$.

2.15 Σε ένα ορθογώνιο η περίμετρός του είναι $34cm$ και το εμβαδόν του είναι $60cm^2$. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

2.16 Αν $x+y=2$ και $xy=-1$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\ , \quad B = x^2+y^2\ , \quad \varGamma = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\ , \quad \varDelta = x^3+y^3\ , \quad E = x^4+y^4,\ K = |x-y|$$

2.17 Δίνεται η παράσταση $\Pi = \dfrac{3x^2 - 12}{(5x-9)^2 - (2x-3)^2}$.
α) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.
β) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

2.18 Αφού βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται τα επόμενα κλάσματα, μετά να τα απλοποιήσετε
α) $A = \dfrac{25(2x-1)^2 - (6x-1)^2}{4(2x^2-4x+2)}$ **β)** $B = \dfrac{(x-3)(2x-5)^2 - 16(x-3)}{(2x+9)(6-x) + 4x^2 - 81}$

2.19 Να εξηγήσετε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι λανθασμένες.
α) Το άθροισμα δύο οποιονδήποτε άρρητων αριθμών, είναι άρρητος.
β) Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί μεταξύ τους τότε $\alpha^\beta \neq \beta^\alpha$.
γ) Η τιμή της παράστασης $\nu^2 - \nu + 41$, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν, είναι πρώτος αριθμός.

2.20 α) Ταυτότητα Euler. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]\end{aligned}$$

β) Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \iff \alpha = \beta = \gamma \quad \text{ή} \quad \alpha+\beta+\gamma = 0$$

2.21 Ταυτότητα De Moivre. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2 = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

2.22 Ταυτότητα Newton. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

Εξετάστε τις περιπτώσεις όπου το πρώτο μέλος έχει δύο, τέσσερα ή περισσότερα πρωτοβάθμια πολυώνυμα του x. Μετά προσπαθήστε να εικάσετε τη γενική περίπτωση.

2.23 i) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $(x-1)^3 + (x-3)^3 + (x-7)^3 + (11-3x)^3 = 0$
[Απ. 2 , 4 , 5]

2.24 Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=0$.

2.25 Οι αριθμοί α, β είναι μη μηδενικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

2.26 α) Να αποδείξετε ότι $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4 = (\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$.
Σύμφωνα με το προηγούμενο να διατυπώσετε μία πρόταση.

γ) Να εξηγήσετε ότι ο επόμενος ακέραιος του $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103$ ισούται με το τετράγωνο ενός ακέραιου.

2.27 Να αναλύσετε τον ακέραιο $3^{14}+3^{13}-12$, σε γινόμενο από πρώτους παράγοντες.
Απ. $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$

2.28 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει: $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{\omega}{\gamma}$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^6+y^6+\omega^6}{\alpha^6+\beta^6+\gamma^6} = \left(\dfrac{x^2+y^2+\omega^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)^3$.

2.29 Αν $\alpha+\beta=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=2(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)$.

2.30 Αν $x-y=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B=2(x^3-y^3)-3(x^2+y^2)$.

2.31 Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$ και $\alpha\beta\gamma=-1$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ ,\quad B=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\ ,\quad \mathit{\Gamma}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ ,\quad \mathit{\Delta}=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

2.32 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$

2.33 Να αποδείξετε ότι: $(2x-y-\omega)^3+(2y-\omega-x)^3+(2\omega-x-y)^3=3(2x-y-\omega)(2y-\omega-x)(2\omega-x-y)$.

2.34 Αν $3x=\alpha+\beta+\gamma$ τότε αποδείξτε ότι: $(x-\alpha)^3+(x-\beta)^3+(x-\gamma)^3=3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

2.35 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε αποδείξτε ότι:
α) $(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3=3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.
β) $(\kappa\alpha+\lambda\beta)^3+(\kappa\beta+\lambda\gamma)^3+(\kappa\gamma+\lambda\alpha)^3=3(\kappa\alpha+\lambda\beta)(\kappa\beta+\lambda\gamma)(\kappa\gamma+\lambda\alpha)$.

2.36 Αν $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=3$, τότε να δείξετε ότι $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=0$.

2.37 Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$

2.38 Οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι και επαληθεύουν την ισότητα: $\dfrac{\alpha+\beta+2}{4}=\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$. Να υπολογίσετε τα α,β.

2.39 Να αποδείξετε ότι: **α)** Ο 15 διαιρεί τον $2^{44}-1$. **β)** Ο 8 διαιρεί τον $3^{2\nu}-1$, $\nu\geq 1$.
γ) Ο $(a-1)^2$ διαιρεί τον $a^{\nu+1}-a^{\nu}-a+1$, $a,\nu\in\mathbb{N}$.

2.40 Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}}+\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha\beta}}-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}}=(\alpha+\beta)^2.$$

2.41 Έστω α,β,γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\mathit{\Gamma}$, για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta}=0$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2.42 Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύουν οι ισότητες: $\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$.
Να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=1$.

2.43 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$$

2.44 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=0$

2.45 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=3$

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

2.46 Αν $x > 1$ τότε να αποδείξετε ότι: i) $x^2 > x$ ii) $x^3 + x > x^2 + 1$

2.47 Αν $x > 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $x^3 > 2x^2 - x + 2$

2.48 Αν $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + 2\alpha > 2\beta + \alpha\beta$.

2.49 Αν $x > y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha = x^3 - y^3$ και $\beta = (x - y)^3$.

2.50 Αν οι α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς: $x = \alpha^3 + \beta^3$ και $y = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

2.51 Αν $x \geq y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\dfrac{x-y}{x+y}$ και $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

2.52 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.53 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq \alpha(\beta + \gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.54 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} \leq 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.55 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ , ρ αν δίνεται ότι $\kappa^2 + \rho^2 = 4\rho - 4$.

2.56 Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, α, β ισχύει η ισότητα: $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$. Να αποδείξετε ότι $x = \alpha$ ή $x = \beta$.

2.57 Αν $2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

2.58 Έστω ότι $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ και $-2 < y < -\dfrac{5}{4}$. Αν $A = 6x - 8y$ και $B = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3}$, να αποδείξετε ότι:
i) $2 < A < 19$ ii) $-\dfrac{19}{12} < B < -\dfrac{1}{6}$

2.59 Για τις πραγματικές μεταβλητές α, β γνωρίζουμε ότι $1 \leq \alpha \leq 2$ και $3 < \beta < 4$. Να αποδείξετε ότι:
i) $-10 < 2\alpha - 3\beta < -5$ ii) $3 < \alpha\beta < 8$ iii) $\frac{1}{4} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{2}{3}$ iv) $10 < \alpha^2 + \beta^2 < 20$

2.60 Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου δίνεται ότι: $8,3 \leq \alpha \leq 8,5$ και $5,7 \leq \beta \leq 5,8$. Να αποδείξετε ότι:
i) Η περίμετρός του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 28 και $28,6$.
ii) Το εμβαδόν του βρίσκεται μεταξύ των τιμών $47,31$ και $49,3$.

2.61 Για τις ακτίνες δύο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) δίνεται ότι: $3,5 < R < 4$ και $2 < \rho < 2,2$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών $7,41\pi$ και 12π.

2.62 Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Ανισότητα	$1 \leq x \leq 5$		$x \leq \frac{3}{8}$		$-\frac{3}{2} < x < 4,8$
Συμβολισμός		$[-3, 2)$		$(-3, \infty)$	

2.63 Αν $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$, τότε να δείξετε ότι: $0 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

2.64 Να αποδείξτε ότι: $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.65 Να αποδείξτε ότι: $2x^2 - 2x + 1 > 0$.

2.66 Να αποδείξτε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta - \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.67 **Ανισότητα Schwarz.** Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

Αν οι πραγματικοί $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ είναι μη μηδενικοί, τότε στην προηγούμενη σχέση η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{z}$.

2.68 Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο έχει περίμετρο $20m$. Αν $AB = \Gamma\Delta = xm$ και συμβολίσουμε με $E(x)$ το εμβαδόν του, τότε να αποδείξετε ότι:
i) $A\Delta = B\Gamma = 10 - x$
ii) $0 < x < 10$
iii) $E(x) = -x^2 + 10x$
iv) $E(x) \leq 25$
v) Ένα ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο $20m$ έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

2.69 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους δίνεται ότι: $x^2 + y^2 + 6y \leq 2(5x - 17)$.

2.70 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c οι οποίοι ικανοποιούν τις ισότητες:
$a^2 + 10 = 8b \quad , \quad b^2 + 15 = 10c \quad , \quad c^2 + 25 = 6a$

Απ. $a = 3, b = 4, c = 5$

2.71 Αν οι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς:
$x = \alpha^3 + 2\beta^3$ και $y = 3\alpha\beta^2$

2.72 α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\dfrac{2\nu}{2\nu + 1}\right)^2 < \dfrac{\nu}{\nu + 1}$.
β) Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdots \dfrac{2000}{2001}\right)^2 < \dfrac{1}{1001}$.

2.73 Αν $x > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς x^3 και $7x - 6$.

2.74 Αν $\omega > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = \omega^3$ και $B = \omega^2 + \omega + 2$.

2.75 Να αποδείξτε ότι: $3(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.76 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;

2.77 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$ ii) $\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$ iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \dfrac{1}{2}$ iv) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \dfrac{1}{8}$
Πότε ισχύει οι ισότητες;

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

2.78 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\left|x^2 + 3\right| = x^2 + 3$.
2. Για κάθε πραγματικό αριθμό y ισχύει: $|y - 4| = y - 4$.
3. Για κάθε πραγματικό αριθμό κ ισχύει: $\left|2\kappa - \kappa^2 - 1\right| = \kappa^2 + 1 - 2\kappa$.

4. Ισχύει $||x|+x|=|x|+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5. Ισχύει $|y-|y||=y-|y|$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

6. Αν $x,y\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $|2x-y-3|=|y-2x+3|$.

7. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $d(\alpha,-\alpha)=2\alpha$.

8. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε: $d(\alpha,\beta)=d(\alpha^2,\beta^2)\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

2.79 Ονομάζουμε $max\{\alpha,\beta\}$ τον μεγαλύτερο από τους πραγματικούς α,β.
Δηλαδή $max\{\alpha,\beta\}=\begin{cases}\alpha & \text{αν } \alpha\geq\beta\\ \beta & \text{αν } \alpha<\beta\end{cases}.$
Προσπαθήστε να ορίσετε την απόλυτη τιμή ενός $\alpha\in\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την έννοια του max.
Μετά εξηγήστε τις ιδιότητες: $|a|=|-a|\geq 0$, $|a|\geq a$ και $|a|\geq -a$.

2.80 Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση: $A=\left|-x^2-1\right|-\left|x^2-2x+1\right|$

2.81 Να αποδείξετε ότι: $\left|\alpha^2+6\alpha+9\right|-\left|\alpha^2-6\alpha+9\right|=12\alpha$.

2.82 Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A=\left|\alpha^2+2\alpha+1\right|+\left|\alpha^2-2\alpha+1\right|-2\left|\alpha^2+3\right|$, είναι ανεξάρτητη του α.

2.83 Αν $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|=0$.

2.84 Αν $-2<x<1$ και $-2<y<1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση:
$A=|x+3y+8|+|2x+y-3|+x-2y$ είναι σταθερή.

2.85 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
α) $A=|x-1|+x-5$ β) $B=2\,|2-x|-3x+1$

2.86 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
i) $A=5\,|x-1|+|2+x|-x-4$ ii) $B=|2x-1|-|x+3|+x$

2.87 Να υπολογίσετε τις τιμές του ακέραιου x, αν ισχύουν οι επόμενες ισότητες:
$|2x-5|=5-2x$ και $|x-1|=x-1$.

2.88 α) Αν $x\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|}\leq 1$.
β) Αν $x,y,z\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{z}{|z|}\leq 3$.
γ) Αν $\alpha,\beta\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{2\alpha}{|\alpha|}+\dfrac{3\beta}{|\beta|}\leq 5$.

2.89 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y,ω, αν δίνεται ότι:
$|2x+6|+|3x-2y-1|+|-x+4y-3\omega-7|=0$.

2.90 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αν δίνεται ότι: $|2\alpha-3\beta+13|+|5\beta+4\alpha-7|=0$.

2.91 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|2x-1|=|x+1|$ β) $|3-x|=|7x-9|$ γ) $|4x-5|-|1-2x|=0$

2.92 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x-2|=3$ β) $|6-5x|=14$ γ) $\left|1+\frac{2}{3}x\right|=\frac{5}{6}$

2.93 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και $x=\dfrac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}$, $y=\dfrac{\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ να αποδείξετε ότι: $|x|+|y|=1$

2.94 Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha\,|\beta| = \beta\,|\alpha|$ τότε δείξτε ότι οι α, β είναι ομόσημοι.

2.95 Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha\,|\beta| + \beta\,|\alpha| = 0$, τότε δείξτε ότι αυτοί είναι ετερόσημοι.

2.96 Αν $\left|\dfrac{\alpha+25}{\alpha+1}\right| = 5$ τότε $|\alpha| = 5$.

2.97 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha+\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right| \geq 1$

2.98 Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $d(2x, 3y) = 3y - 2x$, τότε $y \geq \dfrac{2x}{3}$.

2.99 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|x-1| < 2$ β) $|x+3| \leq 7$ γ) $|3-2x| \leq 15$
δ) $|x+5| > 3$ ε) $|4x-5| \geq 3$

2.100 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, για τους οποίους ισχύει:
α) $|\alpha-5| < |\alpha+2|$ β) $d(\alpha, -4) > d(5, \alpha)$

2.101 Να βρείτε τους $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: **α)** $\dfrac{|x-6|}{|4-x|} < 1$ **β)** $\dfrac{d(2x,-3)}{d(1,2x)} \geq 1$

2.102 Για τους $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$. Να αποδείξετε ότι:
i) $|5x-2y| \leq 16$ ii) $|-3x+7y+1| \leq 28$

2.103 Να αποδείξετε ότι: $\left|\alpha^2+4\alpha+5\right| - 3 = \left|2\alpha-\alpha^2-2\right| + 6\alpha$.

2.104 Αν $-1 < \alpha < 2$ να αποδείξετε ότι η παράσταση: $\Pi = ||\alpha+1|-3| - |4+|\alpha-2||$ είναι σταθερή.

2.105 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2\,|\alpha| - \beta^2\,|\beta| = (|\alpha|-|\beta|)(\alpha^2+|\alpha\beta|+\beta^2)$.

2.106 Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta + |\alpha\beta| \geq \alpha\,|\beta| + \beta\,|\alpha|$ ii) $\alpha\beta - |\alpha\beta| \leq \alpha\,|\beta| - \beta\,|\alpha|$

2.107 Για τους $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότηται: $|5x+3y-6| = 5\,|x| + 3\,|y-2|$.
Να αποδείξετε ότι: $x(y-2) \geq 0$.

2.108 Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.109 Αν $x \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.110 Να βρείτε τους $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: α) $\dfrac{|x-6|}{|4-x|} < 1$ β) $\dfrac{d(2x,-3)}{d(1,2x)} \geq 1$

2.111 Αν $\alpha, \kappa, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
i) $|\alpha+4| + |3-\alpha| \geq 7$ ii) $|\kappa+5| + |\kappa-9| \geq 14$
iii) $|x+2| + |7-4x| + |3x-5| \geq 4$

2.112 Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{(x+2)^2}{|x+2|} + \dfrac{(1-x)^2}{|1-x|} \geq 3$ με $x \neq 1$ και $x \neq -2$
β) $\dfrac{4\alpha^2-4\alpha+1}{|2\alpha-1|} + \dfrac{4\alpha^2+4\alpha+1}{|2\alpha+1|} \geq 2$ με $\alpha \neq \frac{1}{2}$ και $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

2.113 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: **i)** $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$ **ii)** $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$

2.114 Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι επόμενες ισότητες;
i) $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ ii) $|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|$

2.115 Αν $x, y \in \mathbb{R}^*$ και $\left|\dfrac{x\,|y| - y\,|x|}{xy}\right| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι οι x, y είναι ετερόσημοι.

2.116 Να αποδείξετε ότι:
i) $||x+1| + x + 1| + ||x+1| - x - 1| - 2\,|x+1| = 0$
ii) $||x-2| - 2 + x| + ||2-x| - x + 2| - |4 - 2x| = 0$

2.117 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$|\alpha + 3| \leq 2\beta - 1 - \beta^2$

2.118 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$\left|x^2 - 2x\right| \leq 4x - x^2 - 4$

2.119 Αν $-2 < x < 1$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2 - 3x - 10\right| < 20$.

2.120 Αν $|x| < 1$ και $-1 < y < 3$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2 - 3xy - y + 1\right| < 14$.

2.121 Αν $|x| \neq |y|$ τότε $\dfrac{|x|}{|x+y|} + \dfrac{|y|}{|x-y|} \geq 1$.

2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

2.122 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
2. Αν $x < 1$ τότε ισχύει $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$.
3. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x+1)(x-1)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$.

2.123 Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{75 + \sqrt{51 - 5\sqrt{15 - 3\sqrt{4}}}} = 9$

2.124 Αν $x = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $x^2 - xy + y^2$.

2.125 Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:
i) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}$
ii) $(5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3) - (4 - 2\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 37$.

2.126 Αν $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\gamma = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2$.

2.127 Αν $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $\beta = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

2.128 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας μία ρίζα.
α) $5\sqrt{12} - 2\sqrt{147} + \sqrt{108}$ β) $4\sqrt{162} - 3\sqrt{50} + \sqrt{242} - 3\sqrt{128} - \sqrt{18}$

2.129 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας δύο ρίζες.
α) $5\sqrt{8} - \sqrt{27} + \sqrt{50} - \sqrt{300} - 2\sqrt{2}$ β) $3\sqrt{48} - \sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{98} + \sqrt{3}$

2.130 Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ε) $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$

ε) $\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}$ στ) $\dfrac{4}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ζ) $\dfrac{4}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

2.131 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5$ β) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}=\frac{7}{3}$

2.132 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=10$

2.133 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{(3-\sqrt{5})^2}-\dfrac{1}{(3+\sqrt{5})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ β) $\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^3}=-76$

2.134 α) Να εκτελέσετε τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$.
β) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

2.135 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\sqrt{27}+5\sqrt{18}-3\sqrt{45}+18}{2\sqrt{75}+5\sqrt{50}-3\sqrt{125}+30}=\dfrac{3}{5}$

2.136 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{19+\sqrt{35}}<5$ β) $\sqrt{13}+\sqrt{5}<\sqrt{11}+\sqrt{7}$ γ) $\sqrt{13+\sqrt[3]{25+\sqrt[4]{15}}}<4$

2.137 Να αποδείξετε ότι: i) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ii) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

2.138 Αν $1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}-\dfrac{7\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-\dfrac{2\sqrt{9x^2-36x+36}}{x-2}$.

2.139 Να βρεθούν τα εξαγόμενα: i) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$ ii) $\sqrt[4]{2592}-\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}$

2.140 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $\sqrt[3]{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
β) $\sqrt[4]{3-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

2.141 Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$

2.142 Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας.

α) $\sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt[5]{7}}}$ β) $\sqrt{3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}}$ γ) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{27\sqrt{3}}}$ δ) $\sqrt[15]{2\sqrt[10]{2\sqrt{8}}}$

2.143 Να βρεθούν τα εξαγόμενα:

α) $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5}$ β) $\sqrt[27]{2^{14}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$ γ) $\sqrt[40]{3^{14}}\cdot\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$

2.144 Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ β) $\sqrt{243}:\sqrt[4]{3}$ γ) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$
δ) $(\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5}):\sqrt[6]{25}$ ε) $(\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[15]{7}):(\sqrt{7}\cdot\sqrt[10]{7})$

2.145 Το 1637 ο Fermat διατύπωσε ένα θεώρημα γνωστό ως ”το τελευταίο θεώρημα του Fermat”[1]:

[1]Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε το 1993 από τον Andrew Wiles. Ονομάστηκε έτσι επειδή ήταν η τελευταία από τις προτάσεις που είχε σημειώσει ο Fermat στο περιθώριο ενός αντίτυπου των Αριθμητικών του Διόφαντου, μεταφρασμένο στη λατινική.

Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z και ν με $\nu > 2$ ώστε να ισχύει: $x^\nu + y^\nu = z^\nu$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n, ο αριθμός $\sqrt[3]{3n^2+3n+1}$ δεν είναι ακέραιος.

2.146 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $x^2 - \dfrac{1}{x} + y^2 + \dfrac{1}{y}$ για $x = \sqrt{3}+1$ και $y = \sqrt{3}-1$.

2.147 Να αποδείξετε ότι: $(\sqrt{80}-\sqrt{200}-\sqrt{180}+\sqrt{288}-\sqrt{8})(\sqrt{20}-\sqrt{45}) = 10$.

2.148 Να αποδείξετε ότι: $1 + \dfrac{1}{1-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} = -2$

2.149 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{1-\sqrt{2}}}$

2.150 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{x-\sqrt{4-x^2}}$, με $-2 \le x \le 2$ και $x \neq \sqrt{2}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$, με $\alpha > \beta > 0$

2.151 Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 4x\sqrt{x^2-1}$

2.152 Να μετασχηματίσετε τα επόμενα ριζικά ώστε το αποτέλεσμα να έχει μόνο απλές ρίζες:

α) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ β) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$ γ) $\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

2.153 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{3}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \dfrac{3}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 3$

2.154 Αν $\alpha = \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{192}$ και $\beta = \sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{384} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{162}$
δείξτε ότι: $\alpha \cdot \beta = 1$.

2.155 Δίνεται το κλάσμα $K = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}}$. Να το μετετρέψετε σε ισοδύναμο του, με ρητό παρονομαστή.

2.156 Να υπολογίσετε την παράσταση: $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

2.157 Αν $x^2 + 5y^2 = 8$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^4-10y^2+17} + \sqrt{25y^4-6x^2+57} = 12$.

2.158 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$ β) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}}$, με $x, y > 0$

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

3.1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Ο αριθμός 0 επαληθεύει μία αδύνατη εξίσωση.
2. Αν $\alpha \neq \beta$ τότε η εξίσωση $(\alpha-\beta)x=\beta-\alpha$, έχει μοναδική λύση την $x=-1$.
3. Η εξίσωση $\alpha^2 x = 2 - x$ έχει μία μόνο λύση.
4. Η εξίσωση $(x+1)^2 = x^2+4$ είναι 2ου βαθμού.
5. Αν η εξίσωση $\alpha x = \beta$ είναι αόριστη, τότε και η εξίωση $\beta x = \alpha$ είναι αόριστη.

3.2 Να λύσετε την εξίσωση $\kappa(\kappa x+5)-6=\kappa^2+x(\kappa+2)$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$

3.3 Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)=\lambda(x+2)$, με λ πραγματική παράμετρο.
i) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$.
ii) Να λύσετε την εξίσωση για της διάφορες τιμές του λ.
iii) Για ποιά τιμή του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-3$;

3.4 α) Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda(x-1)=x-\frac{1}{\lambda}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
β) Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, σύμφωνα με τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος.

Τιμή του λ	Λύση της εξίσωσης
4	
1	
-1	
	μοναδική λύση ο 3
	1

3.5 Να λύσετε την εξίσωση $5(\kappa-x)-6=\kappa(\kappa-x)-3x$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$

3.6 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(3x+5)+49=\mu(3-2x)+x$ να είναι αόριστη.

3.7 Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(x-2)=6x+9-7\mu$ να είναι αδύνατη.

3.8 Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $\dfrac{|x|-2}{2}-\dfrac{|x|}{4}=1$
β) $|x-3|-\dfrac{2\,|x-3|+1}{3}=\dfrac{3(|x-3|-1)}{4}$
γ) $\dfrac{2\,|4-5x|-1}{3}-\dfrac{3\,|4-5x|-2}{4}=\dfrac{5\,|4-5x|+4}{6}-\dfrac{7\,|4-5x|-6}{6}$

3.9 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{5-|x-2|}{4}+\dfrac{2}{3}(|2-x|-2)=\dfrac{3-|x-2|}{6}$

β) $\dfrac{|x-3|-1}{3}+\dfrac{2-|2x-6|}{15}=|3-x|-1$

γ) $\dfrac{|2x-1|-1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3-|1-2x|}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{|6x-3|-6}{12}$

3.10 Δύο αντικρυστά λιμάνια A και B απέχουν 132 μίλια. Ένα πλοίο ξεκινά από το λιμάνι A με κατεύθυνση το B, με ταχύτητα 24 μίλια την ώρα. Μετά από μία ώρα ένα δεύτερο πλοίο ξεκινά από το λιμάνι B με κατεύθυνση το A, με ταχύτητα 30 μίλια την ώρα. Σε πόσο χρόνο από τον απόπλου του πρώτου πλοίου θα συναντηθούν; Πόσο απέχει το σημείο συνάντησης από τα δύο λιμάνια;

3.11 Να λυθούν οι επόμενες εξισώσεις για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου μ.
i) $\mu^3x-\mu^2-4=4\mu(x-1)$ ii) $\mu^3(x-1)=4\mu x+8$

3.12 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(\alpha x-\beta)^2+(\beta x-1)^2=(\beta x-\alpha)^2+(\alpha x-1)^2$
β) $(x+\lambda)(\lambda-\mu)+(x+\mu)(\lambda+\mu)=(\lambda+\mu)^2$

3.13 Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}+\dfrac{x+\beta}{x-\beta}=2$, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β.

3.14 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $||x|+3|=4$ β) $||x+1|-1|=2$ γ) $|2\,|x-1|+1|=3$

3.15 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x-2|+x=8$ β) $|3x-1|=x+1$ γ) $|x+1|+|x-1|=2$

3.16 Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $\left|x^2+2x+1\right|-\left|x^2+3\right|-5x=3$
ii) $\left|4x^2+4x+1\right|-2\left|x^2+1\right|=2+2x^2$

3.17 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η εξίσωση: $\dfrac{\alpha+2}{x-1}+\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{\beta-3}{x+1}$
να έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

3.2 Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$ παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

	α	ν	Ρίζες της $x^\nu=\alpha$
	$\alpha=0$		0
Η εξίσωση	$\alpha>0$	άρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
$x^\nu=\alpha$		περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
	$\alpha<0$	άρτιος	αδύνατη
		περιττός	$-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

3.18 Ο όγκος ενός κύβου είναι 729 cm^3. Να βρείτε το μήκος της ακμής του.

3.19 Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το πλάτος του είναι διπλάσιο του ύψους του και το μήκος του τριπλάσιο του ύψους του. Αν ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι 2058 cm^3, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

3.20 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^5-81x=0$ β) $64x^5-x^3=0$ γ) $8x^4+x=0$
δ) $6x^5+3x=0$ ε) $135x^8+40x^5=0$ στ) $x^{105}-x^5=0$

3.21 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x+6)^5 = 32$ β) $(x-5)^4 - 216(x-5) = 0$ γ) $(2x-1)^5 + 4x = 4x^2 + 1$

3.22 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0 = 0$ β) $x^{11} - 32x^6 + x^5 - 32 = 0$

3.23 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^{1962} + 128x^{1969} = 0$ β) $x^{2050} + x^{50} = 2x^{1050}$ γ) $8888x^{2001} + 1111x^{2004} = 0$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

3.24 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Όταν η διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι μη αρνητική, τότε η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες.
2. Σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση η διακρίνουσα $\Delta \neq 0$. Τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
3. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες. Τότε θα είναι $\varDelta > 0$.
4. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 6x + 2\kappa - 1 = 0$ είναι 3. Τότε το $\kappa = 2$.
5. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει ρίζες τις x_1, x_2. Τότε $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, όπου S είναι το άθροισμα των ριζών και P το γινόμενό τους.
6. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει ρίζες τις x_1, x_2. Τότε $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3P$, όπου S και P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.
7. Η δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $-\frac{5}{2}$ και $\frac{3}{4}$ είναι η $8x^2 + 14x - 15 = 0$.

3.25 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 + 2\sqrt{5}x - 1 = 0$ β) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

3.26 Να βρείτε το θετικό πραγματικό αριθμό x, αν οι αριθμοί $x+1$, $3-x$ είναι αντίστροφοι.

3.27 Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2 - 3x - 10)^2 + (3x^2 + 5x - 2)^4 = 0$

3.28 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\left|2x^2 - 9x - 5\right| + \left|1 - 4x^2\right| = 0$ β) $|x| + \left|x^2 - x\right| = -\left|x + x^3\right|$

3.29 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = 0$, έχει ρητές ρίζες.

3.30 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 - (4\alpha - 3\beta)x + \alpha - \beta = 0$ έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

3.31 Αν η εξίσωση: $x^2 - \kappa x + \lambda = 0$ έχει δύο ρίζες διαφορετικές, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\kappa^2 - 4\lambda)x^2 - \lambda x - 5 = 0$
i) είναι δευτέρου βαθμού
ii) έχει διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

3.32 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu - 3)x + \mu^2 - 5\mu - 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.
α) Για ποιές τιμές του μ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
β) Για τις τιμές του μ που θα βρείτε στο ερώτημα α), να λύσετε την εξίσωση.

3.33 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 + 2(2 - \lambda)x + 3 - 5\lambda = 0$, με λ πραγματική παράμετρο. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες;
Για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση.

3.34 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda-2)x^2+2(2-\lambda)x+3-5\lambda=0$, με λ πραγματική παράμετρο. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες;
Για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση.

3.35 Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(2\lambda+1)x^2+3(\lambda-1)x-\lambda+1=0$ έχει δύο ίσες ρίζες.

3.36 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση:
$(3-2\lambda)x^2-4x-1=0$, έχει δύο διαφορετικές ρίζες.

3.37 Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x+1=0$, με ρίζες x_1, x_2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $x_1^2+x_2^2$ β) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ γ) $x_1^3+x_2^3$ δ) $|x_1-x_2|$

3.38 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των κύβων των ριζών της εξίσωσης:
$x^2+\mu x+\frac{\mu^2}{3}-\frac{\alpha}{\mu}=0$, $\mu\neq 0$, είναι ανεξάρτητο του μ.

3.39 Αν α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $(x-2)^2-\lambda(4x-3)=0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\left(\alpha-\frac{3}{4}\right)\left(\beta-\frac{3}{4}\right)$ είναι ανεξάρτητη του λ.
Απ. $\frac{25}{16}$

3.40 Δίνεται η εξίσωση $4x^2+(3+\sqrt{3})x-2(5-\sqrt{3})=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

3.41 Δίνεται η εξίσωση $2x^2-3\alpha x+\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=0$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha-\beta$.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

3.42 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda-3)x^2-\lambda x+3+\lambda=0$, έχει μία θετική και μία αρνητική ρίζα.

3.43 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $6x^2-|x|-2=0$ β) $2(x-4)^2-|x-4|-15=0$
γ) $6(x-1)^2-5\,|1-x|-6=0$

3.44 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-2=0$ β) $(x^2-1)^2-4(1-x^2)-21=0$

3.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^4-3x^2-4=0$ β) $3x^4+16x^2+5=0$ γ) $2x^4-3x^2+1=0$

3.46 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-x}=\dfrac{x-2}{x}$ β) $\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{18}{2-x}=\dfrac{7x^2-28}{x^2-4}+\dfrac{7}{2+x}$

3.47 Να λύσετε την εξίσωση $3x^2+5\,|x|+x=9$.

3.48 Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-2(2\alpha-\beta)x+4\alpha-2\beta-1=0$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε τιμή των α, β, τις οποίες να βρείτε.
ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. Ποια είναι τότε η διπλή ρίζα της εξίσωσης;

3.49 Δίνεται η εξίσωση: $(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)=0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.
ii) Πότε η εξίσωση έχει ίσες ρίζες; Ποιές είναι αυτές;

3.50 Αν α, β, γ είναι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες.

i) $\beta\gamma x^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)x + \beta\gamma = 0$ ii) $\dfrac{\alpha^2}{x+1} - \dfrac{\gamma^2}{x} = \beta^2$

3.51 Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες.

3.52 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, αν η εξίσωση:
$x^2 + 5|3\alpha - \beta - 8|x + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$, έχει δύο ίσες ρίζες. Ποιες είναι αυτές;

3.53 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$\alpha(\beta-\gamma)x^2 + \beta(\gamma-\alpha)x + \gamma(\alpha-\beta) = 0$, $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq \gamma$ έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

3.54 Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$. Αν για τους συντελεστές α, γ της εξίσωσης ισχύει η ισότητα: $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

3.55 Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με την εξίσωση $\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma = 1$.

3.56 Έστω a και b οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{a}{b+1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+1}\right)^2 = 18$.

3.57 Να οριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε οι εξισώσεις:
$(\lambda-1)x^2 - (2\lambda+1)x + 2 = 0$ $(\lambda+1)x^2 - (4\lambda-1)x - 2 = 0$
να έχουν μία κοινή ρίζα. Να βρείτε την κοινή ρίζα.

3.58 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2(\gamma-\alpha)x + \alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε ότι:
α) $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$
β) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\beta - \alpha$.

3.59 Θεωρούμε την εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 + 2(\alpha+\beta+\gamma)x + 3 = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες.
α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β, γ
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης.

3.60 Αν οι εξισώσεις $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ca = 0$ έχουν μία μόνο κοινή ρίζα, διαφορετική του μηδενός, να αποδείξετε ότι οι άλλες ρίζες των δύο εξισώσεων, είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + cx + ab = 0$.

3.61 **Α.** Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ με ρίζες τις ρ_1, ρ_2.
Θέτουμε $S_\nu = \rho_1^\nu + \rho_2^\nu$ και $S_{-\nu} = \dfrac{1}{\rho_1^\nu} + \dfrac{1}{\rho_2^\nu}$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha S_\nu + \beta S_{\nu-1} + \gamma S_{\nu-2}$, για $\nu = 3, 4, 5, \cdots$

ii) $S_{-\nu} = \left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^\nu \cdot S_\nu$, με $\gamma \neq 0$.

iii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $S_5 = \rho_1^5 + \rho_2^5$.

Β. Να υπολογίσετε (χωρίς ανάπτυξη των δυνάμεων) τις τιμές των παραστάσεων: **i)** $A = (1+\sqrt{3})^6 + (1-\sqrt{3})^6$
ii) $B = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^7} + \dfrac{1}{(1-\sqrt{2})^7}$.

Κεφάλαιο 4

Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

4.1 Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός x ο οποίος επαληθεύει τις σχέσεις:
$\dfrac{5x-2}{3}-\dfrac{4-7x}{6}>\dfrac{1-3x}{12}$ και $\dfrac{4-x}{2}-\dfrac{6x-1}{4}\geq -1-\dfrac{x}{8}$

4.2 Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί.

4.3 Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 19 και 26.

4.4 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|x+1|<5$ β) $|2x-7|<9$ γ) $|6-3x|\leq 15$
δ) $|3x-2|>7$ ε) $|12-9x|\geq 6$

4.5 Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{x^2-9}{|x|-3}$.
α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση; **β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $A\geq 6$.

4.6 Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{x^2-2|x|+1}{|x|-1}$.
α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση; **β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $A<3$.

4.7 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $2<|x-5|<5$ β) $3<|3-x|<7$ γ) $1<|2x-5|<6$ δ) $5<|4-6x|<9$

4.8 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\dfrac{|x-2|-1}{4}<\dfrac{|2-x|-3}{2}\leq\dfrac{1+|-x+2|}{3}$.

4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

4.9 Αν $f(x)=-2x^2+x+1$, τότε $f\left(\frac{1000}{1001}\right)>0$

4.10 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) $f(x)=-3x^2+15x+42$ και β) $g(x)=6x^2-7x-5$
γ) $h(x)=9x^2-16x+8$ και δ) $\varphi(x)=20x^2-60x+45$

4.11 Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες έχουν έννοια τα επόμενα κλάσματα. Μετά να τα απλοποιήσετε.
α) $A=\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2}$ β) $B=\dfrac{9x^2+6x-8}{15x^2+2x-24}$

4.12 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$.
α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου, για τις διάφορες τιμές του x.
β) Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με ένα από τα σύμβολα < , > , = .
α) $f(\sqrt{2}) \cdots 0$ **β)** $f(-0,667) \cdots 0$ **γ)** $f(1,534) \cdots 0$
δ) $f(1,5) \cdots 0$ **ε)** $f(\frac{11}{7}) \cdots 0$ **στ)** $f(-0,\bar{6}) \cdots 0$

4.13 Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $3x - x^2 \geq 0$ β) $5 - x^2 < 0$ γ) $3x^2 + 2x - 8 < 0$

4.14 Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $K = \dfrac{(-3x^2 + 7x - 5)(4x^2 - 44x + 121)}{-x^2 + 3x - 3}$ είναι μη αρνητικό, για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

4.15 Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ -2x^2 - x + 6 > 0 \\ -3x^2 + 4x - 2 < 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2 - x^2 < 0 \\ -2x^2 - 5x + 12 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}$

4.16 Για ποιές τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις;
α) $A = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ β) $B = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{2x^2 - 9x + 4}$

4.17 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $\varphi(x) = (\alpha^2 + 1)x^2 - 3\alpha x + 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x.

4.18 Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο $g(x) = x^2 - ax + a - 1$, να είναι μη αρνητικό.

4.19 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $h(x) = -x^2 + 2\alpha x - (\beta + \gamma)^2$, είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου.

4.20 **α)** Να βρείτε τα πρόσημα των τριωνύμων: $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.
β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών x και y, αν ισχύει η ισότητα: $(x^2 - 6x + 9)(y^2 - 3y + 4) + (4y + 5)^2(2x^2 - 5x + 4) = 0$

4.21 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

4.22 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ, για τις οποίες η ανίσωση $(\mu+2)x^2 - 2(\mu-2)x + 5(\mu - 2) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda + 1 = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $1 < x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 < 7$

Κεφάλαιο 5

Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.1 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:
i) $a_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \nu}{\nu^2+1}$ ii) $a_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$

5.2 Δίνεται η ακολουθία $a_1 = 1, a_2 = 3$ και $a_{\nu+1}^2 = a_\nu \cdot a_{\nu+2} - 8$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τον 5ο όρο της ακολουθίας.
Απ. 577

5.3 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (a_ν) με $a_1 = 3$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{5a_\nu - 4}{1+a_\nu}$.

5.4 Δίνεται η ακολουθία του Fibonacci, $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_{\nu+2} = a_{\nu+1} + a_\nu$. Να βρείτε τον 17ο όρο της ακολουθίας.

5.5 Δίνεται η ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 1$ και $a_{\nu+1} = \sqrt{1+a_\nu^2}$.

i) Να βρείτε τον 6ο όρο της ακολουθίας.

ii) Μπορείτε να ”εικάσετε” τον γενικό όρο της ακολουθίας;

5.6 Θεωρούμε την ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 2$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{3+a_\nu}{1-a_\nu}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

i) Να βρείτε τους έξι πρώτους όρους της ακολουθίας.

ii) Τι παρατηρείτε;

5.2 Αριθμητική πρόοδος

5.7 Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του 2ου , του 4ου και του 6ου όρου είναι 0, ενώ το άθροισμα του 3ου , του 5ου και του 7ου όρου είναι 6. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου.
Απ. 690

5.8 Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

β) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

γ) Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7ης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30€ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

5.9 Μία ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας, στην δεύτερη τρεις, στην τρίτη πέντε κ.τ.λ.

α) Πόσοι θα είναι στην 12η σειρά;

β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

5.10 **Α.** Σε μία αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 5η έως και την 15η σειρά;

Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στην 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.τ.λ.

α) Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

Απ. Α.α)34 β)350 Β.α)11η β)55

5.11 Σ' ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

i) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

ii) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

iii) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

Απ. β)1600 γ)5η

5.12 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2, \alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5.13 **α)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί x–4, $x+4$ και $3x$–4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Αν ο αριθμός x–4 είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος (α), να βρείτε τον πρώτο όρο της.

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής της αριθμητικής προόδου.

Απ. α) $x = 8$ β) $\alpha_1 = -36$ γ) $S_{10} = 0$

5.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+53) = 459$

β) $1+7+13+\cdots+x = 280$, με $x > 0$

Απ. α) -2 β) 55

5.15 Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

i) $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$

ii) $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$

iii) $(\beta+\gamma-\alpha)^2$, $(\gamma+\alpha-\beta)^2$, $(\alpha+\beta-\gamma)^2$

5.16 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\beta+\gamma-\alpha$, $\gamma+\alpha-\beta$, $\alpha+\beta-\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5.17 Να βρεθούν τρεις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 3 και το γινόμενό τους είναι –8.
Απ. $-2, 1, 4$

5.18 Να αποδείξετε ότι, αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε αυτά είναι ανάλογα των αριθμών $3, 4$ και 5.

5.19 Δίνεται η ακολουθία $a_\nu = \dfrac{3\nu^2-3}{\nu+1} - 5$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = a_{15} + a_{16} + \ldots + a_{30}$.

γ) Να υπλογίσετε το άθροισμα $B = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{53}$.

5.20 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\alpha > \beta > \gamma$, οι $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (*τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου*).

5.21 Η τιμή αγοράς ενός εκτυπωτή είναι μεγαλύτερη από 620 €και μικρότερη από 640 €. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120 €.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω €, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

γ) Να βρείτε την τιμή του ω.

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του εκτυπωτή.

Απ. α) $48 - 3\omega$ β) $600 + 15\omega$ γ)2 δ)60 €ε)630 €

5.22 Ένα κολιέ αξίας 2290€ αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 2 €λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 3 €λιγότερο από το προηγούμενό του.

α) Πόσα ευρώ είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

β) **i)** Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

ii) Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Απ. α) 90 €β)i) 32 €ii)48 €

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

5.23 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο 4ος όρος ισούται με 108 και ο 8ος όρος ισούται με 8748
Απ. $4, 12, 36, 108, ...$, $-4, 12, -36, 108, ...$

5.24 Να βρείτε τη γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 3ος όρος ισούται με 24 και ο 8ος όρος ισούται με 768.
Απ. $a_1 = 6, \lambda = 2$

5.25 Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα:

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

Β1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

Β2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν τα βακτηρίδια;

Απ. Α. 7290 Β1. 1890 Β2. 27

5.26 Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x + 4, 3x, 4–7x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
Απ. $-2, \frac{1}{2}$

5.27 Αν οι αριθμοί $x, 10, y$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $x, 6, y$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρεθούν οι x, y.
Απ. $2, 18$

5.28 Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν συγχρόνως διαδοχικούς όρους, αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

5.29 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta^2\gamma^2 - \alpha^4}{\alpha} + \frac{\alpha^2\gamma^2 - \beta^4}{\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}{\gamma} = 0$$

5.30 Αν οι αριθμοί x, y, ω, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:
i) $(x + z)(y + \omega) - (x + \omega)(y + z) = (y - \omega)^2$ ii) $\dfrac{y + z}{x} = \dfrac{\omega^2 z + z^3}{\omega^3}$

5.31 Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν το γινόμενό τους είναι 216 και το άθροισμα των άκρων όρων είναι –20.
Απ. $-2, 6, -18$

5.32 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν αυτές είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα όλων των ακμών του είναι 168, ενώ ο όγκος του είναι 512.
Απ. $2, 8, 32$

Κεφάλαιο 6

Βασικές έννοιες των συναρτήσεων

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

6.1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
α) Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(0,5) = 3$.
β) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \dfrac{x^3 - 2^3}{x^2 - 2^2} = \dfrac{(x-2)(x^2 - 2x + 2^2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}$
έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

6.2 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
α) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 5x}$ β) $g(x) = \dfrac{|x|}{2x^2 - 5x - 3}$ γ) $h(x) = \dfrac{x^3 + 2}{|x-2| - 3}$

6.3 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$ β) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} + \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}} - x^2 + 3x - 5$
γ) $h(x) = \dfrac{\sqrt{3 - |2 - x|}}{x^2 - 5x + 6}$

6.4 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων και να απλοποιηθεί ο τύπος τους
α) $f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-2) + 4 - x^2}{x^2 - 2x}$ β) $g(x) = \dfrac{-x(x+1) + x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

6.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x|}{x^2 - 9}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{2}{5}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

6.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\kappa x}{x^2+1} - 3 & \text{αν } x < 0 \\ 5x^2 - 2x + \lambda & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ αν ισχύει:
$f(-1) = 3f(0) - 1$ και $5f(-2) + 10f(1) = 1$.

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Pi = \dfrac{1}{f(0) - f(\frac{1}{2})} + [4 + f(-3)]^2 + 4,84$.

Απ. i)$\kappa = 2, \lambda = -1$ ii) $\Pi = 1$

6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

6.7 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες
α) $f(x) = |2x - 3| - 1$ β) $g(x) = x^3 - x$

6.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\kappa x - 1}{x^2 + 1}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Το σημείο $M(1, \frac{1}{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

α) Να βρείτε την τιμή του κ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

6.9 Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \kappa x - \lambda - 2$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. τα σημεία $A(-1, -4)$ και $B(4, 6)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της g.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Απ. α) $\kappa = -1, \lambda = 4$ β) $(0, -6), (-2, 0), (3, 0)$

6.3 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

6.10 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Η ευθεία με εξίσωση $y = –3x + 5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
2. Η ευθεία με εξίσωση $x + y = 0$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.
3. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$ και $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 4$ είναι παράλληλες.
4. Οι ευθείες με εξισώσεις $2x + y = 5$ και $y = 2x + 9$ είναι παράλληλες.

6.11 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{αν } x \leq -1 \\ 5 & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{αν } x < -2 \\ 3 & \text{αν } x = -2 \\ -2x + 1 & \text{αν } x > -2 \end{cases}$

6.12 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = |x - 2| + 2x - 1$ ii) $g(x) = |2x + 1| - |x - 1|$

6.13 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x$ ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

6.14 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι επόμενες ευθείες να είναι παράλληλες:

α) $\epsilon_1 : y = \lambda^2 x - 1$ και $\epsilon_2 : y = (2 - \lambda)x + 3$

β) $\epsilon_1 : y = |\lambda - 2|x + \lambda$ και $\epsilon_2 : y = 2|\lambda|x + 6\lambda - 1$

6.15 **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(–5, 3)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y = 3$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν το σημείο $M(\kappa–1, \kappa^2–4)$ ανήκει στην ευθεία που βρήκατε στο προ-ηγούμενο ερώτημα.
Απ. α)$y = -2x - 7$ β)$\kappa = -1$

6.16 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x + 1|} + 2x - 1$ ii) $g(x) = x + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$

Κεφάλαιο 7

Μελέτη βασικών συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$

7.1 Να βρείτε την παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων, η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(3, -\frac{3}{2}\right)$.

7.2 **α)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$.
Με τη βοήθεια του σχήματος να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

7.3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2|x|$.

7.4 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

7.5 Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$, τότε $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

7.6 Να μελετηθούν και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:
α) $f(x) = 2x^2 - x - 6$ β) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ γ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
δ) $f(x) = -x^2 + x + 2$ ε) $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$ στ) $f(x) = -x^2 + x - 1$

7.7 **i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η καμπύλη της τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2 και τον $x'x$ στα -2 και -1.

ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μονοτονίας της f και να βρείτε το είδος και τη τιμή του ακροτάτου αυτής.
Απ. i) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2$

7.8 **i)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η γραφική παράστασή της διέρχεται από τα σημεία $A(1, -4), B(2, -3)$ και $\Gamma(-2, 5)$.

ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μονοτονίας της f και να βρείτε το είδος και τη τιμή του ακροτάτου αυτής.
Απ. i) $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -3$

7.9 **i)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -5 τον $x'x$ στο $-\frac{5}{2}$ και έχει ελάχιστο για $x = -\frac{3}{4}$.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
Απ. i) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -5$

7.10 **α)** Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6\kappa x + \kappa$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

β) Για τις τιμές του κ που θα βρείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Απ. α) $\kappa = 0, \kappa = \frac{1}{9}$

7.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να βρείτε το διάστημα μεταβολής του μ, ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu$ να έχει με την καμπύλη της f τέσσερα κοινά σημεία.

Απ. β) $0 < \mu < 4$

7.12 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2–6x + 5$ και $g(x) = 1–x^2$.

i) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεών τους.

iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ, για τις οποίες η ευθεία με εξίσωση $y = \mu$ τέμνει τα διαγράμματα και των δύο συναρτήσεων.

Απ. ii) $A(1, 0), B(2, -3)$ iii)$-4 \leq \mu \leq 1$

7.13 Να βρεθεί το ακρότατο της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2$.

Απ. Για $x = \frac{3}{5}, f_{min} = \frac{1}{5}$