Κεφάλαιο 1

Διαφορικός Λογισμός

1.1 Συναρτήσεις

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;
2. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;
3. Πως ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου μεταξύ δύο συναρτήσεων;
4. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy;
5. Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;
6. **i)** Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα;
   ii) Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;
7. **i)** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο;
   ii) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;
8. Τι εννοούμε με τον όρο ”ακρότατα” της συνάρτησης;

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   i) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2x-6}$ ii) $f(x) = \dfrac{|x|-4}{x^2+x-6}$
   iii) $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{x^3-4x^2-7x+10}$ iv) $f(x) = \dfrac{2x-9}{|x-3|-5}$
10. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = \sqrt{x-3}$ ii) $g(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$
    iii) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ iv) $K(x) = \ln(2-x^2)$
11. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ii) $g(x) = \ln(x-2) + \dfrac{x}{x-5}$
    iii) $h(x) = \sqrt{2x-1} + \ln(5-x)$
12. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των επόμενων συναρτήσεων, με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
    i) $f(x) = x^2-6x-7$ ii) $f(x) = \dfrac{|x|-2}{x^2+1}$
    iii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ iv) $f(x) = \ln(x-2)$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x - 5}{\sqrt{x} - 1}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4, 7)$.

    i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

    ii) Να υπολογίσετε το α.

    iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παραάστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - x - 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

    i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

    ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

    iii) Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται ”ψηλότερα” από την ευθεία με εξίσωση $y = 5$;

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2–1$ και ένα τυχαίο σημείο $A(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f.

    α) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του σημείου ως συνάρτηση του x.

    β) Να εκφράσετε την απόσταση $d(x)$ του από την αρχή των αξόνων ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $d(x)$.

    γ) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης των οποίων η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ίση με 1.

17. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μία αποθήκη, που να έχει σχήμα ορθογώνιου με περίμετρο $20m$. Αν η μία πλευρά του παραθύρου έχει μήκος x m, τότε:

    α) Να εκφράσετε την άλλη πλευρά του ορθογώνιου παραθύρου ως συνάρτηση του x.

    β) Να βρείτε τη συνάρτηση $E(x)$ που μας δίνει το εμβαδόν του παραθύρου, καθώς και το πεδίο ορισμού της.

    γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ παίρνει μέγιστη τιμή την $25m^2$.

    δ) Τι σχήμα πρέπει να έχει το παράθυρο προκειμένου να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή φωτεινότητα στην αποθήκη, δηλαδή το εμβαδόν του παραθύρου να είναι μέγιστο;

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{αν } x < 1 \\ 2x^2 - x + \alpha & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

    i) Να βρείτε τα $f(0), f(-2)$ και $f(1)$.

    ii) Αν $f(1) = f(-2) - 2f(0)$ να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|2x^2 - x^3|}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$.

    i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

    ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

    iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1) - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

    i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

    ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

    iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(3, 2)$.

    i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

    ii) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

    iii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

    iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

22. Έστω $f(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(1, –7)$ και $B(–2, –4)$ τότε:

    i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

    ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x^2–16}$ και $g(x) = \dfrac{x + 4}{x - 4}$.
    Να ορίσετε τις συναρτήσεις:
    i) $f + g$ ii) $f - g$ iii) $f \cdot g$ iv) $\frac{f}{g}$

1.2 Όρια - Συνέχεια

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α΄) Αν για τις συναρτήσεις f, g έχουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = l_1 \cdot l_2$

   (β΄) $\lim_{x\to x_0}$ συν$x =$ συνx_0.

   (γ΄) $\lim_{x\to x_0}$ εφ$x =$ σφx_0 .

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A;

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

3. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:
   i) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x}{3x+8}$ ii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x-6}$
   iii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x^2-1}$ iv) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x-12}{5x+10}$

4. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:
   i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{6x^2-11x+5}{x^2+x-2}$ ii) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x+2}{x^2-4}$

5. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:
   i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{4x-12}$
   iii) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{3-\sqrt{8-x}}$
   iv) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2x^2-3x-2}$

6. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-1} & \text{αν } x < 1 \\ x^5+3x^4-2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x-14}{x^3-1} & \text{αν } x \neq 2 \\ 0,75 & \text{αν } x = 2 \end{cases}$.
   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-5x^2+4x-21}{x^2-2x-3} & \text{αν } x \neq 3 \\ 7 & \text{αν } x = 3 \end{cases}$.
   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+14x-5}{x+5} & \text{αν } x \neq -5 \\ \alpha & \text{αν } x = -5 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -5$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7x^2-18x+8}{2x-4} & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha^2-6\alpha+14 & \text{αν } x = 2 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{αν } x < -3 \\ x^2+5x & \text{αν } x \geq -3 \end{cases}$.
    Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4\alpha x + 1 & \text{αν } x < 1 \\ \ln x + \alpha^2 x + 5 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 5\beta - \alpha + 1 & \text{αν } x < 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} + \alpha x + \beta & \text{αν } x > 2 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθούν οι α, β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1.3 Η έννοια της παραγώγου - Παράγωγος συνάρτησης

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

   (α΄) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$.

   (β΄) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$.

   (γ΄) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0, είναι $\upsilon(t_0) = f''(t_0)$.

3. Να εξηγήσετε ότι υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους.

4. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f;

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 0$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ και η $F(x) = cf(x)$. Να αποδείξετε ότι $F'(x) = cf'(x)$.

9. Έστω η συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και η $F(x) = f(x) + g(x)$.
   Να αποδείξετε ότι $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

10. Να συμπληρώσετε τα κενά στον επόμενο πίνακα:

$(c)' = ...$	$(cf(x))' = ...$
$(x)' = ...$	$(f(x) + g(x))' = ...$
$(x^\rho)' = ...$	$(f(x)g(x))' = ...$
$(\sqrt{x})' = ...$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = ...$
$(\text{ημ}x)' = ...$	$(f(g(x)))' = ...$
$(\text{συν}x)' = ...$	
$(e^x)' = ...$	
$(\ln x)' = ...$	

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

11. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + \alpha$ ii) $f(t) = t^2\text{ημ}\theta + \theta t + 1$
    iii) $f(x) = \alpha x^8 - 5\alpha^2 x^3 + (\alpha + 1)x - \alpha + 2$

12. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$ ii) $f(x) = x^2 e^x$ iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$ iv) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

13. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x^2 e^{1-x}$ ii) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ iii) $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$
    iv) $f(x) = \text{ημ}e^x$ iv) $f(x) = e^{\text{συν}x}$

14. Έστω $f(x) = \alpha\text{ημ}x - \beta\text{συν}x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f''(x) = 0$

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{x+1}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

iii) Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε $f'(\alpha) = -1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-3x}$(ημx + συνx , $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + 6f'(x) + 10f(x) = 0$$

18. Η μία πλευρά ενός ορθογωνίου είναι xm και η άλλη $2m$ μεγαλύτερη. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν $x = 5m$.

19. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(x, 0)$, με $x > 0$ και $B(0, x+7)$. Να βρείτε:

α) Τη συνάρτηση που δίνει την απόσταση των σημείων A και B, καθώς και τη συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

β) Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης όταν $x = 5$ και το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν $x = 2, 5$.

20. Η πλευρά $\alpha(t)$ σε cm ενός τετραγώνου μεταβάλλεται ως προς το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\alpha(t) = 2t + 1$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου κατά τη χρονική στιγμή $t = 4s$.

21. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = xe^{x-1}$ στο σημείο της με τετμημένη 1.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$, με τον άξονα $x'x$.

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2 – 11x + 8$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτόμενή της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$.

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 – 3x^2 + x + 1$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 1 – 2x$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1) – 2x + 3$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία με εξίσωση $x + y + 1 = 0$.

26. Έστω $f(x) = x^2 + 5x – 2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f οι οποίες είναι κάθετες με την ευθεία με εξίσωση $x + 3y = 6$.

1.4 Εφαρμογές των παραγώγων

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα από το οποίο συμπεραίνουμε το είδος μονοτονίας μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, από το πρόσημο της παραγώγου της.

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

   (α΄) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

   (β΄) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = xe^x$ ii) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

5. i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = 2x + \text{συν}x$ ii) $f(x) = \ln x - x$ iii) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ και $x > 0$. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι μέγιστο.

8. Κάθε μέρα 840 επιβάτες χρησιμοποιούν το τραίνο προκειμένου να μεταβούν από μία πόλη σε μία άλλη, αν το εισιτήριο είναι 8 ευρώ. Έχει παρατηρηθεί ότι για κάθε μείωση του εισιτήριου κατά 20 λεπτά, έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των επιβατών κατά 30 άτομα. Αν γίνουν x διαδοχικές μειώσεις των 20 λεπτών, τότε:

   α) Να εκφράσετε, ως συνάρτηση του x, την τιμή του εισιτήριου, το πλήθος των επιβατών και και τα έσοδα σε ευρώ για τη συγκεκριμένη διαδρομή.

   β) Να βρείτε το x ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα.

   γ) Πόσο θα είναι η τιμή του εισιτήριου και τα μέγιστα έσοδα, για την τιμή του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

Κεφάλαιο 2

Στατιστική

2.1 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Ποιές μεταβλητές ονομάζονται ποιοτικές ή κατηγορικές;
2. Ποιές μεταβλητές ονομάζονται ποσοτικές;
   Από αυτές ποιές λέγονται διακριτές και ποιές συνεχείς;
3. Τι ονομάζουμε συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X;
4. Ποιά σχέση συνδέει τις συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής X, με το μέγεθος του δείγματος ν;
5. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X;
6. Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i , $i = 1, 2, \cdots, k$ μιας μεταβλητής X, να αποδείξετε ότι:
   (α΄) $0 \leq f_i \leq 1$
   (β΄) $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1$
7. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα και τι αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X;
8. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα και τι διάγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων;
9. Ποιά σχέση συνδέει το τόξο ενός κυκλικού διαγράμματος με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα;
10. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις.
    (α΄) Το άθροισμα των συχνοτήτων σε μια κατανομή συχνοτήτων είναι ίσο με 1.
    (β΄) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος του ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i.
    (γ΄) Το άθροισμα όλων των αθροιστικών σχετικών συχνοτή-των (επί τοις εκατό) των τιμών μιας μεταβλητής είναι ίσο με 1.
    (δ΄) Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.
    (ε΄) Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i.
    (στ΄) Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατωτέρου και του ανωτέρου ορίου της κλάσης.
    (ζ΄) Σε ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους, οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

(η΄) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης.

(θ΄) Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους.

(ι΄) Σε ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

11. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις.

(α΄) Το ζεύγος που αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων είναι:
Α. (x_i, ν_i) Β. (x_i, f_i) Γ. (ν_i, f_i) Δ. $(\nu f_i, x_i)$

(β΄) Σε ένα δείγμα μεγέθους ν με συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X η σχετική συχνότητα f_i ισούται με:
Α.$f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$ Β. $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ Γ. $f_i = \nu_i – \nu$ Δ. $f_i = \dfrac{100}{\nu_i}$

(γ΄) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu, k \leq \nu$, τότε αν στην τιμή x_i αντιστοιχίσουμε τη συχνότητα ν_i ισχύει:
Α. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = 100$ Β. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = 100$
Γ. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = k$ Δ. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = \nu_k$

(δ΄) Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το a_i ισούται με:
Α. $360^0\nu_i$ Β. $360^0 f_i$ Γ. $90^0 f_i$ Δ. $180^0 f_i$

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

12. Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

ii) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i
1	9
2	15
4	6

13. Να συμπληρώσετε την τιμή που λείπει στον διπλανό πίνακα, ώστε σε αυτόν να δίνονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής X για ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 200$. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

x_i	f_i
1	$0,15$
2	$0,2$
3	
4	$0,35$
5	$0,06$
6	$0,14$

14. Πήραμε δείγμα 30 πτυχιούχων οδοντιάτρων και ζητήσαμε να μάθουμε τον χρόνο που απαιτήθηκε για την απόκτηση πτυχίου. Οι απαντήσεις που δόθηκαν έδωσαν τους ακόλουθους χρόνους σε έτη:
7 8 6 8 6 6 6 6 6 6 6 6 8 7 8
6 6 6 5 5 6 5 8 7 5 6 5 6 6 5
α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).
β) Πόσοι οδοντίατροι πήραν πτυχίο το πολύ σε 7 χρόνια;
γ) Ποιο είναι το ποσοστό των οδοντιάτρων που πήρε πτυχίο σε περισσότερο από 5 χρόνια;
δ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

15. Οι ομάδες αίματος που προέκυψαν από την εξέταση ενός δείγματος ν ατόμων είναι οι επόμενες:
B A A O AB A O O AB O B AB B A O O AB A O B

i) Να βρείτε το μέγεθος ν του δείγματος.
ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων
iii) Στο παραπάνω δείγμα ποια ομάδα αίματος είναι: α) πιο συχνή; β) πιο σπάνια;
iv) Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που έχει:
α) ομάδα αίματος O; β) ομάδα αίματος A;

v) Πώς ονομάζεται η γραφική παράσταση με την οποία παρουσιάζουμε τα παραπάνω δεδομένα; Να σχεδιαστεί η γραφική αυτή παράσταση για τις συχνότητες ν_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

16. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται η ετήσια παραγωγή (σε τόνους) μιας περιοχής. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

Προιόν	Παραγωγή ν_i
Σιτάρι	240
Βαμβάκι	450
Καπνός	90
Καλαμπόκι	20

17. Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε βαθμούς Κελσίου):

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26	25	27	22	22	24
23	23	26	25	26	22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων
β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν:
i) Μικρότερη από 230^0C;
ii) Μεγαλύτερη από 240^0C;
iii) Τουλάχιστον 240^0C;

18. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	8	$0,4$				
2			10			
3	5	$0,25$	15			
4				$0,9$		
5					10	
Σύνολο						

19. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετ. συχνότητα f_i	Αθρ. σχετ. συχν. $F_i\%$
$1-5$				20
$5-9$				50
$9-13$				85
$13-17$				95
$17-21$				100
Σύνολο		200		

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

20. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής 400 οθονών τηλεόρασης από την παραγωγή ενός εργοστασίου.
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[400, 500)$	15			
$[500, 600)$	45			
$[6007500)$	60			
$[700, 800)$	75			
$[800, 900)$	70			
$[1000, 1100)$	60			
$[1100, 1200)$	50			
$[400, 500)$	25			
	400			

β) Να κάνετε: i) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων
ii) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
iii) Το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων

21. Σε 150 αυτοκίνητα μετρήθηκε ο χρόνος που απαιτήθηκε, ώστε από θέση στάσης ($0Km/h$) να αναπτύξουν στιγμιαία ταχύτητα $100Km/h$. Από τη μέτρηση προέκυψε ο διπλανός πίνακας.
α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.
δ) Ποιο είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων που χρειάστηκε από $21sec$ και περισσότερο για να αναπτύξει ταχύτητα $100Km/h$;

Χρόνος σε sec	Αριθμός αυτοκινήτων
$10-12$	3
$12-14$	21
$14-16$	54
$16-18$	39
$18-20$	15
$20-22$	9
$22-24$	6
$24-26$	3

2.2 Μέτρα θέσης και διασποράς

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Αν x_i είναι οι τιμές μιας μεταβλητής, f_i οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες και $\bar{x}$ η μέση τιμή, να αποδείξετε ότι:
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

2. Πως ορίζεται ο σταθμικός μέσος ν τιμών μιας μεταβλητής;

3. Τι ονομάζουμε διάμεσο ν παρατηρήσεων;

4. Τι ονομάζουμε εύρος ή κύμανση ενός συνόλου παρατηρήσεων;
Είναι αξιόπιστο μέτρο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής;

6. Πότε ένα δείγμα τιμών θεωρείται ομοιογενές;

7. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις.

   (α΄) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή.

   (β΄) Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm και η διακύμανση εκφράζεται σε cm.

   (γ΄) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

   (δ΄) Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς.

   (ε΄) Τα μέτρα ασυμμετρίας καθορίζουν τη μορφή της κατανομής.

   (στ΄) Τα μέτρα ασυμμετρίας εκφράζονται μόνο σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης.

8. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις.

   (α΄) Σε ένα δείγμα μεγέθους ν αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$. Τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με:
   Α. $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ Β. $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ Γ. $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$ Δ. $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$

   (β΄) Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με:
   Α. 2 τυπικές αποκλίσεις Β. 3 τυπικές αποκλίσεις Γ. 4 τυπικές αποκλίσεις Δ. 6 τυπικές αποκλίσεις

   (γ΄) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 15 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 9 και 21 είναι περίπου:
   Α. 34% Β. 68% Γ. 95% Δ. 47,5%

   (δ΄) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 40 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 35 και 50 είναι περίπου:
   Α. 47,5% Β. 68% Γ. 81,5% Δ. 34%

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

9. Το μέσο ύψος 25 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι $172cm$. Ποιό θα είναι το μέσο ύψος των μαθητών και των μαθητριών της τάξης αν:
α) φύγει ένας μαθητής με ύψος $176cm$;
β) έρθουν δύο μαθήτριες με ύψος $168cm$ και $170cm$;
γ) φύγουν δύο μαθητές με ύψος $180cm$ ο καθένας και έρθουν πέντε μαθήτριες με ύψος $174cm$ η καθεμία;

10. Ένα δοχείο περιέχει 5 σφαιρίδια που το καθένα φέρει τους αριθμούς $1, 2, 3, 3, 4, 5$ αντίστοιχα. Κάθε φορά που επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από το δοχείο, ο αριθμός του σημειώνεται και το σφαιρίδιο επανατοποθετείται στο δοχείο. Το πείραμα επαναλαμβάνεται 50 φορές και τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός	1	2	3	4	5
Συχνότητα	x	11	y	8	9

Αν η μέση τιμή είναι $2,7$ να προσδιορίσετε τις τιμές του x και του y.

Απ. x=15 , y=7

11. Η μέση επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών 10 μαθητών και 14 μαθητριών μιας τάξης είναι $14,75$. Αν η μέση επίδοση των μαθητριών είναι $15,5$, να βρείτε τη μέση επίδοση των μαθητών.

Απ. 13,7

12. Ένας αγρότης σημείωσε τον αριθμό των αυγών που συγκέντρωσε σε μια περίοδο 150 ημερών. Η κατανομή συχνοτήτων των αυγών που μάζεψε παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός αυγών	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Συχνότητα	1	2	4	6	9	13	18	22	35	30	10

α) Να υπολογιστεί η διάμεσος του αριθμού των αυγών.
β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αριθμού των αυγών.
γ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων και να σχολιαστεί η μορφή του.

13. Ο διπλανός πίνακας δίνει την ηλικία 22 πλοίων.
Να υπολογιστούν:
α) η μέση τιμή
β) η διάμεσος

Ηλικία σε χρόνια	ν_i
$[0,4)$	3
$[4,8)$	5
$[8,12)$	6
$[12,16)$	6
$[16,20]$	2

14. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητές τους. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

α)

x_i	1	2	3	4	5
f_i	$0,12$	$0,2$	$0,18$	$0,3$	$0,2$

με ν άρτιο.

β)

x_i	0	2	3	6	7	8	10	11
f_i	$0,15$	$0,12$	$0,1$	$0,12$	$0,08$	$0,2$	$0,13$	$0,1$

15. Δίνεται ο πίνακας:

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$\nu_i(x_i-\bar{x})^2$
$[4,6)$		7				
$[6,8)$		13				
$[8,10)$		17				
$[10,12)$		18				
$[12,14)$		29				
$[14,16)$		11				
$[16,18]$		5				
	Σύνολα					

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής της κατανομής.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

16. Τα ημερομίσθια ενός δείγματος 70 εργατών μιας βιομηχανίας δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αποδοχές σε	x_i	ν_i	x_i^2	$x_i\nu_i$	$x_i^2\nu_i$
$[30,35)$		8			
$[35,40)$		10			
$[40,45)$		16			
$[45,50)$		15			
$[50,55)$		10			
$[55,60)$		8			
$[60,65]$					
Σύνολα					

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής της κατανομής.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

17. Τα βάρη σε κιλά των 30 μελών μιας ομάδας αθλητών είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 74 & 52 & 67 & 68 & 71 & 76 & 86 & 81 & 73 & 68 & 64 & 75 & 71 & 57 & 67 \\ 57 & 59 & 72 & 79 & 64 & 63 & 70 & 74 & 77 & 79 & 65 & 68 & 76 & 83 & 61 \end{array}$$

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις πλάτους 6 κιλών και να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων απολύτων και αθροιστικών.

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

γ) Πόσοι αθλητές έχουν βάρος λιγότερο από 77 κιλά σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα;
Πόσοι ακριβώς αθλητές έχουν βάρος λιγότερο από 77 κιλά σύμφωνα με τις παρατηρήσεις;
Να εξηγήσετε γιατί έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα.

18. Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής είναι ίση με το μηδέν. Αν $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$ είναι οι τιμές της μεταβλητής και $\bar{x}$ η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \cdots = t_\nu = \bar{x}$.

19. Ο μέσος ν αριθμών ισούται με 5. Αν προσθέσουμε τον αριθμό 13 στους ν αριθμούς, ο νέος μέσος ισούται με 6. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών.
Απ. 7

20. Σε ένα δείγμα μεγέθους 25 δίνεται η μέση τιμή $10,2$ και η τυπική απόκλιση $2,1$. Να υπολογιστούν τα $\sum x_i$, $\sum x_i^2$.

Απ. 255 , 2711,25

21. Οι αριθμοί $\alpha, \beta, 8, 5, 7$ έχουν μέσο 6 και διακύμανση 2. Να βρεθούν οι τιμές των α και β, αν είναι $\alpha > \beta$.

[Απ. $\alpha = 6$, $\beta = 4$]

22. Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών ως προς το βάρος τους. Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από $45Kg$ έως $75Kg$ και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.
i) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος.
ii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

[Απ. i)$\bar{x} = \delta = 60Kg$, $R \simeq 30Kg$ ii)Είναι]

23. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητές τους.
α) Αν $\bar{x} = 2,25$, να συμπληρώσετε την τρίτη συχνότητα.
β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i
1	4
2	5
4	
5	1

24. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητές τους. Από τον πίνακα έχουν χαθεί η δεύτερη και η τέταρτη συχνότητα.
i) Αν $\bar{x} = 1,8$, να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων αυτών.
ii) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση.

Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i
0	3
1	
2	4
3	
4	1
5	1
Σύνολο	15

25. Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σε ένα μάθημα. Η μέση τιμή είναι $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s. Το επόμενο τετράμηνο η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξάνεται κατά 2 μονάδες.
i) Ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή και ποιά η νέα τυπική απόκλιση;
ii) Δείξτε ότι $\bar{x} = \dfrac{2CV_2}{CV_1 - CV_2}$.

26. Μία βιομηχανία κατασκευάζει 4 προιόντα Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστά 10% , 20% , 30% , 40% αντίστοιχα με το κόστος κατασκευής $5, 4, 3, 2$ αντίστοιχα.
i) Να υπολογιστεί το μέσο κόστος και ο συντελεστής μεταβλητότητας του κόστους κατασκευής των Α, Β, Γ, Δ.
ii) Να βρείτε πόσο τουλάχιστον πρέπει να αυξηθεί το κόστος κατασκευής κάθε προιόντος ώστε το κόστος κατασκευής των τεσσάρων προιόντων να είναι ομοιογενές.
iii) Αν ελαττωθεί το κόστος κατασκευής κάθε προιόντος κατά 10% και στη συνέχεια γίνει αύξηση κατασκευής κατά $0,3$ ανά μονάδα προιόντος να βρεθεί πόσο γίνεται ο συντελεστής μεταβολής CV.

[Απ. i)$\bar{x} = 3$, $CV = 33,3\%$ ii)≥ 7 iii)30%]

27. Θεωρούμε τη μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \cdots, X_k$ και τη μεταβλητή Y με τιμές $y_i = \dfrac{x_i - \alpha}{\beta}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$. Να βρεθούν οι τιμές των $\bar{y}$ και s_y αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση $\bar{x}$ της μεταβλητής X.

28. Η κατανομή των ημερομισθίων μιας επιχείρησης ακολουθεί την κανονική κατανομή και το 50% περίπου των υπαλλήλων έχει ημερομίσθιο μεγαλύτερο των 44 ενώ το 16% περίπου έχει ημερομίσθιο μικρότερο των 35.
α) Να βρεθεί η μέση τιμή των ημερομισθίων καθώς και η τυπική απόκλισή τους.
β) Αν 54 υπάλληλοι παίρνουν από 26 έως 35, να βρεθεί το συνολικό αριθμό των υπαλλήλων.
γ) Πόσοι υπάλληλοι παίρνουν ημερομίσθιο μεγαλύτερο των 62; δ) Να βρεθεί η διάμεσος και ο συντελεστής μεταβλητότητας των ημερομισθίων.
ε) Αν κάθε ημερομίσθιο αυξηθεί κατά 10%, ποιές θα είναι οι νέες τιμές των $\bar{x}, s$ και CV;

29. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει σιδεροσωλήνες. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς το μήκος είναι κανονική με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Το 95% των σωλήνων έχουν μήκος από $4,6$ έως $5,4$ μέτρα.
α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το εύρος της κατανομής.
β) Τι ποσοστό σωλήνων έχουν μήκος μεταξύ των $4,8$ και $5,6$ μέτρων;
γ) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική αν έχει μήκος μικρότερο των $4,4m$ ή μεγαλύτερο των $5,6m$. Αν το εργοστάσιο παράγει 50000 σωλήνες από τις οποίες οι 140 είναι ελαττωματικές, να εξεταστεί αν το εργοστάσιο παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας.

30. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο μια ορισμένη μέρα έχουν μέση διάρκεια ζωής 1400 ώρες και ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής είναι 5%.
α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.
β) Αν για τη διάρκεια ζωής $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ των λαμπτήρων ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 98245 \cdot 10^5$, να βρεθεί το πλήθος ν των λαμπτήρων.
γ) Αν το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή, να βρεθεί πόσοι λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής περισσότερο από 1470 ώρες.

31. Έστω x_i οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος ν παρατηρήσεων και s^2 είναι η διακύμανση. Να αποδείξετε ότι:
$$s^2 = 0 \Longleftrightarrow x_i = \bar{x}, \quad 1 \leq i \leq \nu$$

32. Αν $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των τιμών x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος, τότε να αποδείξετε ότι:
$$\nu_1(x_1 - \bar{x}) + \nu_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots + \nu_k(x_k - \bar{x}) = 0$$

33. Η μέση τιμή των τιμών $x_1, x_2, \cdots, x_k$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος είναι 0 και η τυπική απόκλισή τους είναι 1. Να αποδείξετε ότι:
$$\nu_1(x_1^2 - 1) + \nu_2(x_2^2 - 1) + \ldots + \nu_k(x_k^2 - 1) = 0$$

34. Θεωρούμε δύο μεταβλητές X και Y ενός δείγματος ν παρατηρήσεων με τιμές x_i και y_i αντίστοιχα $(1 \leq i \leq \nu)$. Οι τιμές των δύο μεταβλητών συνδέονται με τη σχέση $y_i = \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma$. Να αποδείξετε ότι:
$$\bar{y} = \alpha\overline{x^2} + \beta\bar{x} + \gamma = \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x} + \gamma + \alpha s_x^2$$

35. Αν c σταθερός αριθμός να αποδείξετε ότι:

α) $\bar{x} = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c) + c$

β) $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c)^2 - (c - \bar{x})^2$

γ) $\dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c)^2 \geq s^2$

Να εξηγήσετε τη σημασία της σχέσης **γ)**

36. Να αποδείξετε ότι: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i(x_i - \bar{x})$

37. Σε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων, x_i είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X και y_i είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Y. Αν $x_i + y_i$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Z, να αποδείξετε ότι:
$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + \frac{2}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

38. Να αποδείξετε ότι: $s^2 \neq \bar{x}$.

39. Σε μια ερώτηση στα μαθηματικά απάντησαν ν μαθητές σε χρόνους $t_1, t_2, ..., t_\nu$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + ... + (t_\nu - x)^2, x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 2$, ίσο με 8.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

β) Να αποδείξετε ότι : $g'(0) = -4\nu$.

γ) Να βρείτε το μικρότερο πλήθος ν ώστε το δείγμα $t_1, t_2, ..., t_\nu$ να είναι ομοιογενές.

δ) Αν $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 48$, Να βρείτε το πλήθος ν των μαθητών.

40. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις:
$$7\ ,\ 5\ ,\ \alpha\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ \beta\ ,\ 8\ ,\ 6\ ,\ \gamma\ ,\ 5\ ,\ 3\ ,$$

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ , έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.

β) Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $S_x = \sqrt{\dfrac{58}{11}}$ και να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Έστω $y_1, y_2, ..., y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, ..., x_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2. Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2.

Κεφάλαιο 3

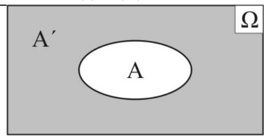
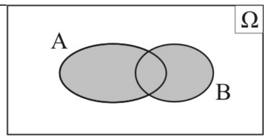
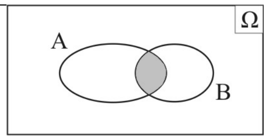
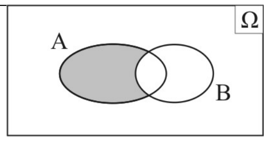
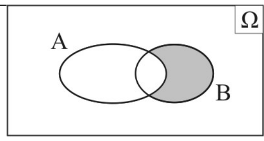
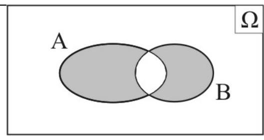
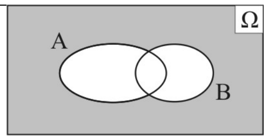
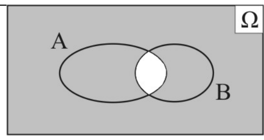
Πιθανότητες

3.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

3.1.1 Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Ποιό πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό και ποιό πείραμα τύχης;
2. Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης;
3. Τι λέμε ενδεχόμενο ή γεγονός ενός πειράματος τύχης;
4. Ποιό ενδεχόμενο λέγεται απλό και ποιό σύνθετο;
5. Ποιό είναι το βέβαιο και ποιό το αδύνατο ενδεχόμενο;
6. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;
   Πως αλλιώς λέμε τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα;

3.1.2 Πράξεις με ενδεχόμενα

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Επεξήγηση	Διάγραμμα Venn
A'	όχι A	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A	
$A \cup B$	A ή B	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	
$A \cap B$	A και B	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B	
$A - B = A \cap B'$	Διαφορά του B από το A	Το $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	
$B - A = B \cap A'$	Διαφορά του A από το B	Το $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A	
$(A - B) \cup (B - A)$	Διαφορά του B από το A ή διαφορά του A από το B	Το $(A-B) \cup (B-A)$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	όχι A ή B	Το $(A \cup B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A , B	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	όχι A και B	Το $(A \cap B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	

3.2 Η έννοια της πιθανότητας

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Τι αναφέρει ο νόμος των μεγάλων αριθμών ή στατιστική ομαλότητα.
2. Να διατυπώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.
3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) $P(\Omega) = 1$
   (β΄) $P(\emptyset) = 0$
   (γ΄) Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.
5. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
6. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:
$$P(A') = 1 - P(A)$$
7. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
8. Αν A , B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$
9. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

10. Σε ένα παιγνίδι μετέχουν δύο παίκτες και συμφωνούν να παίξουν τρία παιγνίδια. Σε κάθε παιγνίδι έχουμε νίκη ενός από τους δύο παίκτες.
    α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
    β) Ποια είναι η πιθανότητα και στα τρία παιγνίδια να έχουμε τον ίδιο νικητή;
11. Ένας τροχός τύχης έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Στους τρεις από αυτούς έχει την ένδειξη ”χάνεις”. Στους άλλους τρεις υπάρχει η ένδειξη κέρδος 1€, 2€, 5€ αντίστοιχα. Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2€. Αν στο δείκτη σταματήσει η ένδειξη ”Χάνεις” τότε ο παίκτης δεν εισπράττει τίποτα, διαφορετικά εισπράττει το ποσό που αναγράφεται στην ένδειξη. Αν ένας παίκτης παίξει 150 φορές, να βρεθεί
    α) Πόσες φορές αναμένεται να εισπράξει 5€.
    β) Τι ποσό αναμένεται να κερδίσει ή να χάσει συνολικά.

    Απ. α)25 β)Να χάσει 100€
12. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{8}{15}, P(B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
    $A \cup B$, A' , B' , $A' \cap B'$, $A' \cup B'$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cup B'$
13. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(\omega_1) = \lambda - \frac{3}{4}$, $P(\omega_2) = 2\mu - \frac{7}{2}$ όπου λ, μ θετικοί ακέραιοι. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$

Απ. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

14. Θεωρούμε ένα ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$[P(A)]^2 + [P'(A)]^2 = 1$$

. Να αποδείξετε ότι το A είναι το αδύνατο ή το βέβαιο ενδεχόμενο.

15. Ένα Γυμνάσιο έχει 24 εκπαιδευτικούς από τους οποίους οι 14 είναι καθηγήτριες. Οι Μαθηματικοί είναι 4, από τους οποίους 3 είναι καθηγητές και μια καθηγήτρια. Αν επιλέξουμε έναν εκπαιδευτικό, να βρείτε την πιθανότητα να είναι καθηγητής ή Μαθηματικός.

Απ. $\frac{11}{24}$

16. Σε μια πόλη κυκλοφορούν δύο περιοδικά, το ΑΛΦΑ και το ΒΗΤΑ. Το 25% των κατοίκων έχει διαπιστωθεί ότι διαβάζει το ΑΛΦΑ, το 85% δεν διαβάζει το ΒΗΤΑ, ενώ το 38% των κατοίκων διαβάζει ένα τουλάχιστον από τα δύο περιοδικά.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) Ένας κάτοικος να διαβάζει και τα δύο περιοδικά.

β) Ένας κάτοικος να μην διαβάζει κανένα περιοδικό.

Απ. α)2% β)62%

17. Έχει διαπιστωθεί ότι το 68% των ατόμων που εργάζονται σε μία επιχείρηση γνωρίζει Αγγλικά, το 16% γνωρίζει Γερμανικά, ενώ το 26% δεν γνωρίζει καμμιά από τις δύο γλώσσες. Να βρείτε την πιθανότητα ένα άτομο να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες.

Απ. 10%

18. Ένα παλιό αυτοκίνητο χαλάει 65% από βλάβη μηχανής, 20% από αμέλεια οδηγού και 5% Από βλάβη μηχανής και αμέλεια οδηγού. Επίσης χαλάει και από άλλες αιτίες. Ποιά είναι η πιθανότητα να χαλάσει το αυτοκίνητο μόνο από βλάβη μηχανής ή μόνο από αμέλεια οδηγού;

Απ. 75%

19. Ο ποιοτικός έλεγχος σε ένα μηχάνημα που παράγεται από μια βιομηχανία έδειξε ότι: Η πιθανότητα να μην λειτουργεί είναι 4%. Η πιθανότητα να έχει άλλο ελάττωμα είναι 6%. Η πιθανότητα να μην λειτουργεί και να έχει άλλο ελάττωμα είναι 2%.
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρεθεί η πιθανότητα:

i) Να μην λειτουργεί ή να έχει άλλο ελάττωμα.

ii) Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει άλλο ελάττωμα μόνο.

Απ. i)8% ii)6%

20. Μια ομάδα έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει το πρωτάθλημα, 35% να κερδίσει το κύπελο και 77% να κερδίσει έναν τουλάχιστον τίτλο. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να κερδίσει και τους δύο τίτλους.

ii) Να μην κερδίσει κανέναν τίτλο.

iii) Να κερδίσει μόνο το πρωτάθλημα.

Απ. i)8% ii)23% iii)42%

21. Η πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία, να είναι αριστερόχειρας είναι $\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να είναι αριστερόχειρας και να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{12}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να είναι αριστερόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

β) Να είναι αριστερόχειρας αλλά να μην φοράει γυαλιά.

γ) Να είναι δεξιόχειρας και να μην φοράει γυαλιά.

δ) Να είναι δεξιόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

Απ. α) β) γ) δ)

22. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{3}{4}$, $P(B) = \dfrac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι:
α) $P(A \cup B) \geq 0,75$
β) $\dfrac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{3}{8}$.

23. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.
β) Να αποδείξετε ότι: $P(A' \cap B) \leq \dfrac{1}{3}$.

24. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4} \leq P(B) \leq \dfrac{3}{4}$.

25. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:
$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\}$
$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}$

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(B \cup A')$.

β) Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

γ) Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B - A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.