

Άσκηση 1 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $A(x, y)$, αν αυτές επαληθεύουν την ισότητα:

$$x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 = 0$$

Σκέψεις για τη λύση

Τι είναι αυτό που έχει δοθεί στην άσκηση; Μία ισότητα την οποία επαληθεύουν οι x, y .

Τι μας ζητείται; Να βρούμε τους x, y , δηλαδή να λύσουμε μία εξίσωση με δύο αγνώστους.

Κάποιες ενέργειες θα μπορούσαν να είναι:

(α) Να την αντιμετωπίσουμε ως μία εξίσωση

(β) Να κάνουμε κάποιο μετασχηματισμό ώστε να φθάσουμε σε μία μορφή που θα μας δώσει μία σχέση για το x και μία σχέση για το y . Οι σχέσεις μπορεί να αναφέρονται σε αλγεβρικές εκφράσεις των x, y

Ας προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τις δύο πορείες.

(α) Πως θα λύσουμε όμως μία εξίσωση με δύο αγνώστους; Εμείς τι ξέρουμε;

Γνωρίζουμε να λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο.

Εδώ όμως έχουμε δύο αγνώστους. Αν δεν πάρουμε υπόψη μας τον έναν άγνωστο, π.χ. τον y , τότε πως διαμορφώνεται η ισότητα;

Θα είχαμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο τον x , την οποία θα λύναμε εύκολα. Μήπως να θεωρούσαμε τον y σαν κάποιο συγκεκριμένο αριθμό οπότε η ισότητα θα μπορούσε να γραφεί

$$x^2 - (6y)x + (11y^2 - 8y + 8) = 0$$

$$\text{Τότε, } \Delta = (-6y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11y^2 - 8y + 8) = \dots = -8(y - 2)^2 \leq 0$$

Από αυτήν μπορούμε να βρούμε το y και μετά το x .

(β) Ποιό μετασχηματισμό πρέπει να κάνουμε προκειμένου να πάρουμε μία έκφραση των x, y και άλλη μία έκφραση των x, y (κατά προτίμηση πρωτοβάθμιες);

Μπορούμε να σκεφθούμε μία ισότητα, πιθανόν με τετράγωνα μιας και υπάρχουν αυτά στη δεδομένη σχέση, που θα μας έδινε μία σχέση και μία άλλη σχέση;

Το πιο απλό που μπορούμε να γράψουμε είναι: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Επομένως θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το πρώτο μέλος της δεδομένης ισότητας ως άθροισμα τετραγώνων.

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 - (6y)x + (11y^2 - 8y + 8) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x , έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$.
Είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11y^2 - 8y + 8) \\ &= 36y^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11y^2 - 8y + 8) \\ &= 4(9y^2 - 11y^2 + 8y - 8) \\ &= 4(-2y^2 + 8y - 8) \\ &= -8(y^2 - 4y + 4) \\ &= -8(y - 2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Επομένως η (1) έχει λύση αν και μόνο αν $-8(y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Τότε: $x = -\frac{-6y}{2} = 3y = 6$.

(β)

$$\begin{aligned}x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 &= 0 \Leftrightarrow \\x^2 - 6xy + 9y^2 + 2y^2 - 8y + 8 &= 0 \Leftrightarrow \\(x^2 - 6xy + 9y^2) + 2(y^2 - 4y + 4) &= 0 \Leftrightarrow \\(x - 3y)^2 + 2(y - 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\x - 3y = 0 \text{ και } y - 2 = 0 &\Leftrightarrow \\x = 6 \text{ και } y = 2\end{aligned}$$

Σχόλια

- Στην πρώτη λύση βλέπουμε την ισχύ της μεθόδου επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η δυσκολία που μπορεί να προκύψει είναι η δημιουργία της ταυτότητας στη διακρίνουσα.
- Στη δεύτερη λύση η δυσκολία βρίσκεται στη δημιουργία των τετραγώνων. Η διάσπαση ενός ή περισσότερων όρων και έπειτα η ομαδοποίησή τους για τη δημιουργία τετραγώνων παραστάσεων αρκετές φορές είναι περίπλοκη και απαιτεί αρκετή φαντασία.
Αν για παράδειγμα έπρεπε να φθάσουμε

$$(2x - 4y - 3)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$$

θα είχαμε μεγάλη δυσκολία. Αν όμως το επιτύχουμε θα έχουμε μία γρήγορη και κομψή επίλυση του προβλήματος.

Άσκηση 2 Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει:

$$|\alpha - \beta| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0$$

τότε είναι $\alpha = \beta$.

Σκέψεις για τη λύση

Ποιά είναι τα δεδομένα; Για τους α, β ισχύει $|\alpha - \beta| \leq \varepsilon$.

Τι είναι το ε ; Όχι κάποιος συγκεκριμένος, αλλά οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός.

Τι ζητείται να αποδείξουμε; $\alpha = \beta$. Η απόλυτη τιμή έχει τη διαφορά $\alpha - \beta$. Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά αυτή ισούται με 0.

Αν θέσουμε $x = \alpha - \beta$, τότε η άσκηση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν x είναι πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

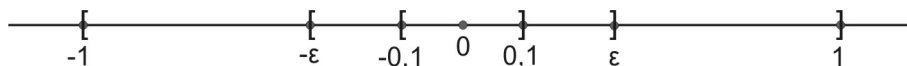
$$|x| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0$$

τότε είναι $x = 0$.

Μπορεί να γραφεί αλλιώς η δεδομένη σχέση;

$$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0.$$

Ας θέσουμε μερικές τιμές στο ε . Για παράδειγμα $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = 0,1$ ή $\varepsilon = 10^{-5}$. Ένα σχήμα πιθανόν να μας βοηθούσε.



Τι παρατηρούμε; Καθώς αλλάζουμε τις τιμές στο ε , ο μόνος αριθμός που φαίνεται να επαληθεύει τη δοθείσα σχέση είναι ο $x = 0$.

Πως θα το αποδείξουμε όμως αυτό; Ίσως η απευθείας απόδειξη δεν είναι δυνατή.

Να δοκιμάσουμε έμεση αντιμετώπιση του προβλήματος. Ας επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την "απαγωγή σε άτοπο".

Να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$. Αφού στο ε μπορούμε να θέσουμε οποιονδήποτε θετικό, τότε να θέσουμε μία έκφραση του x .

Λύση

Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq \beta$. Θέτουμε $x = \alpha - \beta$, οπότε $x \neq 0$.

- Έστω ότι $x > 0$. Τότε για $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ η δοθείσα σχέση δίνει:
 $|x| \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x \leq x \Leftrightarrow x \leq 0$, άτοπο.
- Έστω ότι $x < 0$. Τότε για $\varepsilon = -\frac{x}{2} > 0$ η δοθείσα σχέση δίνει:
 $|x| \leq -\frac{x}{2} \Leftrightarrow -x \leq -\frac{x}{2} \Leftrightarrow -2x \leq -x \Leftrightarrow x \geq 0$, άτοπο.

Επομένως θα είναι $\alpha = \beta$.

Σχόλια

- Η προσπάθεια για ευθεία απόδειξη δεν απέδωσε αφού το ε μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή. Οι συγκεκριμένες τιμές στο ε μας δείχνουν την κατάσταση που υπάρχει. Όσο αλλάζουμε τις τιμές του ε μόνο η $x = 0$ έχει την ιδιότητα να βρίσκεται σε όλα τα ανοικτά διαστήματα $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
- Θέσαμε $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Θα μπορούσαμε να θέσουμε π.χ. $\varepsilon = \frac{x}{3}$ ή κάποι άλλο μονώνυμο του x με συντελεστή μικρότερο ή ίσο του 1.
- Αν στη θέση του $\leq$ είχαμε $<$, τότε η απόδειξη θα ήταν πιο εύκολη. Αρκεί να θέταμε $\varepsilon = |x|$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο.

Άσκηση 3 Αν α, β, γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 > \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{2}$$

Σκέψεις για τη λύση

Το δεδομένο είναι ότι οι α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου.

Το ζητούμενο είναι μία ανισότητα στην οποία υπάρχουν τέταρτες και δεύτερες δυνάμεις των α, β, γ .

Τι μπορούμε να συνάγουμε εφ' όσον τα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου;

Κατ' αρχήν ότι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\gamma > 0$.

Κάποια άλλη σχέση; Μήπως κάποια ανισότητα, αφού το αποτέλεσμα είναι μία ανισότητα;

Το τρίγωνο είναι τυχαίο. Τι ισχύει για τις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου;

Η τριγωνική ανισότητα: $\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta - \gamma > 0$. Όμοια $\beta + \gamma - \alpha > 0$ και $\gamma + \alpha - \beta > 0$.

Ας δούμε το αποτέλεσμα σε ισοδύναμες μορφές του:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &> \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{2} \Leftrightarrow \\ 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 &> \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \Leftrightarrow \\ 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 &> 0\end{aligned}\quad (2)$$

Μας θυμίζει τίποτε το πρώτο μέλος της ανισότητας, όπως διαμορφώθηκε; Μήπως είναι κάποια ταυτότητα; Δεν είναι κάποια συνηθισμένη, αλλά μπορεί να την έχουμε συναντήσει κάποια στιγμή.

Αν όχι, τότε ας προσπαθήσουμε να βρούμε με τι μπορεί να ισούται.

Μία σκέψη είναι να την παραγοντοποιήσουμε.

Ας κάνουμε όμως εδώ μία "ριψοκίνδυνη" ενέργεια:

Να εικάσουμε το αποτέλεσμα. Πως να ήταν αυτή παραγοντοποιημένη;

Παρατηρούμε ότι η παράσταση είναι συμμετρική και οι μεγαλύτερες δυνάμεις της είναι τέταρτες.

Άρα οι παράγοντες θα πρέπει να παρουσιάζουν κάποια συμμετρικότητα και πολλαπλασιαζόμενοι να δίνουν τέταρτες δυνάμεις.

Ας δούμε πάλι τα δεδομένα και τι είχαμε εξάγει:

$\alpha + \beta - \gamma > 0$, $\beta + \gamma - \alpha > 0$ και $\gamma + \alpha - \beta > 0$.

Το γινόμενο τους θα δώσει τρίτες δυνάμεις. Επομένως χρειαζόμαστε άλλη μία παράσταση, η οποία να είναι συμμετρική και θετική. Μήπως η $\alpha + \beta + \gamma > 0$;

Ας εκτελέσουμε τις πράξεις στην παράσταση: $(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)$

Το βρήκαμε. Αυτό ήταν.

Λύση

Αφού οι α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου, από την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε:

$$\alpha + \beta - \gamma > 0, \quad \beta + \gamma - \alpha > 0 \quad \text{και} \quad \gamma + \alpha - \beta > 0$$

Τότε:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma) &> 0 \Rightarrow \\ \dots &> 0 \Rightarrow \\ 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 &> 0 \Rightarrow \\ 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 &> \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \Rightarrow \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &> \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{2}\end{aligned}$$

Σχόλια

- Η ισότητα

$$(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

είναι γνωστή ως ταυτότητα του De Moivre.

- Η παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της (2) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 \\ &= 4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2) \\ &= (2\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 \\ &= (2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \\ &= [(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2][\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2] \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta) \end{aligned}$$

- Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε το θέμα ως εξής:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 + (\gamma^2)^2 \geq \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$$

Αρα όταν οι α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου θα έχουμε:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \geq \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 > \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{2}$$

Η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.