

Άσκηση 1 Να αποδείξετε ότι:

$$\epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ > 1$$

Σκέψεις για τη λύση

Στην εκφώνηση δεν έχει δοθεί κάποια συνθήκη. Στη σχέση που ζητείται να αποδείξουμε έχουμε: Μία ανισότητα στην οποία υπάρχουν τετράγωνα τριγωνομετρικών αριθμών.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις γωνίες είναι μικρότερες των 45° . Αν κάποια ήταν μεγαλύτερη ή ίση των 45° , τότε το αποτέλεσμα προφανώς θα ίσχυε.

Μας έχουν δοθεί συγκεκριμένες γωνίες και όχι τυχαίες με μεταβλητές.

Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε;

Κάποιες ενέργειες θα μπορούσαν να είναι:

(α) Να υπολογίσουμε τις εφαπτόμενες των γωνιών

(β) Να ξεκινήσουμε αλγεβρικά για τη λύση της ανισότητας βρίσκοντας κάποια σχέση μεταξύ των γωνιών, χωρίς να μας ενδιαφέρει το μέτρο κάθε γωνίας

(α) Πως να υπολογίσουμε την $\epsilon\phi 15^\circ$; Μας θυμίζει την εφαρμογή στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της διαφοράς γωνιών: $\epsilon\phi 15^\circ = \epsilon\phi(45^\circ - 30^\circ)$

Την $\epsilon\phi 35^\circ$; Μήπως $\epsilon\phi 35^\circ = \epsilon\phi(20^\circ + 15^\circ)$;

Την $\epsilon\phi 40^\circ$; Μήπως $\epsilon\phi 40^\circ = \epsilon\phi(2 \cdot 20^\circ)$;

Μα τότε αρκεί να υπολογιστεί η $\epsilon\phi 20^\circ$. Και με ποιό τρόπο; Κάποια σχέση με τις 30° , 45° ή 60° ; Υπάρχει σχέση: $60^\circ = 3 \cdot 20^\circ$.

$$\text{Όμως } \epsilon\phi(3\alpha) = \epsilon\phi(2\alpha + \alpha) = \dots = \frac{3\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi^3\alpha}{1 - 3\epsilon\phi^2\alpha}$$

$$\text{Τότε: } \epsilon\phi 60^\circ = \frac{3\epsilon\phi 20^\circ - \epsilon\phi^3 20^\circ}{1 - 3\epsilon\phi^2 20^\circ} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \epsilon\phi^3 20^\circ - 3\sqrt{3}\epsilon\phi^2 20^\circ - 3\epsilon\phi 20^\circ + \sqrt{3} = 0$$

η οποία είναι τρίτου βαθμού εξίσωση με άγνωστο την $\epsilon\phi 20^\circ$.

(β) Αν ξεκινούσαμε αλγεβρικά και γράφαμε $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ τι θα λέγαμε;

Αν ελαττώναμε τις μεταβλητές: $x^2 + y^2 \geq \dots$ ή ακόμα $x^2 \geq \dots$.

Για την τελευταία $x^2 \geq 0$. Για την προηγούμενη $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Τότε:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$y^2 + z^2 \geq 2yz$$

$$z^2 + x^2 \geq 2zx$$

$$\hline 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Η ισότητα ισχύει όταν: $x = y = z$.

$$\text{Επομένως } \epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ > \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 40^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ$$

Τι θα θέλαμε να συμβαίνει; Προφανώς: $\epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 40^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ = 1$.

Πως θα αποδείξουμε αυτή την ισότητα; Όχι με τον υπολογισμό των εφαπτόμενων.

Μήπως μπορούμε να σκεφθούμε κάποια βασική εφαρμογή;

Ποιά σχέση μπορεί να συνδέει τις γωνίες;

Παρατηρούμε ότι: $15^\circ + 35^\circ + 40^\circ = 90^\circ$. Τότε $15^\circ + 35^\circ = 90^\circ - 40^\circ$ και $\epsilon\phi(15^\circ + 35^\circ) = \epsilon\phi(90^\circ - 40^\circ)$ απ' όπου προκύπτει αυτό που ελπίζαμε.

Λύση Είναι

$$\epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ > 2\epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ$$

$$\epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ > 2\epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ$$

$$\epsilon\phi^2 40^\circ + \epsilon\phi^2 15^\circ > 2\epsilon\phi 40^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$2(\epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ) > 2(\epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 40^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ) \Rightarrow$$
$$\epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ > \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 40^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}15^\circ + 35^\circ + 40^\circ &= 90^\circ \Rightarrow \\15^\circ + 35^\circ &= 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow \\ \epsilon\phi(15^\circ + 35^\circ) &= \epsilon\phi(90^\circ - 40^\circ) \Rightarrow \\ \frac{\epsilon\phi 15^\circ + \epsilon\phi 35^\circ}{1 - \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ} &= \sigma\phi 40^\circ \\ \frac{\epsilon\phi 15^\circ + \epsilon\phi 35^\circ}{1 - \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ} &= \frac{1}{\epsilon\phi 40^\circ} \Rightarrow \\ (\epsilon\phi 15^\circ + \epsilon\phi 35^\circ)\epsilon\phi 40^\circ &= 1 - \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ \Rightarrow \\ \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ &= 1 - \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ \Rightarrow \\ \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 35^\circ \cdot \epsilon\phi 40^\circ + \epsilon\phi 15^\circ \cdot \epsilon\phi 35^\circ &= 1\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\epsilon\phi^2 15^\circ + \epsilon\phi^2 35^\circ + \epsilon\phi^2 40^\circ > 1$$

Σχόλια

- Η πορεία (α) καταλήγει σε εξίσωση τρίτου βαθμού και υπάρχει δυσκολία στην επίλυσή της. Αν την λύναμε θα είχαμε στη συνέχεια και άλλους υπολογισμούς και πιθανόν να καταλήγαμε σε πολύπλοκες αριθμητικές εκφράσεις που θα ήταν δύσκολο να τις χειριστούμε. Παρ' όλα αυτά όμως είδαμε πως εφαρμόζονται τριγωνομετρικές ταυτότητες.
- Στην πορεία (β) βλέπουμε την εμφάνιση της κλασσικής αλγεβρικής ανισότητας καθώς και της τριγωνομετρικής με τις εφαπτόμενες.