

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

Μονάδες 9

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο \mathbb{R}

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ