

1. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις

$$i) \frac{3}{4 - \frac{3}{4 - \frac{3}{2}}} \quad ii) \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}} \quad iii) \left(\frac{-x^2 y^{-3}}{x^{-1} y^{-4}} \right)^{-2} \quad iv) \left(\frac{-2 x^3 y^{-5}}{6 x^{-2} y^{-2}} \right)^3$$

2. Να αποδείξετε ότι i)
- $a^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
- β)
- $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$

ii) Να παραγοντοποιήσετε κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις, γράφοντας τον συντελεστή του μεσαίου όρου ως άθροισμα ή διαφορά δύο αριθμών, των οποίων το γινόμενο να είναι ίσο με το τρίτο όρο ή τον συντελεστή του α) $a^2 + 5a + 6$ β) $a^4 + a^2 - 20$ γ) $x^2 - 4x + 3$ δ) $x^2 - 3x + 2$ ε) $x^2 - 7x + 12$

3. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

$$x^3 + x - 1010 \quad x^4 + 4 \quad (\beta + \alpha + 1)^2 + 8\alpha(\beta + \alpha + 1) + 15\alpha^2$$

$$\alpha^2(\beta^2 + 1 - \alpha^2) - \beta^2 \quad \alpha^{16} - 1 \quad \alpha^2 - \beta^2 - (\gamma^2 - 2\beta\gamma)$$

4. i) Αν ισχύει
- $(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 = 4(\alpha\beta + \beta\gamma)$
- , να αποδείξετε ότι
- $\alpha = \beta = \gamma$

ii) Να υπολογίσετε τα x και y, αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$A) \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{2x^2+4}{x^2-4} \quad B) \frac{|x-1|}{2} + \frac{2|x-1|}{3} = \frac{|x-1|}{4} + |x-1|$$

$$\Gamma) 2x^5 + x^2 = 0$$

$$\Gamma) x^7 + 8x^4 - 81x^3 = 648$$

$$\Delta) x^2 - 14|x| = -49$$

6. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση:
- $(x-1)^2 - 5 = \lambda \cdot (5-x-2\lambda) + (x-2\lambda)^2$
- (λ, παράμετρος)

7. Να βρεθεί για ποια τιμή του λ η εξίσωση
- $(1+2\lambda)x = 1 - 4\lambda^2$
- , έχει μόνο μία λύση και μάλιστα αρνητική.

8. Να αποδείξετε ότι για κάθε
- a, β, γ
- ισχύει:
- $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 29 \geq 6\alpha + 4\beta + 8\gamma$
- . Πότε ισχύει το ίσον;

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$A) \frac{3x-(x-3)}{4} - \frac{3x}{16} \geq \frac{x-5}{8} + 1$$

$$B) \frac{3|x+1|-2}{2} - \frac{|3x+3|-3}{5} > 2$$

$$\Gamma) |2004 \cdot x^{2000} - 2000 \cdot x^{2003} - 63.0007| > -1$$

$$\Gamma) |x^{2004} - 2004| < -2004$$

10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$A) \frac{5x-1}{6} \geq \frac{4x-1}{5} \text{ και } \frac{6x-1}{7} \geq \frac{7x-1}{8}$$

$$B) 2 \leq |x-1| < 7$$

$$\Gamma) \frac{2x+1}{7} - \frac{(x-1)(x-2)}{2} > \frac{x-2}{2} - 2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 \text{ και } -4x < 3$$

$$\Delta) \frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} > \frac{5}{4}x - \left(\frac{1}{2}x+2\right)^2 \text{ και } -5x < -2$$

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό
- $x \neq 0$
- ισχύει:
- $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$

12. Αν
- $|x-1| < 2003$
- και
- $|y+1| < 1$
- να δείξετε ότι:
- $|x+y| < 2004$
- .

13. Αν $a \neq \beta \neq \gamma$ να δείξετε ότι: $\left| \frac{a-\beta}{a-\beta} + \frac{a-\gamma}{a-\gamma} + \frac{2|\beta-\gamma|}{\beta-\gamma} \right| \leq 4$

14. Αν $0 < a < \beta < \gamma$, να απλοποιηθεί η παράσταση: $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\gamma + 1|$

15. Να απλοποιηθεί ή η παράσταση: $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$ αν $x > 0$.

16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}} - \frac{1}{\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}} + \frac{1}{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}} = 0$

17. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε να ορίζεται η παράσταση $A = \sqrt{\lambda - 9 + |x|}$ για κάθε x .

18. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $\sqrt[3]{2\sqrt{4^5\sqrt{2}\sqrt{8}}}$ και $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

19. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύουν $2 < a < 5$ και $3 \leq \beta \leq 7$, κάθε παράσταση της πρώτης στήλης ανήκει σε ένα μόνο διάστημα της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μια γραμμή κάθε παράσταση με το αντίστοιχο διάστημα.

παράσταση	διάστημα
$a + \beta$	$[-19, -7]$
$\beta - a$	$(-9, -3)$
$1 - 2a$	$(5, 12]$
$2 - 3\beta$	$(5, 12)$
	$[-9, -3)$
	$(-2, 5)$

20. Να συμπληρωθεί ο πίνακας όπως δείχνει η πρώτη του γραμμή.

Ανίσωση	Απόλυτη τιμή	Απόσταση
$x < -4$ ή $x > 4$	$ x > 4$	$d(x, 0) > 4$
		$d(x, 5) > 2$
	$ x < 8$	
$3 \leq x \leq 11$		
$x < -2$ ή $x > 4$		
$-3 < x < 1$		

21. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές παραστάσεις και στη δεύτερη στήλη δίνονται οι ίσες τους παραστάσεις. Να συνδέσετε τις παραστάσεις της πρώτης στήλης με τις αντίστοιχές τους της δεύτερης στήλης.

Παραστάσεις			Ίσες τους παραστάσεις
$\sqrt{\sqrt{x}}, x \geq 0$	•	•	$\frac{\sqrt{x}}{x}$
$\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{xy}}, x, y > 0$	•	•	$\sqrt{ x }$

$\sqrt[4]{x^2}, x \text{ πραγματικός}$	•	•	$\sqrt[3]{x^5}$
$\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^6}}, x > 0$	•	•	$\sqrt[4]{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$	•	•	x^2
$\sqrt[12]{x^4}, x \text{ πραγματικός}$	•	•	$\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$
$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$	•	•	$\sqrt[3]{ x }$

22) Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνει τιμές η παράσταση

α) $2\alpha^2 - \beta$ αν γνωρίζουμε ότι $1 < \alpha < 2$ και $2 < \beta < 3$

β) $3\beta^2 - \alpha$ αν γνωρίζουμε ότι $-3 < \alpha < -2$ και $5 < \beta < 6$