Ερωτήσεις ανάπτυξης

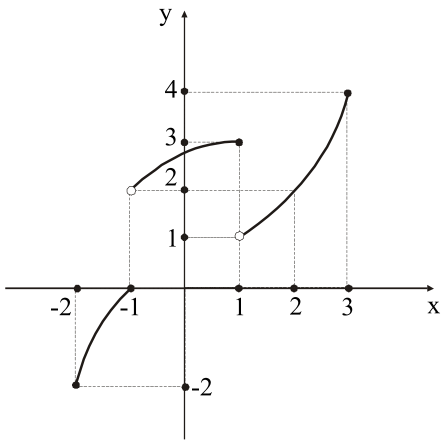
1. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ στ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$



2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}$.

α) Να βρείτε το D_f.

β) Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

3. ** Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^\nu - 1}{x - 1}$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-x)^\nu - 1}{x}$.

4. ** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + ημx}{x}$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx}{\sqrt{x}}$ γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1 - 2x}{x}$

δ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημ5x}{ημ7x}$ ε) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{εφ2x}{ημx}$

5. ** Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος ν σε καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx + ημ2x + ... + ημνx}{x} = 28$

β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx \cdot ημ2x \cdot ... \cdot ημνx}{x^ν} = 120$

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $\quad g(x) = x^2 - 4$

$h(x) = x^2 - 7x + 10$ $\quad φ(x) = x^2 - 6x + 8$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} φ(x)$.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{h(x)}{φ(x)}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{φ(x)}{f(x)}$.

γ) Τι παρατηρείτε;

δ) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας.

7. ** Αν $|x| < 1$ και $|f(x) - 3| \le |x|$, $|g(x) + 4| \le |x|$, να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) + g(x))$ $\qquad$ β) $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) \cdot g(x))$

8. ** Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια στο $x = x_0$:

α) της $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{|x|}$, $x_0 = 0$ $\qquad$ β) της $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

9. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \dfrac{3x+4}{(x-1)^2}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

$$h(x) = \frac{x^2+3x+7}{(x-1)^2}, \qquad \varphi(x) = \frac{5x+6}{(x-1)^2}$$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x)$.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} [f(x) - g(x)]$, $\lim\limits_{x\to 1} [h(x) - \varphi(x)]$.

γ) Τι παρατηρείτε;

δ) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας.

10. ** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 2 \\ 4 + 2x & x \geq 2 \end{cases}$, στο (0, 2) και στο [0, 2]

β) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$ γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 2x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

11. ** Έστω η συνάρτηση g συνεχής στο 0 και ισχύουν g (0) = 0 και $|f(x)| \leq |g(x)|$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

12. ** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο x_0, ώστε $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{ημ2h} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = 0$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

13. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & αν\ x < 1 \\ x^2, & αν\ x \geq 1 \end{cases} \quad και \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & αν\ x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & αν\ x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ τις συναρτήσεις:

$$f + g \qquad f - g \qquad f \cdot g \qquad 3f \qquad \frac{1}{g} \qquad \frac{f}{g(f)} \qquad \sqrt[3]{f}$$

14. ** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και $|f(x)| \leq |x^2 - 5x + 6|$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και στο σημείο $x_0 = 3$.

15. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 - συνx}{x}$, $x \neq 0$. Είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή f (0) με τέτοιο τρόπο, ώστε η f να είναι συνεχής στο R;

16. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3^x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 - x, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.

17. ** Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x \cdot ημ\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x \cdot συν\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

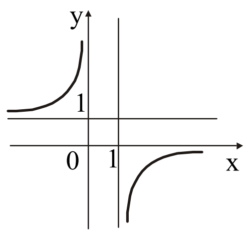
γ) $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

18. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - \kappa x^2, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το $\kappa \in R$, ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

β) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

19. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

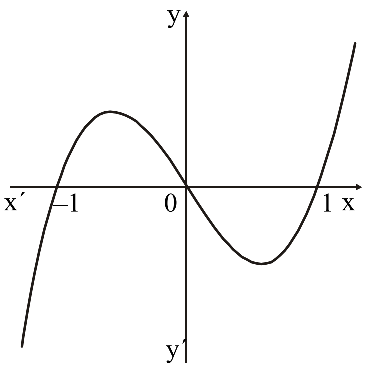


α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)}$;

20. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα όρια:



α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

21. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ β) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$ δ) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$

22. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - 7^x)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x}$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^x - 8^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^x}$ δ) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1 - x^3}{|x| + 2}}$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} \{\ell n (x - 1) - 2 \ell n (x + 1)\}$

23. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot ημ \frac{1}{x})$

β) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot ημ \frac{1}{x})$

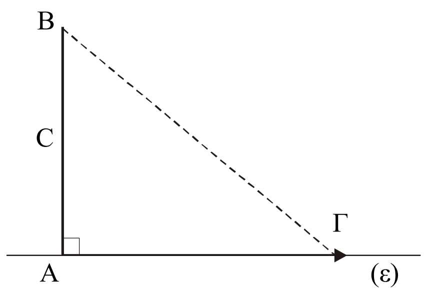
γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot ημ^{ρ} \frac{1}{x})$ με $ρ \in N^*$ και $ρ \geq 2$

24. ** Αν $f(x) = \dfrac{2κ}{κe^{x} + 1}$ με $κ > 0$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

25. ** Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το Α επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ΒΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.



26. ** Αν $f(x) = \frac{x}{4-x}$ και $g(x) = \ell n \frac{x}{4-x}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

27. ** Αν $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού το $R \setminus \{0\}$:

α) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

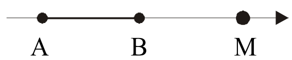
β) να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

28. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(1 - \ell nx)^2$, $x > 0$.

Ποιο είναι το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

29. ** Αν $f(x) = \frac{1}{2 - e^{\frac{x}{2}}}$, να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

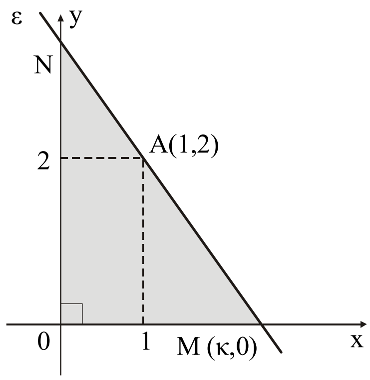
30. ** Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και στην προέκτασή του προς το Β παίρνουμε σημείο Μ. Να βρείτε το όριο του λόγου $\frac{AM}{BM}$, καθώς το Μ απομακρύνεται στο άπειρο.



31. ** Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α (1, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα Μ και Ν αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου Μ.

β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \to +\infty$ και όταν $\kappa \to 1$.

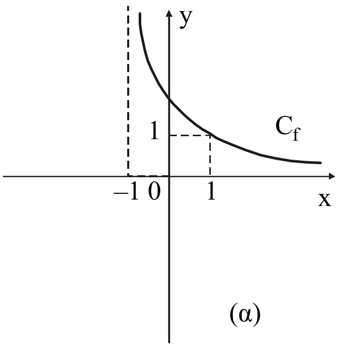


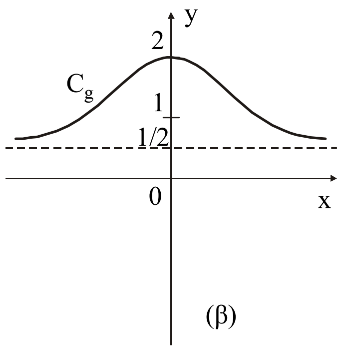
32. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x}{x^2 - 4}$, $\alpha, \beta \in R$.

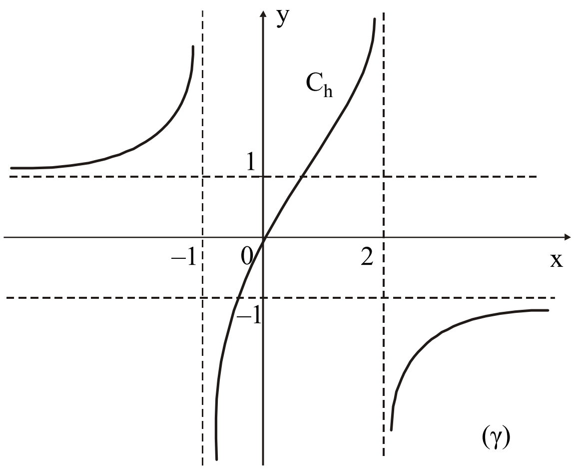
α) Για ποια τιμή του α η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 2$;

β) Για την τιμή του α που βρήκατε και για $\beta \neq -4$, να αποδείξετε ότι η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

33. ** Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



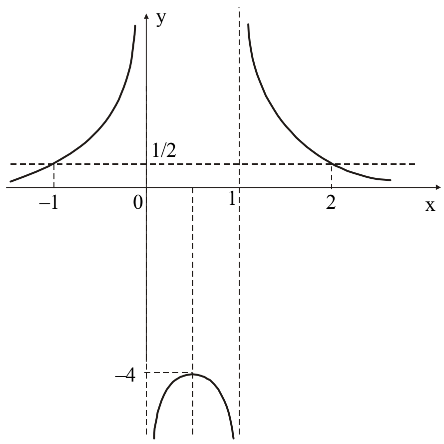




α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (κατακόρυφες, οριζόντιες).

34. ** Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f.

β) Να βρεθούν τα όρια:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

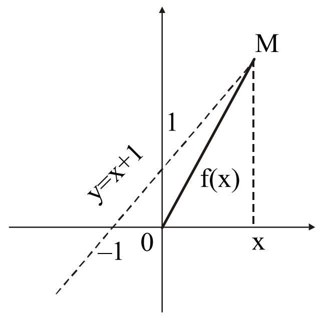
γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω να προσδιορίσετε τις οριακές τιμές της $\frac{1}{f}$ στα σημεία του ερωτήματος (β).

δ) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ξέρετε ότι είναι ένας από τους παρακάτω:

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{6x+5},\quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x},\quad f_3(x) = \frac{1}{2\left|x^2 - 1\right|},\quad f_4(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

35. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση y = x + 1 και το σημείο της M με τετμημένη x. Η απόσταση από το σημείο O δίνεται από τη συνάρτηση f (x) = (OM) για κάθε $x \in R$.



α) Για ποια τιμή του x ισχύει f (x) = 1;

β) Για ποια τιμή του x η απόσταση γίνεται ελάχιστη;

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και να εξηγήσετε τα αποτελέσματα γεωμετρικά (στο σχήμα).

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

36. ** Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \dfrac{16x + 36}{2x + 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 8 + \dfrac{12}{2x + 3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

37. ** Ένα κατάστημα νοικιάζει βιντεοκασέτες με τιμή 600 δρχ. για τις 4 πρώτες ημέρες. Αν ο χρόνος είναι μεγαλύτερος από 4 ημέρες, τότε ο πελάτης πληρώνει πρόστιμο 200 δρχ. και 75 δρχ. επιπλέον για την καθεμιά ημέρα που καθυστερεί να επιστρέψει την κασέτα. Αν το κόστος ενοικίασης της μιας κασέτας παρασταθεί με $f(x)$, όπου x είναι οι ημέρες ενοικίασης:

α) να εκφράσετε το κόστος ενοικίασης σαν συνάρτηση των ημερών ενοικίασης.

β) να εξετάσετε αν η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής.

38. ** Έστω ότι σε μια χώρα 80.000 κάτοικοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν αυτοκίνητα αξίας 10 εκατομμυρίων και πάνω. Αν σε x μήνες από τώρα ο αριθμός των κατοίκων, οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν τέτοιου είδους αυτοκίνητο, είναι σε χιλιάδες $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - 4x + 80$, να βρείτε:

α) τον αριθμό αυτό των αγοραστών σε 16 μήνες από τώρα

β) σε πόσους μήνες από τώρα ο αριθμός αυτός θα είναι πάλι 80.000

γ) το $\lim\limits_{x \to 16} \frac{f(x) - f(16)}{x - 16}$

39. ** Το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος κάποιου προϊόντος είναι 9.000. Επιπλέον από αυτό, για παραγωγή μέχρι 20 τόννων, το κόστος είναι 400 δρχ. ανά τόννο. Μετά τους 20 τόννους, κάθε επιπλέον τόννος στοιχίζει 800 δρχ. Αν το $f(x)$ συμβολίζει το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος των x τόννων την εβδομάδα, τότε:

α) να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

β) να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ για $0 \le x \le 40$ (κάθε μονάδα στον άξονα $x'x$ να είναι 5 τόννοι και κάθε μονάδα στον $y'y$ να είναι 5.000 δρχ.)

γ) να εξετάσετε την $f(x)$ ως προς τη συνέχεια στο $x = 20$.

40. ** Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα υ μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t, δίνεται από τη σχέση:

$$υ\,(t) = κ\,(1 - e^{-t})$$

όπου κ μια θετική σταθερά.

α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση υ όταν $t \geq 0$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} υ\,(t)$.

γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ.

41. ** Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f\,(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2{,}718$).

β) Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ) Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ) Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

42. ** Το ποσοστό των μαθητών που εκδηλώνουν τη νόσο λοιμώδη μονοπυρήνωση, x ημέρες μετά το πρώτο κρούσμα, δίνεται από τη συνάρτηση $f\,(x) = \dfrac{100x}{2x^2 + 32}$.

α) Πότε θα γίνει αυτό το ποσοστό μέγιστο;

β) Τι συμβαίνει όταν $x \to \infty$; Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

43. ** Μετά από μια εκστρατεία κατά της ρύπανσης των ακτών από σκουπίδια επισκεπτών σ' ένα νησί βρέθηκε ότι το επίπεδο της ρύπανσης ακολουθεί το μοντέλο

$$M\,(t) = \left(\frac{\sqrt{t} + 10}{t^2 + 10}\right) M_0$$

όπου M_0 το επίπεδο της ρύπανσης μόλις πριν την έναρξη της εκστρατείας και t ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη της εκστρατείας.

Ο πρόεδρος της επιτροπής που έκανε την εκστρατεία εμφανίστηκε αισιόδοξος ότι αν διατηρηθούν αυτές οι συνθήκες τελικά θα εξαλειφθεί αυτή η ρύπανση των ακτών του νησιού. Δικαιολογήστε (με τα Μαθηματικά) την αισιοδοξία του προέδρου.

44. ** Για την πενθήμερη εκδρομή της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου, ένα πρακτορείο έκανε την εξής προσφορά:

Για τους πρώτους 50 μαθητές, 75.000 ανά μαθητή.

Για κάθε επόμενο μαθητή και μέχρι τους 70, μείωση κατά 5.000.

Αν η συμμετοχή ξεπεράσει τους 70 και μέχρι τους 100, 68.000 για κάθε μαθητή.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εκδρομής, σύμφωνα με την προσφορά, για 1 έως και 100 μαθητές.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Έχει νόημα να εξεταστεί η συνέχεια της συνάρτησης που θα βρείτε στο ερώτημα (α);

δ) Να βρείτε το κόστος για 69 μαθητές και για 71 μαθητές.

45. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 2\ell n\,(x+1) + 2\alpha, & -1 < x < 0 \\ 2x - \beta, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{e^x + 8}, & x < 0 \\ x + \alpha + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

να έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο σημείο $x_0 = 0$.

46. ** Κατά τη διάρκεια ενός ποιοτικού ελέγχου σε μια μονάδα παραγωγής βρέθηκε ότι η ποσότητα των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από έναν εργάτη ή εργάτρια δίνεται από τον τύπο:

$$E\,(t) = \frac{3t+7}{t}$$

όπου t ο χρόνος που χρειάζεται ένας εργαζόμενος για να κάνει τη συγκεκριμένη δουλειά.

Παρατηρήθηκε ακόμη ότι όταν οι εργάτες ή οι εργάτριες πιέζονται για την ελαχιστοποίηση του τυπικού μέσου χρόνου παραγωγής του προϊόντος, ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων αυξάνεται δραματικά. Πώς το εξηγείται αυτό με τα Μαθηματικά;

47. ** Το μηνιαίο κέρδος μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ΕΥΡΩ βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο:

$$K\,(t) = \frac{2t-4}{t+1}$$

όπου t ο χρόνος λειτουργίας της σε μήνες.

Να αποδείξετε ότι, αν διατηρηθεί αυτός ο τύπος για μεγάλο χρονικό διάστημα, το μηνιαίο κέρδος σταθεροποιείται σε μια τιμή την οποία και να υπολογίσετε.

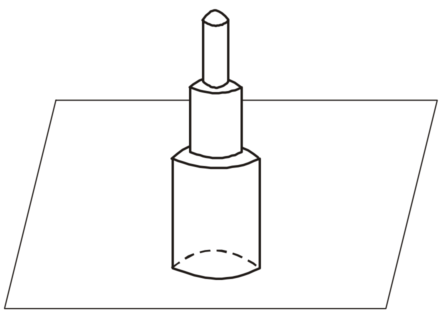
48. ** Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός N (t) των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$N\,(t) = M\,(1 - e^{-0,5t})$$

όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Πώς το σκέφτηκε αυτό;

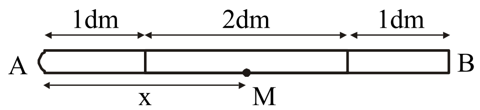
49. ** Τρεις κύλινδροι είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλον σε ένα οριζόντιο επίπεδο p. Οι ακτίνες των βάσεων των κυλίνδρων είναι 3 m, 2 m και 1 m και το ύψος του καθενός είναι 5 m.



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν της οριζόντιας τομής του στερεού που σχηματίζεται ως συνάρτηση της απόστασης της τομής από το επίπεδο p.

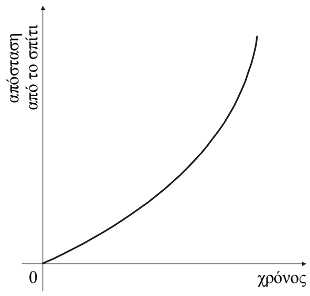
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

50. ** Μια ράβδος ΑΒ αποτελείται από τρία ομοιογενή τμήματα με μήκη 1 dm, 2 dm, 1 dm και βάρη 2 kg, 3 kg, 1 kg αντιστοίχως.

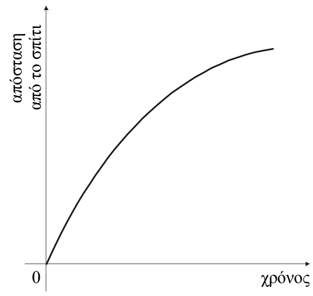


Να εκφράσετε το βάρος ενός τμήματος ΑΜ της ράβδου ως συνάρτηση του μήκους του x. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση αυτή.

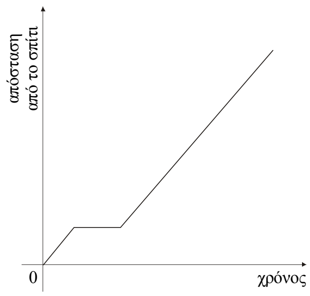
51. ** Δίνονται τα διαγράμματα:



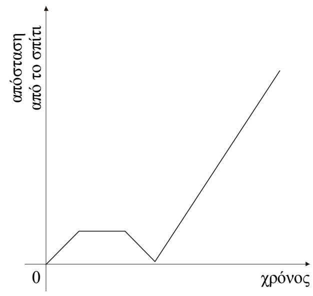
Διάγραμμα I



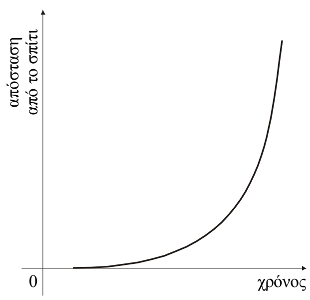
Διάγραμμα II



Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

και οι αφηγήσεις τριών μαθητών:

Μαθητής Α: Το πρωί ξεκίνησα στην αρχή με αργό ρυθμό για το σχολείο, όταν όμως κατάλαβα ότι επρόκειτο να αργήσω επιτάχυνα.

Μαθητής Β: Πήγαινα κανονικά μέχρι τη στιγμή που κλατάρισε ένα λάστιχο του ποδηλάτου μου. Το επισκεύασα επί τόπου και συνέχισα με την ίδια ταχύτητα.

Μαθητής Γ: Δεν είχα απομακρυνθεί πολύ, όταν θυμήθηκα ότι είχα αφήσει στο σπίτι το τετράδιο των Μαθηματικών. Αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω να το πάρω και μετά ξεκίνησα πάλι για το σχολείο.

α) Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αφήγηση το διάγραμμα που της ταιριάζει:

Αφήγηση	Α	Β	Γ
Διάγραμμα			

β) Γράψτε από μια αφήγηση που να ταιριάζει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Μαθητής Δ:

(Διάγραμμα …)

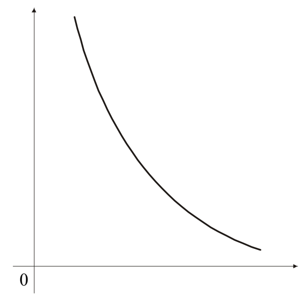
Μαθητής Ε:

(Διάγραμμα ……)

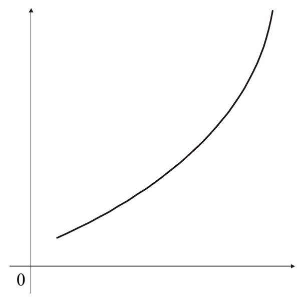
52. ** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών των συναρτήσεων:

x	f (x)	g (x)	h (x)	φ (x)	σ (x)
1	23	23	23	33	33
2	24	27	25	32	29
3	26	30	27	30	26
4	29	32	29	27	24
5	33	33	33	23	23

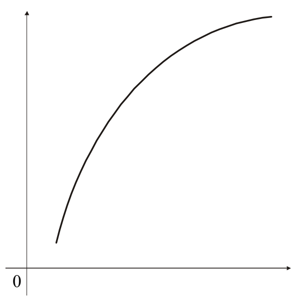
και τα διαγράμματα:



Διάγραμμα I



Διάγραμμα II



Διάγραμμα III

α) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάγραμμα την κατάλληλη από τις παραπάνω συναρτήσεις συμπληρώνοντας τον πίνακα:

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση			

β) Να φτιάξετε ένα σχεδιάγραμμα για καθεμιά από τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

53. ****** Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f (- 1) = - 1, f (1) = 1, f συνεχής στο διάστημα (-1, 1), αλλά να μην υπάρχει αριθμός γ μεταξύ του - 1 και του 1 με f (γ) = 0.