Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \dfrac{1}{|3x-8|-|x|}$

δ) $f(x) = \dfrac{5}{|x-3|-1}$

ε) $f(x) = \log(x^2+x-2) + \log\dfrac{x+3}{3-x}$

στ) $f(x) = \dfrac{συνx}{2ημx-1} + \dfrac{1}{εφx-1}$, $x \in [0, 2\pi]$

ζ) $f(x) = \sqrt{e^x-1} + \sqrt{1-\ln x}$

2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1\cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει

$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ $f(|x|) = f(x)$.

4. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x - 2}$ και $g(x) = \sqrt{6 - x}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $p = f \cdot g$, καθώς και όλες τις τιμές της p για τις ακέραιες τιμές του x στο πεδίο ορισμού της.

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq -3 \\ 5 - 2x, & -3 < x \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x < 2 \\ 7x - 5, & 2 \leq x \end{cases}$

Να βρείτε τον τύπο της F με $F(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)$.

6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$

β) $f_2(x) = 2f(x)$

γ) $f_3(x) = -f(x)$

δ) $f_4(x) = |f(x)|$

7. ** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

8. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

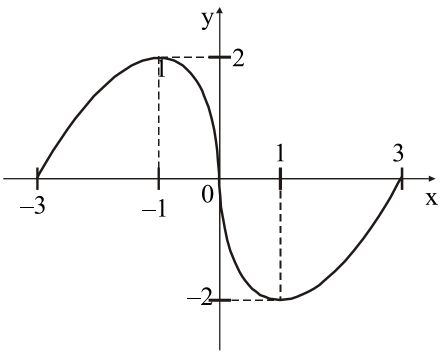
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(x) = 0$,

ii) $f(x) = 2$,

iii) $f(x) = -2$



δ) Να λύσετε τις ανισώσεις: i) f (x) > 0, ii) f (x) < 0,

iii) f (x) ≤ 2, iv) f (x) < - 2

ε) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια.

ζ) Να εξετάσετε αν η f είναι περιττή.

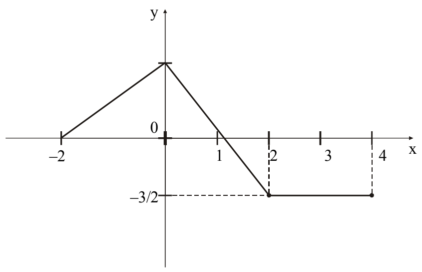
η) Να εξετάσετε αν η f είναι 1 - 1.

9. ** α) Για κάθε α > 0, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με x > 0.

10. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις 2f, f^2 και $\frac{f}{f}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

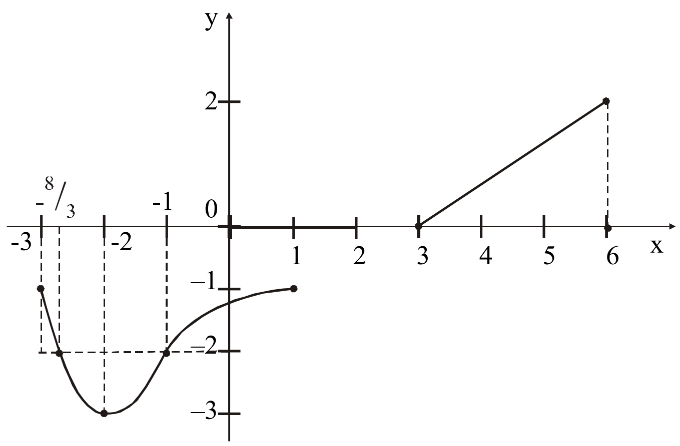
11. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [2, 4]. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:



α) g (x) = f (x) + 1

β) h (x) = - f (x) γ) φ (x) = $|f(x)|$.

12. ** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g.

β) Να βρείτε τον τύπο της g όταν x ∈ [3, 6].

γ) Για ποιες τιμές του x ισχύει g (x) = - 1;

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: i) - 2 < g (x) < 0

ii) $g(x) \geq 0$

13. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x - 2)$, $x \in [0, 2]$.

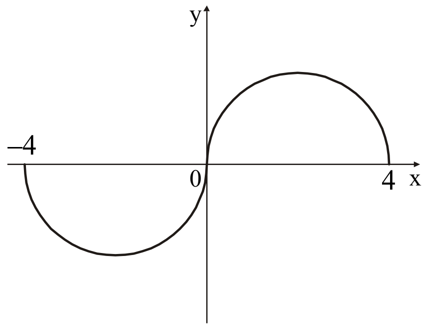
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in D_f$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-1, 0]$.

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x όταν οι τιμές του $y = 0$ και όταν $y = \frac{3}{4}$.

14. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αποτελείται από τα δύο ημικύκλια του σχήματος.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της.

γ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $y = |f(x)|$ ii) $y = -f(x)$ iii) $y = f(x - 2)$

15. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{x - 3} + 3(x - 3)$. Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

16. ** Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(g(x))$. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση κατάλληλες συναρτήσεις f και g.

α) $h(x) = συν^2x$ β) $h(x) = 3(x^2 + 2)^3$

γ) $h(x) = \frac{1}{συν^2x}$ δ) $h(x) = ημ\left(\frac{1}{x^ν}\right)$ ε) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

17. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$.

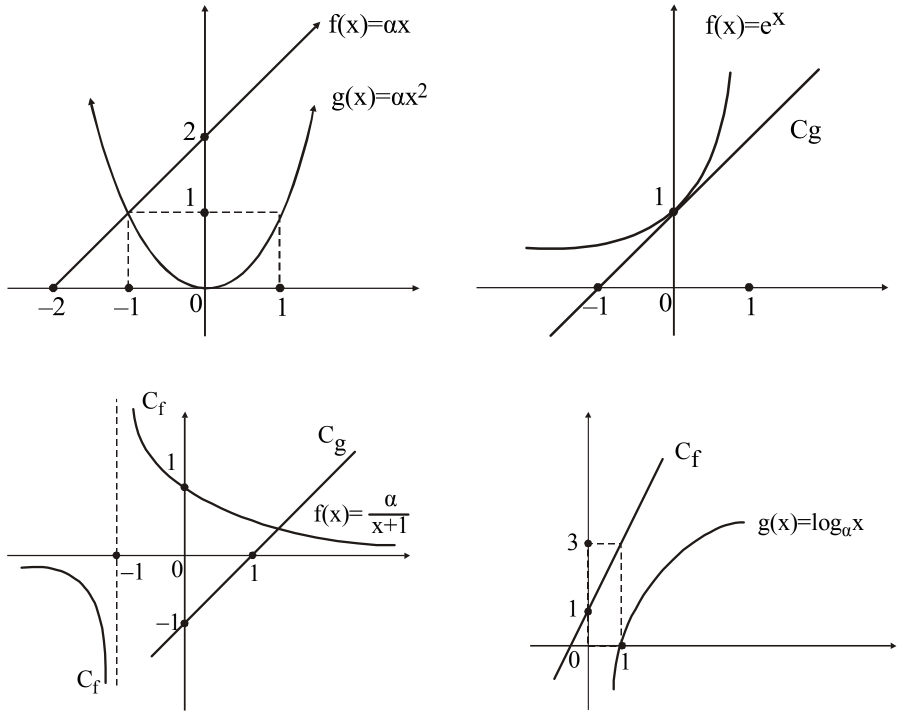
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(g o f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

18. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g.



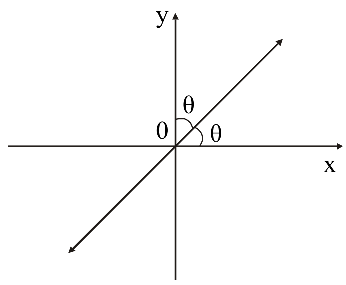
Σε κάθε περίπτωση:

α) Να βρείτε τους τύπους των f, g.

β) Να βρείτε τον τύπο της fog.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη fog.

19. ** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x + 1. Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε η γραφική παράσταση της fog να είναι η ευθεία του διπλανού σχήματος.



20. ** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx + β$, $α \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$ β) $f = - f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$

($c \neq 0$, σταθερά)

21. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

α) Να δείξετε ότι $f^{-1} = f$.

β) Τι μπορείτε να πείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής;

22. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f (x) = x + 3 και g (x) = x^2 - 1 με πεδίο ορισμού το R.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε την h (x) = (gof^{-1}) (x).

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της h.

ε) Από την C_h να βρείτε το σύνολο τιμών της h και τα ακρότατα αυτής.

23. ** Έστω οι συναρτήσεις f (x) = 1 - x, x ∈ [1, + ∞) και g (x) = x^2, x ∈ (- ∞, 0].

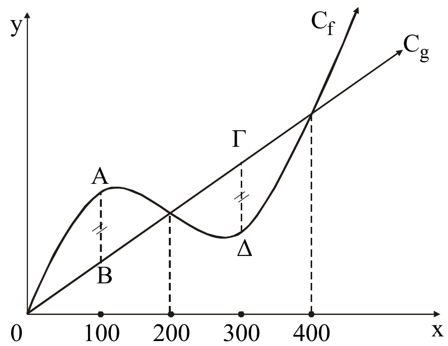
α) Να βρείτε τη συνάρτηση gof.

β) Να αποδείξετε ότι η gof είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της gof και να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της $(gof)^{-1}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $(gof)^{-1}$ (x) = x.

24. ** Η συνάρτηση f του κόστους παραγωγής x τεμαχίων ενός προϊόντος μιας επιχείρησης καθώς και η συνάρτηση g των εσόδων της επιχείρησης από την πώληση των x τεμαχίων, έχουν γραφικές παραστάσεις C_f και C_g που φαίνονται στο σχήμα.



α) Να βρείτε σε ποιο διάστημα πρέπει να βρίσκεται ο αριθμός των τεμαχίων που παράγει η επιχείρηση ώστε αυτή να έχει κέρδος.

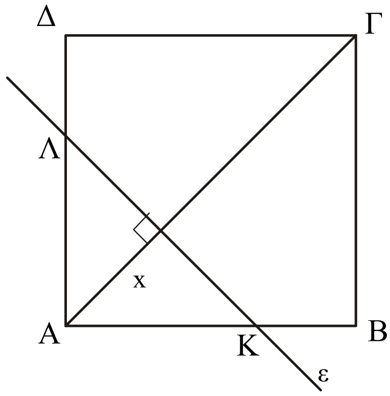
β) Πόσα αντικείμενα πρέπει να παράγει για να έχει μέγιστο κέρδος;

γ) Αν παράγει λιγότερα από 200 ή περισσότερα από 400 αντικείμενα, τι μπορείτε να πείτε για το κέρδος της επιχείρησης;

δ) Αν η επιχείρηση δεν μπορεί να παράγει περισσότερα από 200 αντικείμενα, τότε τι μπορείτε να πείτε αν παράγει 100 αντικείμενα;

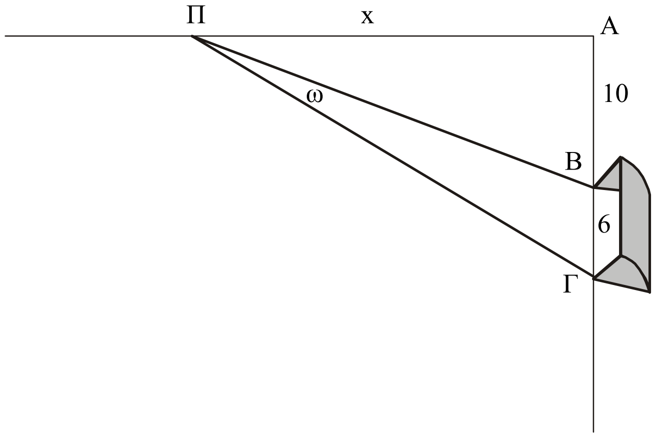
25. ** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 1. Μια ευθεία ε που είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ, τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Κ, Λ αντιστοίχως και έστω x η απόσταση της ε από την κορυφή Α. Η ευθεία αυτή χωρίζει το τετράγωνο σε δύο χωρία.

α) Να εκφράσετε το εμβαδό Ε του χωρίου που περιέχει την κορυφή Α, ως συνάρτηση του x.



β) Να βρείτε τις τιμές Ε (0), Ε ($\sqrt{2}$), Ε (1), Ε ($\frac{\sqrt{2}}{2}$).

26. ** Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα ΒΓ κινούμενος πάνω στην ευθεία ΠΑ. Αν ΑΒ = 10 και ΒΓ = 6:



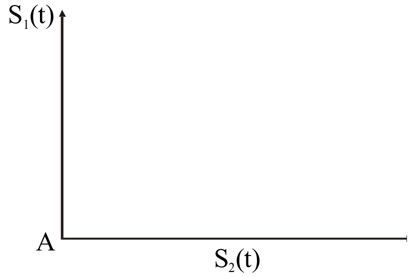
α) να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών ΑΠΒ και ΑΠΓ ως συνάρτηση της απόστασης ΠΑ = x

β) να υπολογίσετε την εφω ως συνάρτηση του x

γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να "σουτάρει" ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

Δίνεται ότι εφ (α - β) = $\dfrac{\text{εφα - εφβ}}{1 + \text{εφα} \cdot \text{εφβ}}$.

27. ** Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με ταχύτητα $υ_1$ = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με ταχύτητα $υ_2$ = 80 km/h.

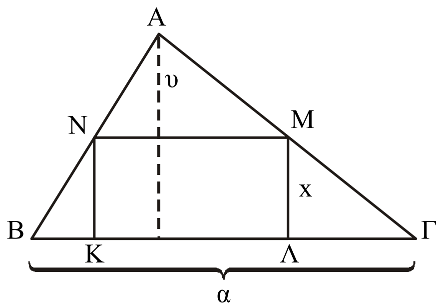


α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ ως συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;

28. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση α και ύψος υ. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

29. ** Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές:

$\frac{1}{2}$ s, 1 s, 2 s, 3 s, $\frac{7}{2}$ s, 4 s.

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9}$ m;

δ) Να βρείτε το λόγο $\upsilon(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

30. ** Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$. Το ημερήσιο κόστος K (x) σε χιλιάδες μονάδες "ΕΥΡΩ" για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

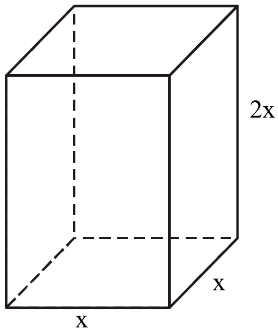
β) Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια "ΕΥΡΩ";

31. ** Το ορθό πρίσμα του διπλανού σχήματος έχει βάση τετράγωνο πλευράς x και ύψος 2x.

α) Να εκφράσετε το εμβαδό Ε της επιφάνειας του πρίσματος ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε τις τιμές Ε (1), Ε (3), Ε (6), Ε ($\frac{1}{2}$).

γ) Σχολιάστε την τιμή Ε (-3).



32. ** Ένα κατάστημα πουλά τσάντες με 10.000 δρχ. κόστος για την κάθε τσάντα. Εκτιμάται ότι, αν η κάθε τσάντα πωλείται x χιλιάδες δρχ., αγοράζονται 70 - x τσάντες το μήνα.

α) Να εκφράσετε το μηνιαίο κέρδος ως συνάρτηση του x.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε την τιμή πώλησης για την οποία το κατάστημα θα έχει το μέγιστο κέρδος.

33. ** Για να περιοριστεί η κατανάλωση νερού σε μία πόλη, ανακοινώνεται ότι μια οικογένεια 4 ατόμων, θα πληρώνει το μήνα για τα πρώτα 1.200 κ.μ. νερού, 1.000 δρχ. τα 100 κ.μ.. Από 1.200 - 2.400 κ.μ. θα πληρώνουν 10.000 δρχ. τα 100 κ.μ., και αν η κατανάλωση ξεπερνά τα 2.400 κ.μ., θα πληρώνουν 40.000

δρχ. για τα 100 κ.μ. Να εκφράσετε το μηνιαίο λογαριασμό της οικογένειας σε χιλιάδες ως συνάρτηση της ποσότητας του νερού που καταναλώνει.

34. ** Όταν η τιμή μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο είναι x χιλιάδες δραχμές, τότε η προσφορά της (για πώληση) είναι Π (x) = x^2 + αx - 3 δεκάδες χιλιάδες τεμάχια, ενώ η ζήτησή της (για αγορά) είναι Ζ (x) = βx + 32 δεκάδες χιλιάδες τεμάχια (α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί). Ένας αξιόπιστος σύμβουλος επενδύσεων εκτιμά ότι κανείς δεν πρόκειται να πουλήσει μετοχές στην τιμή των 3.000 δραχμών (και κάτω) ενώ κανείς δεν πρόκειται να αγοράσει μετοχές στην τιμή των 4.000 δραχμών (και άνω).

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις Π (x) και Ζ (x).

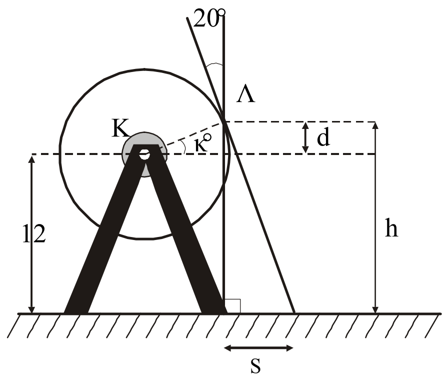
β) Να υπολογίσετε την αξία της μετοχής όταν η ζήτηση είναι τετραπλάσια της προσφοράς.

35. ** Το εισιτήριο του τρένου μεταξύ δύο ορισμένων σταθμών κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

36. ** Σε ένα Λούνα Παρκ ο μεγάλος τροχός έχει ακτίνα 10 m και το κέντρο του Κ βρίσκεται 12 m πάνω από το έδαφος. Στην καρέκλα Λ του τροχού οι ακτίνες του ηλίου πέφτουν υπό γωνία 20° ως προς την κατακόρυφο. Με τη βοήθεια του σχήματος, να εκφράσετε:



α) το d ως συνάρτηση του κ

β) το h ως συνάρτηση του d

γ) το s ως συνάρτηση του h

δ) να βρείτε τη συνάρτηση sohod.