ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001-2005 (ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)

1)Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$. Δείξτε ότι:

α)$\overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$ (μονάδες 7/100). β) Ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός (μονάδες 9/100).

γ)$|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$(μονάδες 9/100).

Θέμα 2ο-Θ-Τ Κατ 2005 (μονάδες25/100)

2)Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $R \to R$ τέτοια ώστε f(1)=1.Αν για κάθε $\chi \in R$ ισχύει g(x)=

$\int_1^{x^3}|z|f(t)\,dt-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|(x-1)^3 0$ όπου z=α+βi $\in C$, με α, β $\in R^*$, τότε: α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g

είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g' (μονάδες 5/100) β)Να αποδείξετε ότι: $|z|=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

(μονάδες 8/100) γ)Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι: $Re(z^2)=-\dfrac{1}{2}$

(μονάδες 6/100)

Θέμα 4ο-Θ-Τ Κατ 2004 (μονάδες25/100)

3)Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi όπου α,β $\in$ R και $w=3z-i\overline{z}+4$ και όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.
α) Να αποδείξετε ότι Re(w)=3α-β+4 και Im(w)=3β-α (μονάδες 6/100) β)Να αποδείξετε ότι αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση ψ=χ-12 τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση ψ=χ-2. (μονάδες 9/100) γ)Να βρείτε ποιος απο τους μιγαδικούς αριθμούς z,οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση ψ=χ-2, έχει το ελάχιστο μέτρο (μονάδες 10/100)

Θέμα 2ο-Θ-Τ Κατ 2003 (μονάδες25/100)

4) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu)=i^{\nu}z$, $\nu \in N^*$.α) Να δείξετε ότι f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=0.
(μονάδες 7/100) β) Αν $|z|=\rho$ και Arg(z)=θ, να δείξετε ότι $f(13)=\rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$

(μονάδες 8/100) γ) Αν $|z|=2$ και $Arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z, και f(13) (μονάδες 10/100)

Θέμα 2ο-Θ-Τ Κατ 2002 (μονάδες25/100)

5) Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί , . Να αποδείξετε ότι : $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$.   (μονάδες 7,5/100)

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό ισχύει:

α) $|z|^2 = z.\bar{z}$

β) $|z^2|=z^2$

γ) $|z|=-|\bar{z}|$

δ) $|z|=|\bar{z}|$

ε) $|i\bar{z}|=|z|$ (μονάδες 5/100)

Β.1.Αν $z_1=3+4i$ και $z_2=1-\sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιο σας τους αριθμούς της στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της στήλης Β έτσι , ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\|z_1.z_2\|$	α. 4
2. $\|z_1^2\|$	β. 2
3. $\|z_2\|^2$	γ. 25
4. $-\|\bar{z_1}\|$	δ. -5
5. $\|i.z_2\|$	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

(μονάδες 7,5/100)

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$ να δείξετε ότι $\bar{z}=\frac{1}{z}$ (μονάδες 5/100)

Θέμα 1^{o}-Θ-Τ Κατ 2001 (μονάδες25/100)