

Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = -2i + 2 - yi$

β) $y + 2i = 3 - (2 + i)x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$

δ) $(x^2 + 1)i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2i$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

β) Να βρείτε τον z .

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)x - 3yi - (3i - 2)x + (4 - 2yi)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $a + bi$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\operatorname{Re}(z) = 0$

ii) $\operatorname{Im}(z) = 0$

iii) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

iv) $z = 0$

5. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)x + (y - 1)i - 5$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή $a + bi$.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x , αν $\operatorname{Im}(z) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

6. ** Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i(-5i)$

β) $(2 + i)(-i + 3)$

γ) $\frac{3}{4i}$

δ) $\frac{1}{1-i}$

ε) $\frac{1-i}{-i+1}$

ζ) $\frac{(2+3i)(-i+1)}{1-2i}$

7. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 - i$ και $w = -3 + 2i$. Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους παρακάτω μιγαδικούς:

α) $\frac{1}{z}$

β) $\frac{w}{z}$

γ) $\frac{z+1}{i}$

δ) $\frac{1}{z^2}$

ε) $\frac{2i}{w+3}$

ζ) $\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

8. ** Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z = (1 + i + i^2 + i^3)^{100}$

β) $w = (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)^2$

9. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3 + \sqrt{2}i$ και $w = \frac{1}{1-i}$. Να βρείτε:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \operatorname{Re}(z) & \beta) \operatorname{Re}(w) & \gamma) \operatorname{Im}(zw) \\ \delta) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) & \epsilon) \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) & \end{array}$$

10. ** Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$\alpha) z_1 = \frac{5-2i}{1-2i} \quad \beta) z_2 = \frac{i-1}{i} - \frac{2}{(1-i)^2}$$

11. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b ώστε να ισχύει:

$$(a + bi)^2 = \frac{12+5i}{i}.$$

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = x + 2y - i \quad \text{και} \quad z_2 = 11 - (4x - y)i \quad \text{να είναι συζυγείς.}$$

13. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 5 + 8i$.

$$\alpha) \text{Να βρείτε τους } \bar{z}, -z \text{ και } \frac{1}{z}.$$

$$\beta) \text{Να βρείτε το άθροισμα } w = z + \bar{z} - z + \frac{1}{z}.$$

14. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον z ώστε: $(2 - 3i)z + 5 + 9i = 0$.

15. ** Να βρείτε τον $z \in \mathbb{C}$ αν $(2 + 3i)z - 2 = (1 + 2i) + 2z + i$.

16. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = (2i - z)(z + 6i)$ είναι πραγματικός, να δείξετε ότι $x = 0$ ή $y = -2$.

17. ** Να βρείτε όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\bar{z} = iz^2$.

18. ** Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = -5 - 12i$.

19. ** Να βρείτε όλους τους ακεραίους $v \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει $(1 + i)^v = (1 - i)^v$.

20. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι ισχύει: $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους z_1, z_2 είναι πραγματικός.
21. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
α) Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \frac{z + 8i}{z + 6}$.
β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Im}(w) = 0$.
γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Re}(w) = 0$.
δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.
ε) Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
22. ** Η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.
α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β .
23. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:
 $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.
24. ** Βρείτε τον $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, αν $z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0$.
25. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = (3 - 2x) + \frac{x}{x-1}i$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.
α) Για ποιες τιμές του x , ο z είναι πραγματικός αριθμός;
β) Για ποιες τιμές του x , ο z είναι φανταστικός αριθμός;
γ) Υπάρχει τιμή του x ώστε $z = 0$;
26. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:
α) $z = \frac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \frac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$
27. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:
α) $z = \left(\frac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\frac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^v$
28. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.

29. ** Αν $|z+9| = 3|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.
30. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|\operatorname{Re}(z)| = 3$ και $|\operatorname{Im}(z)| = 4$ ($|$ | απόλυτη τιμή). Πού βρίσκονται οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;
31. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τα $\operatorname{Re}(w)$ και $\operatorname{Im}(w)$ του $w = \frac{2z-4}{z-i}$.
- β) Αν $w \in \mathbb{R}$, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;
- γ) Αν w φανταστικός αριθμός, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;
32. ** Αν $z = x + yi$, $y \neq 0$, να δείξετε ότι ο $w = \frac{z}{1+z^2}$, $1+z^2 \neq 0$ είναι πραγματικός αν $|z| = 1$.
34. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 2.
35. ** Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής την οποία ικανοποιούν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, αν ο αριθμός $w = \frac{z+2i}{z+1}$ είναι πραγματικός.
36. ** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:
- $$-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \quad (1)$$
- $$|\operatorname{Im}(z)| \leq 2 \quad (2)$$
- $$|z| \geq 2 \quad (3)$$
- Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.
39. ** Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - 5i$ και $z_2 = 5 + 2i$.
- α) Να παραστήσετε τις εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.
- β) Να βρείτε τα μέτρα τους.
- δ) Να δείξετε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 τέμνονται κάθετα.
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις εικόνες των z_1 , z_2 και την αρχή των αξόνων.

44. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον $w = (1 + i)z - 2i$ συναρτήσει των $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Αν $|w| = 2$, να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ ανήκουν σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με την ευθεία $y = x$.
45. ** Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει:
- $3 \leq |z + i| \leq 4$
 - $|z - 1| = |z - 3| = |z - i|$
52. ** Να γράψετε στη μορφή $x + yi$ τους μιγαδικούς:
- $(\sqrt{3} + i)^4 \cdot (1 + \sqrt{3}i)^4$
 - $\frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^3}{(i - 1)^2}$
53. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:
- $$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
- $$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
- Να βρείτε τα μέτρα τους.
 - Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;
 - Να βρείτε το μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_5$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3 .
54. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:
- $$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i$$
- $$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}i \quad z_5 = 3 - 3\sqrt{3}i$$
- Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $z = \kappa(1 - \sqrt{3}i)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
 - Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;
 - Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3 .
55. ** Η εξίσωση $z + \alpha + i(z - 4) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μια πραγματική λύση.
- Να βρείτε την τιμή του α .
 - Να λύσετε την εξίσωση για την τιμή του α που βρήκατε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
58. ** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.

δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.

60. ** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 - \frac{1}{z} = \bar{z}$ έχει μια μόνο λύση, την $z = 1$.

62. ** Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$, $z \in \mathbb{C}$.

α) Ναδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος AB με άκρα $A(1, 0)$ και $B(0, 3)$.

β) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).

δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

63. ** Δίνεται $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τις εικόνες των ριζών της $P(z) = 0$.

